

**Università di Pavia  
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica**

**Introduzione a un'esperienza sulla velocità  
della luce.**

**Dispense per gli studenti del Corso di Esperimentazioni di Fisica II**

**Venaglioni Achille**

## Introduzione.

La Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure ha definito il metro nel 1983 nel modo seguente: "Il metro è lo spazio percorso dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di  $1/299792458$  secondi".

Di conseguenza la velocità della luce nel vuoto è definita come una grandezza nota priva di errori di misura pari a:

$$c=299792458 \text{ m/s} .$$

Non esiste dunque più il campione di unità di misura relativo al metro, bensì è definito il campione di unità di misura del secondo definito come l'intervallo di tempo pari a 9192631770 oscillazioni della radiazione non perturbata emessa dall'atomo di  $^{133}\text{Cs}$  nello stato fondamentale  $^2\text{S}_{1/2}$  nella transizione dal livello iperfine  $F=4, M=0$  al livello iperfine  $F=3, M=0$ . (F indica il valor massimo della proiezione della somma dello spin del nucleo con lo spin dell'elettrone esterno, M indica la proiezione rispetto ad un asse di detta somma, secondo le regole della meccanica quantistica.)

Le misure di velocità della luce nel vuoto dunque non possono più assumere il significato di determinazione di tale grandezza, ma possono avere valore puramente didattico, o di verifica di compatibilità fra misure di lunghezza e tempo; le misure in aria possono anche essere intese come verifica del valore dell'indice di rifrazione dell'aria stessa.

Questa dispensa contiene la descrizione di una misura in aria della velocità della luce, preceduta da un'introduzione sui semiconduttori in generale, senza pretese di completezza, e su due dispositivi particolari allo scopo di rendere comprensibile il funzionamento delle parti dell'apparato anche a studenti che non hanno ancora conoscenze di meccanica quantistica e di fisica dei semiconduttori.

## Semiconduttori.

Il cristallo semiconduttore é un cristallo le cui caratteristiche elettriche sono intermedie tra quelle dei metalli e quelle degli isolanti . Elementi tipici di cui sono costituiti tali cristalli sono il silicio (Si) e il germanio (Ge):

Si: n° atomico 14 ; peso atomico 28.086;

Ge: n° atomico 32 ; peso atomico 72.59.

Per tali elementi i legami tra un atomo e i suoi immediati vicini sono disposti con simmetria tetragonale e realizzano una struttura cristallina uguale a quella del diamante.

Si tratta di una struttura cubica a facce centrate la cui base è costituita da due atomi dei quali l'uno si trova su un punto del reticolo (vertice del cubo o punto di intersezione delle diagonali di una faccia), e l'altro in un punto la cui posizione si può così descrivere: considerato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine nel punto reticolare e con gli assi paralleli a tre spigoli del cubo confluenti in un vertice, assumendo la lunghezza del lato del cubo come unità di misura, le coordinate di tale punto sono (0.25 , 0.25 , 0.25).

Per ogni atomo, alla temperatura dello zero assoluto, quattro elettroni entrano negli orbitali leganti a simmetria tetragonale. A temperatura maggiore un certo numero di tali elettroni entra in uno stato caratterizzato da maggiore energia e dalla possibilità di muoversi in tutto il cristallo: in tale stato l'energia dell'elettrone ha un valore appartenente ad un intervallo finito detto banda di conduzione, mentre l'energia degli elettroni rimanenti negli orbitali leganti ha un valore appartenente ad una analoga banda detta banda di valenza. Le due bande sono separate da un intervallo di valori energetici che gli elettroni non possono assumere, detto banda proibita.

Gli elettroni della banda di conduzione consentono il trasporto della corrente elettrica attraverso il cristallo.

Quando un elettrone passa dalla banda di valenza alla banda di conduzione, crea una lacuna o buca nella banda di valenza; altri elettroni della banda di valenza possono poi occupare la lacuna così creata, producendone un'altra presso un'altro atomo, e così successivamente: tale spostamento di lacune è anch'esso un meccanismo di trasporto della corrente elettrica.

Tali "portatori di carica" fanno sì che la resistività del semiconduttore sia intermedia fra quella degli isolanti e quella dei conduttori.

A 300 °K le resistività di Si e Ge sono:

$$\rho (\text{Si}) = 230000 \text{ ohm cm}$$

$$\rho (\text{Ge}) = 47 \text{ ohm cm}$$

mentre quella del rame è:

$$\rho (\text{Cu}) = 1.7 \cdot 10^{-6} \text{ ohm cm a } 22^\circ\text{C}$$

e quella del vetro:

$$\rho (\text{vetro}) \approx 10^{14} \text{ ohm cm a } 20^\circ\text{C}.$$

Se alcuni atomi del cristallo di Ge o di Si sono sostituiti da atomi di elementi del V gruppo, cioè aventi 5 elettroni nell'orbitale più esterno, essi non turbano l'ordine del reticolo e l'elettrone in più entra nella banda di conduzione molto più facilmente dal punto di vista energetico che non gli elettroni del Ge o Si , poiché il quinto elettrone, quando è legato all'atomo, ha un valore di energia vicino al limite inferiore della banda di conduzione.

Tale sostituzione si indica col termine "drogaggio n" e aumenta sensibilmente la conducibilità del semiconduttore, che si chiama in tal caso semiconduttore di tipo n. Tipici elementi utilizzati nella tecnica sono l'arsenico As e l'antimonio Sb.

Un altro tipo di drogaggio consiste nel sostituire atomi del cristallo puro con atomi di elementi del III gruppo, tipicamente boro B e alluminio Al, che hanno tre elettroni nell'orbitale più esterno. Tali elettroni cedono solo tre elettroni agli orbitali leganti e creano degli orbitali leganti non completamente riempiti, che con un costo energetico piccolo rispetto all'ampiezza

della banda proibita, possono essere occupati da elettroni provenienti dagli orbitali leganti degli atomi costitutivi del cristallo, cioè energeticamente appartenenti alla banda di valenza; quando un elettrone passa dalla banda di valenza all'orbitale legante dell'atomo di drogaggio (detto accettore), crea una lacuna, cioè un portatore di carica positivo.

Nel semiconduttore drogato con accettori (semiconduttore di tipo p), il numero di buche al  $\text{cm}^3$  è più grande che nel semiconduttore puro e ciò riduce sensibilmente la resistività del cristallo.

Un concetto essenziale per la fisica dei semiconduttori è il "livello di Fermi": si tratta di un particolare valore di energia degli elettroni in corrispondenza del quale la probabilità di occupazione da parte degli elettroni di tale valore è pari a 0.5. Tale concetto serve a calcolare la densità per unità di volume e per intervallo unitario di energia degli elettroni nel cristallo, che si calcola come prodotto della densità degli stati disponibili calcolati mediante la meccanica quantistica, moltiplicato la probabilità di occupazione. Se  $E_f$  è il livello di Fermi, K la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta, E l'energia degli elettroni, la probabilità di occupazione  $P(E)$  si scrive:

$$P(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_f}{KT}}}$$

Nel caso del semiconduttore puro o intrinseco,  $E_f$  si trova circa a metà fra il limite superiore della banda di valenza e il limite inferiore della banda di conduzione; per il semiconduttore n, per densità degli atomi di drogaggio non eccessiva, si trova fra il livello dei donatori e il limite inferiore della banda di conduzione e per il semiconduttore p, fra il limite superiore della banda di valenza e il livello degli accettori.

Questi posizionamenti si intendono per temperature non troppo lontane dai 300 °K.

