Un bigino di relatività speciale

Alberto ROTONDI

Dipartimento di Fisica Via Bassi, 6 - 27100 Pavia ITALY

1 Introduzione

Quando camminiamo su un tapperto mobile in una stazione o in un aeroporto, vediamo che, a parità di passo, andiamo più veloci di chi cammina sul pavimento, perché le velocità v di chi cammina e quella V del tappeto si sommano: $v' = v+V$.

Se andando sul tappeto mobile puntassimo invece una penna laser luminosa e ne misurassimo la velocità, troveremmo c. La persona che ci vedesse sul tappeto mobile puntare un raggio laser, potrebbe idealmente fare la stessa cosa, cioè misurare la velocità del raggio di luce che parte dalla sorgente mobile; che velocità misurerebbe? Non $c' = c+V$, ma sempre ed esattamente c, e questo in qualunque direzione puntassimo il laser. Questo è un fatto sperimentale strabiliante, che però deve venire accettato, in quanto tale. La fisica classica moderna pone infatti questo fatto, inseme a quello della equivalenza dei sistemi inerziali, a fondamento di tutta la cinematica e dinamica:

Postulati della Relatività Speciale:
1) i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti;
tutte le leggi della fisica hanno la stessa forma in un sistema di riferimento inerziale (postulato di Newton)
2) il modulo della velocità della luce è una costante universale, vale c in ogni sistema di riferimento inerziale in ogni direzione ed è indipendente dalla velocità della sorgente