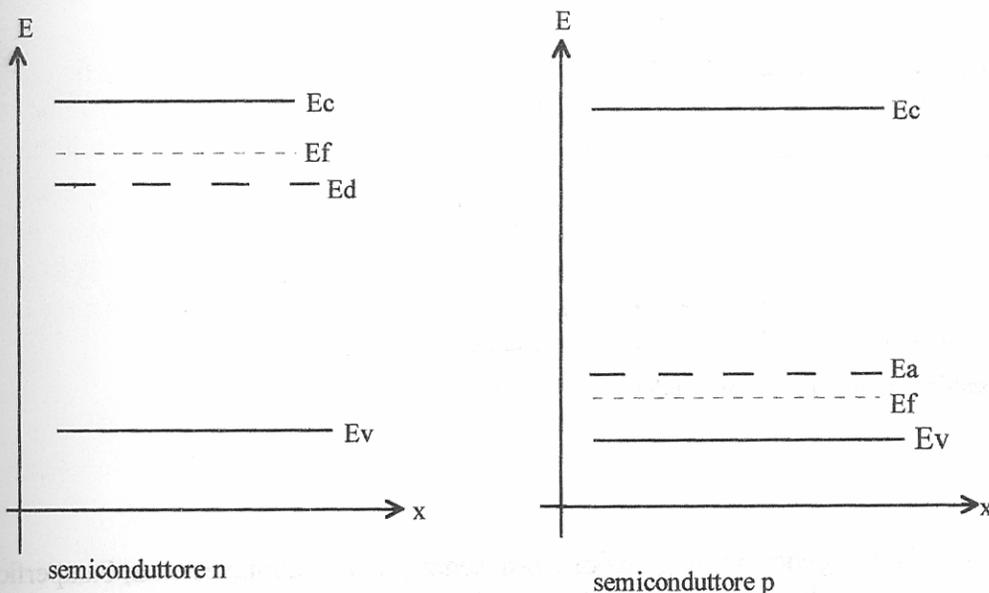


Fig.1 :Schema dei livelli energetici di semiconduttori drogati n e p: x: dimensione lineare del cristallo ; $E_v$ : limite superiore della banda di valenza;  $E_c$ : limite inferiore della banda di conduzione;  $E_f$ : livello di Fermi;  $E_d$ :livello dei donatori;  $E_a$ : livello degli accettori .

### Giunzione p-n.

È costituita da un tratto di semiconduttore p e da un tratto di semiconduttore n in contatto fra di loro e isolati da altri corpi: l'agitazione termica determina il trasferimento di cariche elettriche fra i semiconduttori e per conseguenza lo stabilirsi di una differenza di potenziale. La condizione di equilibrio si manifesta quando i livelli di Fermi dei due materiali si eguagliano e in tale condizione i trasferimenti di cariche in versi opposti attraverso la giunzione in media si compensano e la corrente elettrica attraverso la giunzione si annulla. Definita la "work function" come la differenza di energia fra un elettrone a riposo a distanza infinita dal singolo semiconduttore isolato e il relativo livello di Fermi, la d.d.p. all'equilibrio è uguale alla differenza fra le "work function" dei semic. in contatto, diviso la carica dell'elettrone.

Se si collegano i due poli di un generatore di tensione continua esterno, mediante opportuni conduttori, ai due tratti di semiconduttore, la condizione di equilibrio non è più verificata e si manifesta passaggio di corrente: se il polo positivo è collegato al semic. p la giunzione è polarizzata direttamente, mentre è polarizzata inversamente nel caso opposto; corrispondentemente la corrente si chiama diretta o inversa. La corrente inversa, per tensioni di polarizzazione dell'ordine del volt, in semiconduttori al Si di piccole dimensioni, è inferiore al  $\mu\text{A}$ , mentre la diretta è molto maggiore, per esempio per tensioni di 0.65 V può valere 10 mA in piccoli diodi.

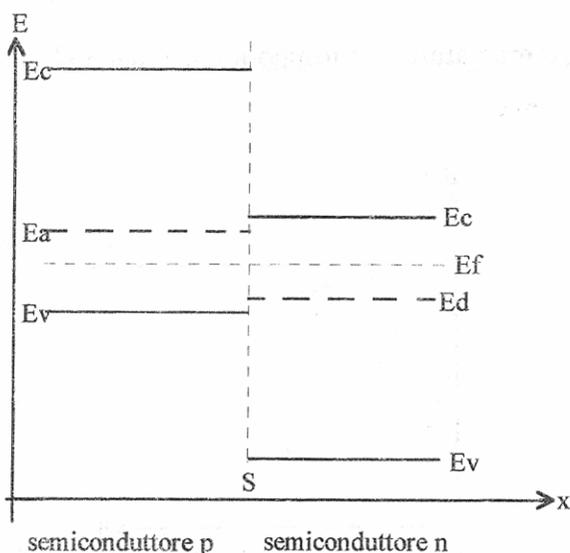


Fig. 2: Livelli energetici in una giunzione p-n senza polarizzazione esterna; S:superficie di contatto; per le altre indicazioni vedere fig. 1.

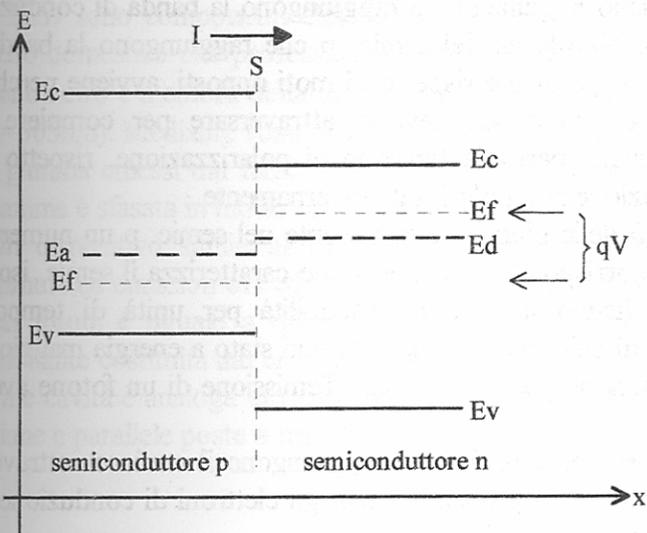


Fig. 3 :Livelli energetici di una giunzione p-n polarizzata con una tensione continua V; q:carica dell'elettrone; I:corrente che attraversa la giunzione; per le altre indicazioni vedere figure precedenti.

## LASER a semiconduttore.

In una giunzione p-n polarizzata direttamente, la corrente è dovuta agli elettroni della banda di conduzione del semic. n che attraversano la giunzione e raggiungono la banda di conduzione del semic. p e alle buche della banda di valenza del semic. p che raggiungono la banda di valenza del semic. n. L'attraversamento prevalente rispetto ai moti opposti, avviene perché le d.d.p. che entrambi i tipi di portatori di carica devono attraversare per compiere tali trasferimenti sono ridotte di una tensione pari alla tensione di polarizzazione, rispetto alla corrispondente d.d.p. relativa alla giunzione non polarizzata esternamente.

In tali condizioni dunque in prossimità della giunzione è presente nel semic. p un numero di elettroni di conduzione maggiore del corrispondente numero che caratterizza il semic. isolato in equilibrio termico. Tali elettroni hanno una certa probabilità per unità di tempo di ricombinarsi con le buche della banda di valenza, passando da uno stato a energia maggiore a uno stato a energia minore: tale transizione può determinare l'emissione di un fotone avente energia pari alla differenza di energia .

Analoghe considerazioni si possono fare per le buche che raggiungono il semic. n attraverso la giunzione: esse si ricombinano con un certa probabilità con gli elettroni di conduzione del semic. n e ciò può determinare l'emissione di fotoni.

Tali processi (ricombinazioni radiative) deprivano i semiconduttori delle cariche provenienti dalla giunzione, quindi le densità di tali cariche sono funzione decrescente della distanza dalla giunzione: in conseguenza di ciò i fotoni vengono generati prevalentemente in punti vicini alla giunzione stessa.

I fotoni sono particelle elementari aventi massa nulla e rappresentano i "quanti" del campo elettromagnetico; per essi vale la seguente relazione fra l'energia  $E$  e la frequenza  $\nu$  del campo e. m. di cui il fotone è un quanto:

$$E = h \cdot \nu \quad 1)$$

dove  $h$  è la costante di Planck, che vale  $4.135707 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$  .

Il minimo valore di  $E$  nel caso delle transizioni descritte è la differenza fra l'energia corrispondente al margine inferiore della banda di conduzione e l'energia corrispondente al margine superiore della banda di valenza, cioè il cosiddetto intervallo di energia proibita  $E_g$  .  
Per il Si  $E_g = 1.12 \text{ eV}$  e per il Ge  $E_g = 0.718 \text{ eV}$ ; a tali energie corrispondono le seguenti lunghezze d'onda nel vuoto:

$$\lambda_{\text{Si}} = \frac{c}{\nu} = \frac{ch}{E_g} = 1.107 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad 2)$$

$$\lambda_{\text{Ge}} = 1.727 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad 3)$$

dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto ( $299792458 \text{ ms}^{-1}$ ).

Tali lunghezze d'onda si trovano nell'infrarosso.

Esiste un gran numero di semiconduttori aventi valori di  $E_g$  maggiori o minori di quelli citati : i semiconduttori composti; si tratta di composti cristallini formati da elementi del III e del V gruppo in numero da due a quattro.

In tali semic., nel caso di valori di  $E_g$  sufficientemente grandi, è possibile ottenere mediante il processo sopra descritto fotoni di lunghezza d'onda minori dei valori 2) e 3) nel campo della luce visibile ( $0.39 \mu\text{m} - 0.77 \mu\text{m}$ ) ; ciò rende possibile la produzione dei LED (light emitting diodes), tipicamente costituiti da cristalli di gallio, arsenico e fosforo uniti nella stessa

soluzione cristallina in proporzioni diverse. Variando la proporzione degli elementi la lunghezza d'onda varia.

I LED sono componenti elettronici largamente usati nella costruzione di apparecchi sia per l'uso domestico che professionale, come indicatori luminosi; hanno dimensioni dell'ordine del centimetro e il colore della luce emessa si estende dal rosso (p. es.  $\lambda=650$  nm) al verde (p. es.  $\lambda=565$ nm). Mediante l'uso di altri semiconduttori composti si ottiene luce blu o violetta.

I gamma emessi dai LED sono incoerenti, cioè l'onda elettromagnetica corrispondente a un gamma è sfasata in modo casuale rispetto alle onde corrispondenti agli altri fotoni.

Un dispositivo simile ai LED che emette luce coerente è il LASER (light amplifier by stimulated emission of radiation) a stato solido. In esso il processo fondamentale di emissione dei fotoni è uguale a quello dei LED, ma tali fotoni vengono generati entro una cavità risonante costituita dal cristallo stesso opportunamente lavorato otticamente.

Tale cavità è analoga al risonatore di Fabry-Perot, che è costituito da due superfici speculari piane e parallele poste a una distanza ben determinata.

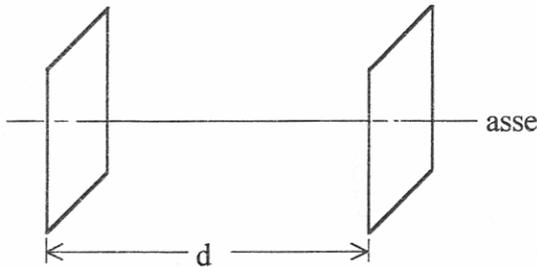


Fig.4: Risonatore di Fabry-Perot : d: distanza fra gli specchi.

Fra gli specchi di Fig. 4 si può instaurare un'onda e. m. stazionaria piana, polarizzata trasversalmente rispetto all'asse del risonatore, che rispetta la condizione consistente nel porre uguale a zero l'ampiezza del campo elettrico in corrispondenza delle superfici riflettenti degli specchi; tale condizione implica che la lunghezza d'onda  $\lambda_r$  di tale onda è data da:

$$\lambda_r = \frac{2 \cdot d}{n} \quad (n \text{ intero positivo}) \quad 4),$$

espressione che rappresenta la condizione di risonanza.

La condizione di azzeramento del campo elettrico in corrispondenza delle superfici rivestite di metallo degli specchi è dovuta al fatto che tale campo si annulla nei conduttori a resistività nulla; naturalmente i metalli reali (Al o Ag) hanno resistività finita, e ciò introduce un minimo errore nella 4).

Le dimensioni trasversali non infinite degli specchi, introducono nella 4) una ulteriore minima approssimazione.

La condizione di risonanza 4) si può anche interpretare osservando che le onde piane di lunghezza d'onda  $\lambda_r$  riflesse dalle superfici avanti e indietro hanno valori di fase relative tali che per interferenza reciproca determinano l'insorgere dell'onda stazionaria.

Nel caso del LASER a semiconduttore il cristallo è limitato rispetto ad un asse rettilineo da due superfici piane e lucide perpendicolari a tale asse. In corrispondenza di tali superfici, a causa della brusca variazione dell'indice di rifrazione, l'onda e.m. che si propaga verso di esse parallelamente all'asse viene parzialmente riflessa all'indietro e parzialmente rifratta in avanti mantenendo la stessa direzione. Le riflessioni multiple che si producono determinano l'insorgere di onde stazionarie le cui condizioni di risonanza sono rappresentate dalla 4), dove però la lunghezza d'onda va calcolata tenendo conto dell'indice di rifrazione del cristallo.

Se dunque si producono nel cristallo fotoni aventi lunghezza d'onda espressa in modo analogo alle 2) e 3) in risonanza con la cavità, in essa si instaura un campo e.m. oscillante stazionario che influenza il processo di ricombinazione radiativa in modo che la fase dei quanti del campo e.m. generati rinforzi coerentemente l'oscillazione stazionaria.

La parte di campo e.m. che viene irradiata verso l'esterno in corrispondenza delle superfici di confine della cavità, proporzionale all'ampiezza del campo interno, lo privano di energia; l'uguaglianza fra l'entità di tale energia persa per unità di tempo, a cui si aggiungono altre perdite, e l'energia fornita dai fotoni per unità di tempo determina l'ampiezza del campo generato.

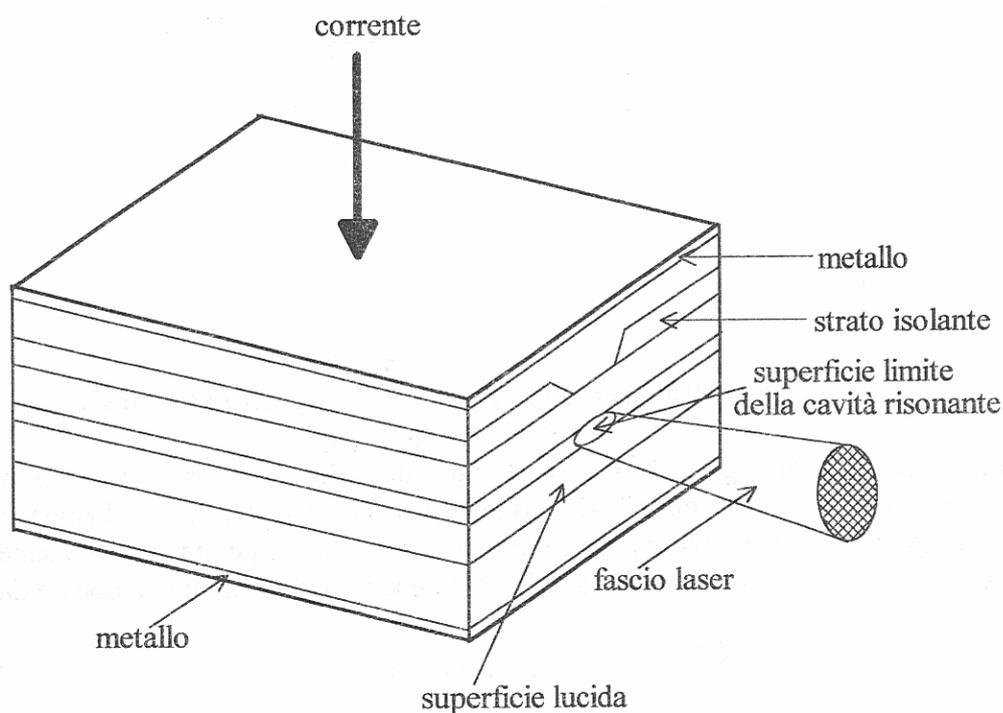


Fig. 5: Laser a doppia eterogiunzione "guidato" mediante confinamento della corrente e variazione dell'indice di rifrazione; i vari strati rappresentano i diversi materiali semiconduttori componenti, nonché strato isolante e contatto metallico.

I LASER a doppia eterogiunzione sono costituiti da due giunzioni in serie costituite da tre strati di semiconduttore di materiali diversi, ottenuti variando le frazioni degli elementi componenti. Ciò consente di concentrare le transizioni radiative nello strato centrale di minimo spessore e di confinare la radiazione luminosa in rapporto all'asse di propagazione della corrente, in tale strato, grazie al diverso indice di rifrazione dei vari materiali.

Le transizioni sono limitate anche rispetto all'asse trasversale alla corrente e alla cavità risonante mediante la riduzione della larghezza della zona che riceve la corrente dai contatti metallici, ottenuta inserendo in serie agli strati semiconduttori uno strato isolante inciso lungo una sottile striscia.

Anche i fotoni possono essere concentrati rispetto allo stesso asse mediante variazione trasversale dell'indice di rifrazione. Si costituisce così una sottile cavità isolante limitata da due superfici piane e lucide nella quale le transizioni radiative avvengono con elevata densità volumetrica e producono una potenza luminosa che compensa gli effetti dissipativi a sufficienza per determinare l'azione laser.

Il fascio luminoso uscente ha una elevata divergenza angolare che può essere ridotta mediante una opportuna lente.

Una caratteristica importante dei LASER a semiconduttore è la possibilità di variare, cioè di modulare, la potenza emessa, facendo variare la corrente che passa attraverso il dispositivo in funzione del tempo, per esempio secondo una funzione sinusoidale o di diverso tipo.

## Fotodiodi.

Un raggio gamma che entra nella massa di un cristallo semiconduttore può provocare il processo inverso della transizione radiativa, cioè interagendo per effetto fotoelettrico con un atomo del cristallo può dar luogo alla formazione di una coppia elettrone-buca.

Perché ciò avvenga il gamma deve avere energia uguale o maggiore dell'ampiezza della banda proibita  $E_g$ .

Il fotodiodo è un dispositivo che utilizza tale processo per consentire la rivelazione di energia luminosa: si tratta di una giunzione p-n che può essere costituita da vari materiali semiconduttori (Si, Ge, semic. composti).

Per comprendere il funzionamento del fotodiodo occorre notare che in una giunzione senza polarizzazione esterna o polarizzata inversamente, le differenze di livelli energetici fra i due semic. (si veda la nota sui semiconduttori), non si manifestano come salti in corrispondenza della superficie di contatto, come a volte si disegna per brevità, ma come variazioni continue in un sottile strato in corrispondenza di tale superficie.

Tali variazioni continue equivalgono ad una corrispondente variazione del potenziale elettrostatico  $V$ , quindi all'apparire di un campo elettrico diverso da zero. (Si ricorda la definizione di potenziale elettrostatico :  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ ).

Se dunque un fascio di raggi gamma crea dei portatori di carica in tale strato, il campo elettrico sposta gli elettroni verso il cristallo n e le buche verso il cristallo p, e si manifesta una corrente esterna.

Le coppie di portatori di carica che nascono al di fuori dello strato suddetto tendono a ricombinarsi entro breve tempo e praticamente non influenzano la corrente esterna, dunque lo spessore dello strato sensibile determina la frazione di gamma utile per la rivelazione.

Un tipo di fotodiodo nel quale lo strato sensibile ha uno spessore maggiore che nel fotodiodo semplice è il fotodiodo PIN. Esso è costituito da tre strati di semiconduttore : uno di semic. p, uno di semic. puro o intrinseco e uno di semic. n.

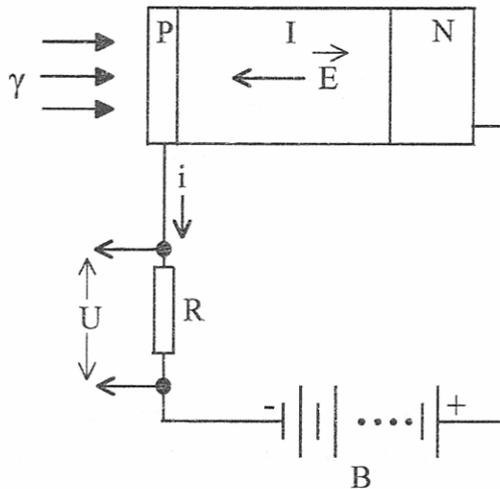


Fig.6: Rappresentazione schematica di un diodo PIN polarizzato inversamente .

Riferendoci alla Fig.6, in un tipico dispositivo, i gamma entrano in esso attraverso lo strato P particolarmente sottile in modo da ridurre al minimo la frazione di gamma assorbiti da esso.

Successivamente entrano nello strato I, dove i portatori di carica generati possono venir trasportati verso gli elettrodi dal campo elettrico  $\vec{E}$ , diverso da zero in tutto lo strato I, la cui presenza produce appunto l'effetto di aumentare lo spessore entro il quale il campo elettrico è diverso da zero. Tale campo è generato, oltre che dalla polarizzazione spontanea, dalla batteria B che polarizza il diodo inversamente con in serie la resistenza R: la corrente  $i$  che per conseguenza si manifesta genera una differenza di potenziale  $U$  ai capi della resistenza R, che costituisce il segnale d'uscita del rivelatore.

Il fascio di raggi gamma è caratterizzato dall'intensità  $y_0$  definita come numero di particelle al secondo che entrano nel diodo. All'interno del diodo ogni particella gamma ha una data probabilità per unità di tempo di interagire con il cristallo secondo vari processi dei quali quello utile, consistente nella creazione di coppie, costituisce la frazione dominante. In conseguenza di ciò il fascio viene attenuato progressivamente in funzione della distanza  $x$  dalla superficie d'ingresso nel PIN con legge esponenziale, che si scrive:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\alpha x} \quad (5),$$

dove  $\alpha$  è un'opportuna costante che dipende dal materiale semiconduttore e dalla lunghezza d'onda della luce.

Dunque se lo spessore dello strato I,  $w$ , è tale da rendere  $e^{-\alpha w} \ll 1$ , tutti i gamma che superano lo strato P vengono assorbiti nello strato I, massimizzando quindi la sensibilità del rivelatore e questa è appunto la caratteristica essenziale del PIN.

### Produzione di un fascio luminoso a divergenza minima.

Consideriamo un fascio di luce di sezione finita, approssimativamente parallelo, cioè scomponibile in raggi che formano con l'asse del fascio un angolo  $\alpha$  la cui misura in radianti sia molto minore di uno o nulla.

Supponiamo che tale fascio incontri una lente convergente con l'asse ottico coincidente con l'asse del fascio.

I raggi inclinati corrispondenti allo stesso  $\alpha$  si possono pensare come provenienti da un punto sorgente a distanza molto grande dalla lente.

Applicando la formula dei punti coniugati:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad 6),$$

dove  $p$  è la distanza dell'oggetto dalla lente,  $q$  è la distanza dell'immagine dalla lente e  $f$  è la distanza focale, si ottiene risolvendo rispetto a  $q$ :

$$q = \frac{fp}{p-f} \quad 7).$$

Se l'oggetto è a distanza infinita:

$$\lim(q)_{p \rightarrow \infty} = f \quad 8).$$

Se  $h_0$  è l'altezza dell'oggetto rispetto all'asse, dato l'ingrandimento  $\frac{q}{p}$ , l'altezza dell'immagine è:

$$h = \frac{q}{p} \cdot h_0 \quad 9).$$

L'angolo  $\alpha$  si scrive:

$$\alpha = \arctan \frac{h_0}{p} \simeq \frac{h_0}{p} \quad 10),$$

poiché si suppone  $h_0 \ll p$ ; quindi sostituendo nella 9) e supponendo che  $p$  tenda all'infinito con  $\alpha$  che rimane costante :

$$\lim(h)_{p \rightarrow \infty} = \lim(\alpha q)_{p \rightarrow \infty} = \alpha f \quad 11).$$

Se dunque  $\alpha$  è l'inclinazione massima dei raggi del fascio, la 11) rappresenta la dimensione dell'immagine prodotta sul piano focale.

L'ottica ondulatoria dimostra che non esistono fasci di luce a sezione finita perfettamente paralleli, cioè non contenenti raggi inclinati.

Consideriamo ora un dispositivo ottico costituito da una sorgente di un fascio quasi parallelo nel senso detto, da una lente convergente a fuoco "corto" e una successiva lente convergente a fuoco maggiore, il tutto disposto sullo stesso asse ottico, come in Fig.7.

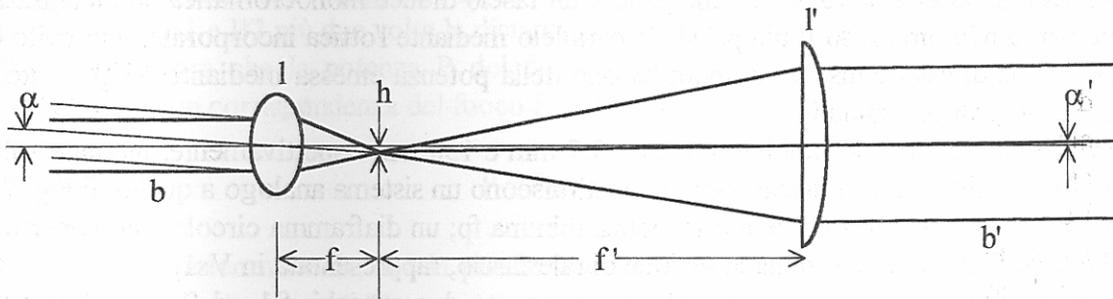


Fig.7.

In tale disposizione  $\alpha$  rappresenta l'angolo massimo che i raggi componenti il fascio  $b$  formano con l'asse ottico;  $h$  è lo scostamento massimo dall'asse ottico dell'immagine del fascio  $b$  in corrispondenza del fuoco della lente  $l$ ; il fuoco della lente  $l'$  viene fatto coincidere con il fuoco della lente  $l$ .

Riconsiderando la formula 6), ponendo  $p=f$  risulta  $\frac{1}{q} = 0$ , cioè  $q$ , distanza dell'immagine dalla lente, tende all'infinito: ciò equivale ad affermare che i raggi che al finito, per  $p>f$ , comporrebbero tale immagine, diventano paralleli.

Applicando tali considerazioni alla Fig.7, risulta che il fascio  $b'$  è costituito di raggi paralleli ed evidentemente  $a' = \arctan \frac{h}{f'} \approx \frac{h}{f'}$  (si suppone  $a' \ll 1$ ), quindi, tenendo conto della 11), con buona approssimazione:

$$a' = a \cdot \frac{f}{f'} \quad (12).$$

Si ottiene dunque una riduzione dell'inclinazione dei raggi tanto maggiore quanto più grande è il rapporto delle lunghezze focali.

### Un'esperienza sulla velocità della luce.

In Fig.8 è rappresentata la disposizione dell'esperienza.

Il laser  $L_s$  è un laser a stato solido che genera un fascio di luce monocromatica con lunghezza d'onda pari a  $670\text{ nm}$ , reso il più possibile parallelo mediante l'ottica incorporata; il circuito di alimentazione di esso consente la modulazione della potenza emessa mediante un generatore esterno di segnali sinusoidali.

Le lenti  $L_{e1}$  e  $L_{e2}$ , aventi lunghezza focale  $5,7\text{ mm}$  e  $150\text{ mm}$  rispettivamente, montate sullo stesso asse rettilineo con il fascio laser  $rl$ , costituiscono un sistema analogo a quello di Fig. 7 e producono un fascio orizzontale a divergenza minima  $fp$ ; un diaframma circolare con apertura del diametro di  $30\text{ mm}$  determina la sezione di tale fascio, rappresentata in  $Vs1$ .

Il fascio  $fp$  incontra il banco ottico  $B1$ , che supporta due specchi,  $S1$  ed  $S2$ ;  $S1$  forma un angolo di  $45^\circ$  con  $fp$  in modo da deflettere una frazione di esso ortogonalmente verso destra, inoltre è montato su supporto mobile regolabile mediante ghiera a vite, che consente di variare detta frazione, mantenendo invariato l'angolo di deflessione. La parte di  $fp$  così deflessa,  $sf1$ , è rappresentata secondo una sezione ortogonale, dal segmento circolare a destra in  $Vs2$ : si noti che la lunghezza dei raggi di  $fp$  e  $sf1$  che si propagano dalla sezione  $Vs1$  alla sezione  $Vs2$  è uguale per tutti tali raggi. La frazione  $sf2$  di  $fp$  non deviata da  $S1$  si propaga rettilinearmente verso il banco ottico  $B2$ ;  $Vs3$  rappresenta la sezione trasversale ortogonale di detta frazione.

$B2$  supporta due specchi,  $S3$  ed  $S4$ , il primo inclinato di  $45^\circ$  rispetto al fascio entrante in  $B2$ , il secondo ortogonale al primo: i due specchi riflettono all'indietro e parallelamente  $sf2$ , spostandolo lateralmente.  $Vs4$  rappresenta una sezione ortogonale del tratto di  $sf2$  riflesso all'indietro; tale tratto collide con lo specchio fisso  $S2$  di  $B1$ , il cui piano riflettente forma un angolo di  $45^\circ$  con il fascio incidente, che viene quindi deviato di  $90^\circ$  a destra. Il segmento circolare a sinistra in  $Vs2$  rappresenta una sezione ortogonale di tale fascio.

I supporti dei banchi  $B1$  e  $B2$  sono piani, rettangolari e disposti orizzontalmente, e i piani riflettenti delle coppie di specchi si intersecano secondo rette ortogonali a detti piani, rette che intersecano i piani in corrispondenza degli assi rettilinei giacenti sui piani, ortogonali ai bordi di  $B1$  e  $B2$  più vicini fra loro e passanti per il punto di mezzo dei bordi: tali assi vengono disposti orizzontali e giacenti sullo stesso piano verticale.

I percorsi dei raggi di  $sf2$ , interni a  $B2$ , cioè che si trovano oltre il piano tangente il bordo di  $B2$  rivolto verso  $B1$  e ortogonale al piano di  $B2$  stesso, sono evidentemente uguali: indichiamo con  $l2$  la lunghezza di tali percorsi.

In  $B1$  occorre considerare i percorsi dei raggi di  $sf2$  che si propagano dal piano tangente la superficie riflettente di  $S1$  al piano limite di  $B1$ , rivolto verso  $B2$ , ortogonale al piano di  $B1$  stesso, a cui si aggiungono i percorsi degli stessi raggi che rientrano in  $B1$ , dopo la doppia riflessione in  $B2$ , fra il limite di  $B1$  suddetto e lo stesso piano tangente la superficie riflettente di  $S1$ : tali percorsi hanno evidentemente uguale lunghezza, che indicheremo con  $l1$ .

In corrispondenza di  $Vs2$  dunque giungono due fasci che a partire dalla sezione  $Vs1$  hanno compiuto percorsi diversi: indicheremo con  $d$  la differenza fra tali percorsi.

Oltre  $Vs2$ , i due fasci si propagano verso la lente convergente  $L_{e3}$  che li focalizza sull'area sensibile del fotodiodo contenuto nel dispositivo di rivelazione  $R_v$ .

Occorre qui ricordare che i raggi paralleli uscenti da una lente convergente a partire da una sorgente puntiforme posta nel fuoco, rispetto a tale fuoco, sono ritardati tutti dello stesso intervallo di tempo in corrispondenza di una sezione piana ortogonale all'asse ottico, almeno entro i limiti di validità della teoria delle lenti sottili per raggi parassiali.

Analogamente quando un fascio di raggi paralleli all'asse ottico viene focalizzato in un punto da una lente convergente, il ritardo di propagazione fra una sezione ortogonale a monte della lente e il fuoco è uguale per tutti i raggi, sempre nell'ambito dell'approssimazione suddetta.

Quindi a partire dal fuoco  $f$  al fotodiodo tutti i raggi hanno un ritardo comune, corrispondente al percorso compreso fra  $f$  ed il piano riflettente di  $S1$  cui si aggiunge il percorso fra tale piano ed  $f$ ; lungo il fascio  $sf2$  si aggiunge a tale ritardo comune il ritardo dovuto ai percorsi entro i banchi ottici  $B1$  e  $B2$  più due volte la distanza fra i banchi  $l$ .

Supponiamo ora che la potenza  $P$  del fascio sia modulata sinusoidalmente, cioè si possa rappresentare in corrispondenza del fuoco  $f$  nel modo seguente:

$$P = P_0 \cdot [1 + \text{sen}(\omega t + \phi_0)] \quad (13),$$

dove  $P_0$  è la potenza media,  $\omega$  è la pulsazione,  $t$  il tempo e  $\phi_0$  un valore angolare opportuno legato alla determinazione dell'istante iniziale  $t=0$ .

Supponiamo poi che lungo  $sf1$  si propaghi metà della potenza  $P$ , e inoltre scegliamo  $\phi_0$  in modo che, a causa del ritardo di propagazione, la potenza  $P_1$  di  $sf1$  in corrispondenza della superficie sensibile del fotodiodo, si possa scrivere:

$$P_1 = \frac{1}{2} P_0 \cdot (1 + \text{sen} \omega t) \quad (14),$$

trascurando l'attenuazione dovuta alla riflessione su  $S1$  e supponendo di aver opportunamente posizionato  $S1$  stesso.

Il ritardo citato è comune ai percorsi delle due parti di fascio descritte, perciò, trascurando l'attenuazione dovuta alle riflessioni lungo  $sf2$ , la potenza  $P_2$  di  $sf2$  in corrispondenza della superficie sensibile del fotodiodo, si scrive:

$$P_2 = \frac{1}{2} P_0 \cdot \left[ 1 + \text{sen} \omega \left( t - \frac{d}{c_a} \right) \right] \quad (15),$$

dove  $c_a$  è la velocità della luce nell'aria e  $d$ , differenza di percorso descritta, si scrive:

$$d = l_1 + l_2 + 2l \quad (16).$$

La potenza totale al fotodiodo risulta dunque:

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2} P_0 \cdot \left[ 2 + \text{sen} \omega t + \text{sen} \omega \left( t - \frac{d}{c_a} \right) \right] \quad (17).$$

Se variando  $\omega$  si impone nella 17):

$$\frac{\omega d}{c_a} = n\pi \quad (\text{con } n \text{ intero dispari}) \quad (18),$$

le funzioni trigonometriche nella 17) sono uguali ed opposte per ogni valore di  $t$ , quindi la 17) diventa:

$$P_1 + P_2 = P_0 \quad (19),$$

cioè scompare la modulazione.

In tali condizioni, dalla 18) si ottiene, per  $n=1$ :

$$c_a = \frac{\omega d}{\pi} = \frac{2d}{T} = 2d \cdot \nu \quad (20),$$

dove  $T$  è il periodo e  $\nu$  la frequenza.

Conoscendo dunque  $d$  e  $v$  la (20) consente di calcolare il valore della velocità della luce nell'aria.

La condizione (18) si ottiene variando la frequenza del segnale che modula la potenza del laser: la condizione  $n=1$  nella (20) corrisponde alla frequenza minima in corrispondenza della quale si azzerava la modulazione nel rivelatore.

La modulazione della potenza può non essere sinusoidale, in dipendenza del particolare circuito di alimentazione e modulazione del laser; in generale sarà quindi periodica con frequenza  $\nu$ , ma conterrà un numero più o meno grande di armoniche.

Ciò implica la sostituzione nella (14) al posto della singola funzione sinusoidale di ampiezza unitaria, di una somma di funzioni sinusoidali del tempo con pulsazione fondamentale e multipla della fondamentale, ciascuna con una sua ampiezza.

Indicando dunque con  $f_m(t)$  una funzione periodica tale che:

$$|f_m(t)| \leq 1 \quad \text{e} \quad f_m(t) = f_m(t + T) \quad (21)$$

sostituendola nella (13) al posto di  $\sin(\omega t)$ , si ottiene:

$$P = P_0 \cdot [1 + f_m(t)] \quad (22).$$

Rappresentando  $f_m(t)$  come somma di armoniche si ottiene:

$$P = P_0 \cdot \left[ 1 + \sum_{k=1}^m a_k \cdot \sin(k\omega t + \phi_k) \right] \quad (23).$$

Ora, se come nella (14) in corrispondenza del rivelatore, indicando con  $\phi'_k$  al posto di  $\phi_k$  le fasi nel rivelatore,  $P_1 = \frac{1}{2}P$ , sempre nel rivelatore  $P_2$  diventa:

$$P_2 = \frac{1}{2}P_0 \cdot \left\{ 1 + \sum_{k=1}^m a_k \cdot \sin \left[ k\omega \left( t - \frac{d}{c_a} \right) + \phi'_k \right] \right\} \quad (24)$$

e, se si avvera la condizione (18), la potenza totale è:

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2}P_0 \cdot \left[ 2 + \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}m} 2a_{(2j)} \cdot \sin(2j\omega t + \phi'_{2j}) \right] \quad (25),$$

dove si è supposto  $m$  pari per semplicità.

La (25) non contiene armoniche dispari, ma è tutt'altro che costante, infatti le armoniche pari vengono massimizzate.

Se il circuito del rivelatore è quello di Fig.6,  $U$  è proporzionale alla (25), e sarà difficile rivelare la condizione cercata (18), cioè l'azzeramento del contributo dell'armonica fondamentale al segnale con un semplice oscilloscopio, in quanto le armoniche pari formano un segnale di ampiezza rilevante e ciò impedisce di utilizzare l'oscilloscopio alla massima sensibilità: è opportuno quindi utilizzare un circuito più complesso.

In Fig. 9 è rappresentato il circuito del rivelatore.

Il fotodiodo  $D_p$  è il trasduttore impiegato; esso è polarizzato dalla batteria di pile  $B$  attraverso la resistenza  $R$ ; il condensatore  $C_d$  ha capacità sufficientemente elevata perché costituisca un buon collegamento di massa del catodo di  $D_p$  per il segnale utile e per eventuali disturbi elettromagnetici ricevuti dai conduttori di collegamento; l'anodo di  $D_p$  è collegato all'anima (o

conduttore interno) di un cavo coassiale che collega il rivelatore  $R_v$  ad un contenitore schermato ulteriore  $I_s$  contenente l'induttanza variabile  $L$ ; la schermatura di  $R_v$  è collegata a quella di  $I_s$  dalla schermatura del tratto di cavo coassiale  $H$ ; l'induttanza  $L$  chiude il circuito di polarizzazione di  $D_p$ .

Il cavo  $H$  si comporta in questo circuito come un condensatore cilindrico flessibile, poiché la lunghezza d'onda nel cavo dei segnali corrispondenti alle armoniche rilevanti sono grandi rispetto alla lunghezza del cavo stesso, che realizza assieme a  $L$  un circuito LC parallelo.

Il fotodiode come generatore di segnale si comporta come un generatore di corrente con in parallelo una piccola capacità e in serie una resistenza trascurabile: tale generatore è in questo circuito in parallelo con il circuito LC per la parte variabile del segnale; si può supporre che  $C$  comprenda la capacità propria del diodo e le ulteriori capacità collegate all'uscita  $U$ .

La corrente generata è proporzionale a  $P_1 + P_2$  secondo una costante  $A$ ; indicando con  $I(t)$  la parte variabile di tale corrente essa si può rappresentare nel modo seguente:

$$I(t) = A \cdot (P_1 + P_2 - P_0) \quad (26).$$

Ricordando il modulo e la fase dell'impedenza del circuito LC:

$$|Z(\omega)| = \frac{R_p}{\left[ Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \phi(\omega) = \arctan Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad (27),$$

dove  $R_p$  indica una resistenza in parallelo che rende conto degli effetti dissipativi presenti,  $\omega_0$  è la frequenza di risonanza e  $Q$  è il fattore di merito, aventi le seguenti espressioni:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = R_p \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (28),$$

possiamo scrivere l'espressione del segnale  $U$ :

$$U = A \cdot \frac{1}{2} P_0 \sum_{k=1}^m a_k \cdot |Z(k\omega)| \left\{ \sin \left[ k\omega \left( t - \frac{d}{c_a} \right) + \phi'_k + \phi(k\omega) \right] + \sin(k\omega t + \phi'_k + \phi(k\omega)) \right\} \quad (29).$$

Nella 29) per  $\omega = \omega_0$  la fondamentale viene moltiplicata per il guadagno massimo, mentre le armoniche vengono moltiplicate per un guadagno tanto minore quanto più grandi sono l'ordine  $k$  e il fattore  $Q$ .

L'uscita  $U$  viene collegata ad un oscilloscopio, che in prossimità del valore di  $\omega$  che soddisfa la 18), a cui viene fatta corrispondere  $\omega_0$  regolando il valore di  $L$ , potrà essere regolato alla massima sensibilità, grazie alla riduzione dell'ampiezza delle armoniche, diventando così un rivelatore molto sensibile della presenza della fondamentale. L'impiego dell'oscilloscopio a sensibilità elevata rende necessaria una buona schermatura dei circuiti che conducono il segnale rispetto a eventuali campi irradiati per insufficiente schermatura dalla parte di apparato che genera la modulazione, campi che introdurrebbero un contributo all'armonica fondamentale del segnale, contributo che genererebbe un errore di misura; possono poi essere presenti campi elettromagnetici di provenienza casuale a loro volta fonte di errore.

Consideriamo ora gli effetti della riflettività finita degli specchi:  $s_{f1}$  viene attenuato da  $S_1$ , mentre  $s_{f2}$  viene attenuato da  $S_3, S_4$  e  $S_2$ .

Essendo le superfici riflettenti tutte di alluminio si può supporre che tutte le riflettività in gioco siano uguali, salvo piccole differenze dovute al diverso invecchiamento delle superfici o a disuniformità casuali.

Il risultato è che  $s_{f2}$  propaga una densità superficiale di potenza minore di  $s_{f1}$ ; di conseguenza, per ottenere che le corrispondenti armoniche dei due segnali generati da P1 e P2 abbiano uguale ampiezza, è necessario rendere disuguali le superfici delle sezioni ortogonali dei due fasci: ciò si ottiene spostando opportunamente S1 mediante la slitta descritta.

La misura di  $c_a$  è dunque basata su una misura di frequenza e una misura di lunghezza; in sede di esecuzione dell'esperienza occorrerà calcolare la propagazione dell'errore dalle due grandezze misurate a  $c_a$ .

Alcune informazioni infine sull'indice di rifrazione dell'aria; per valori di temperatura e pressione pari a 25°C e 760 mmHg, nonché aria secca contenente lo 0.03% di  $CO_2$ , alla lunghezza d'onda di 670 nm :

$$n = 1 + 26673,6 \cdot 10^{-8} \quad 30).$$

Per quanto riguarda la dipendenza di  $n$  dalle variazioni di temperatura e di pressione i valori sono i seguenti:

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial T} \approx \frac{-10^{-6}}{^{\circ}C} \quad \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial p} \approx \frac{1}{3} 10^{-6} \text{ torr}^{-1} \quad 31).$$

La dipendenza di  $n$  dalle variazioni di umidità relativa vale:

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial (\%u.r.)} \approx \frac{10^{-6}}{50\%u.r.} \quad 32).$$

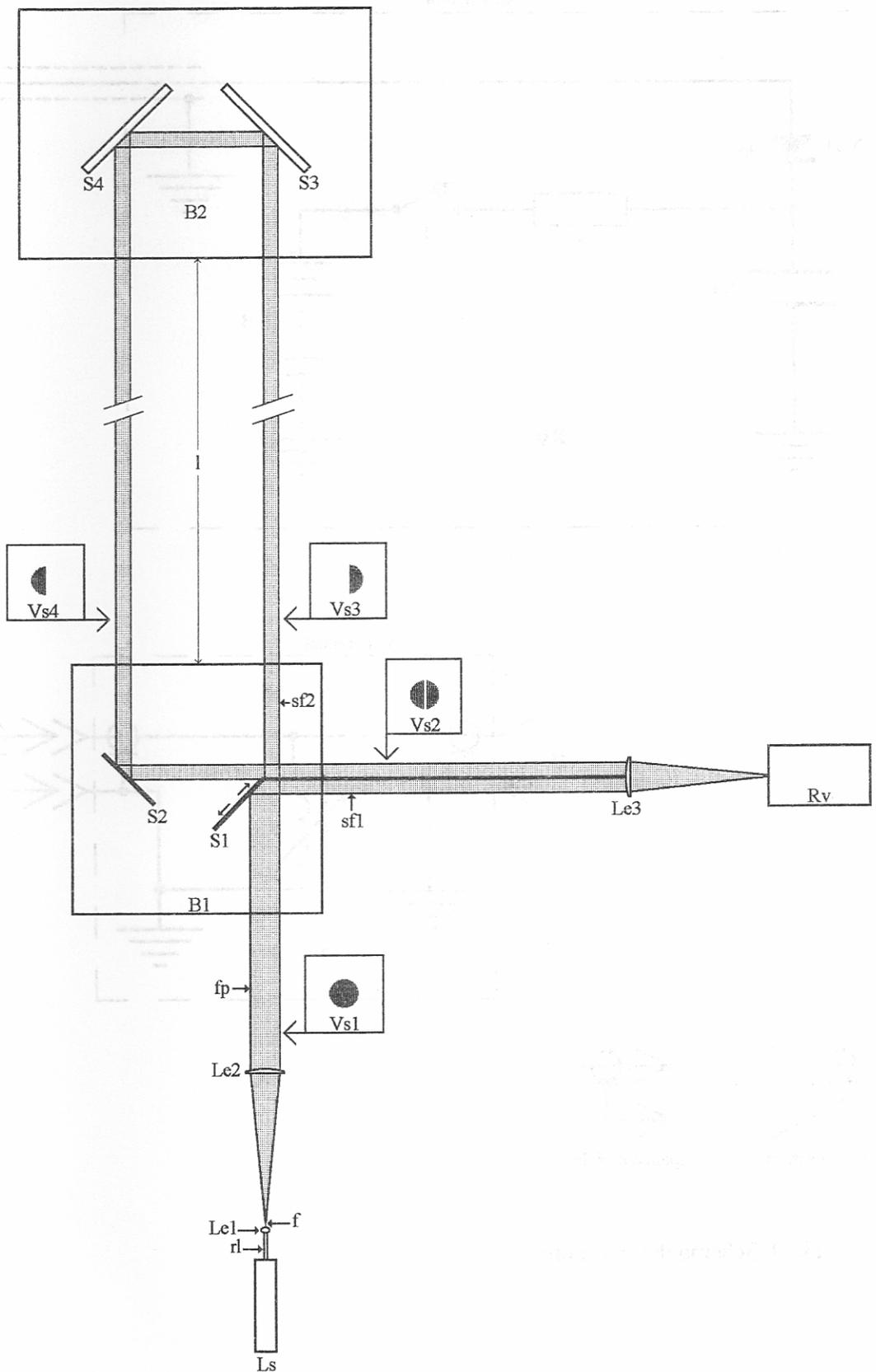


Fig 8: Disposizione dell'esperienza.

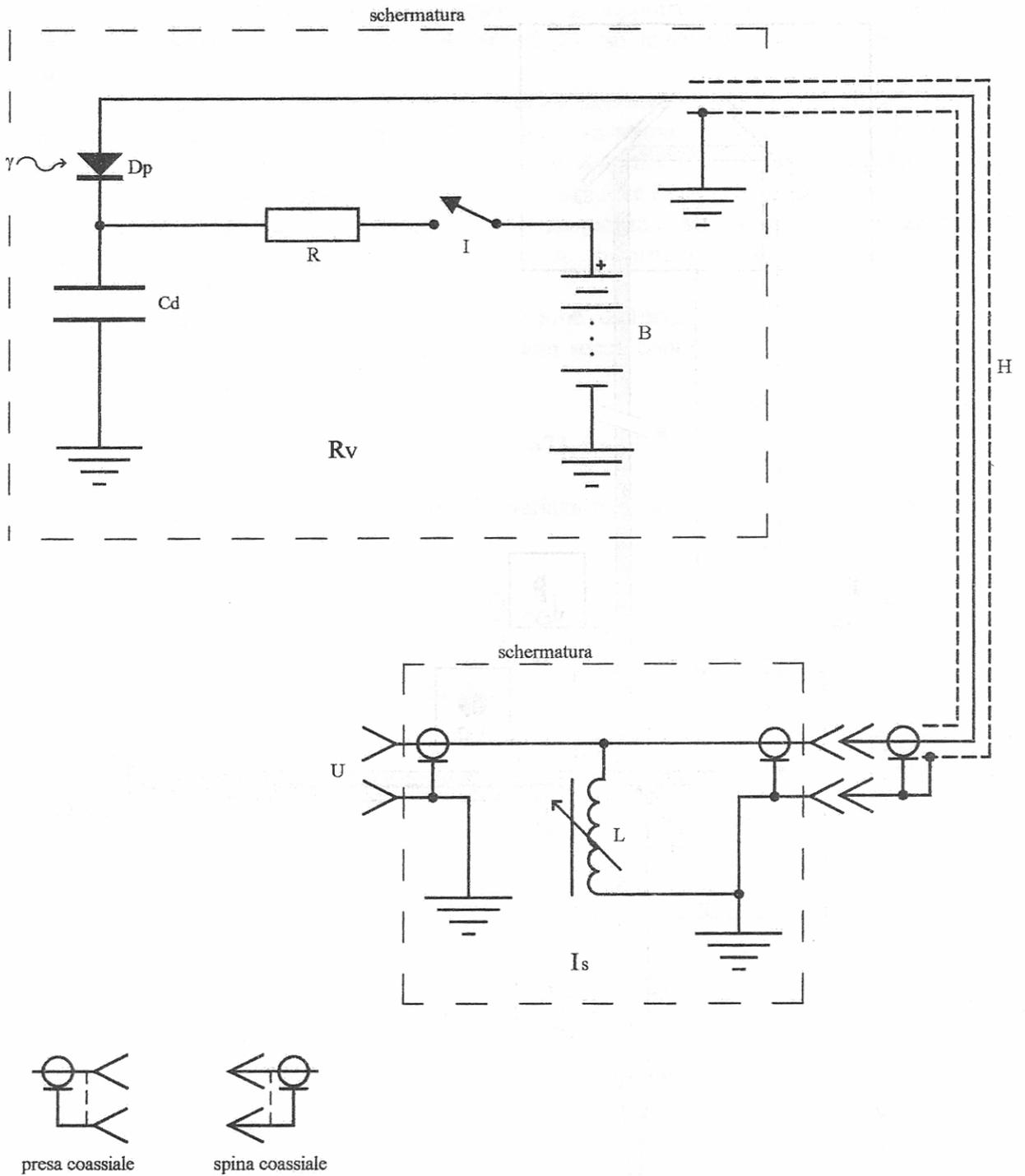


Fig.9: Schema del rivelatore.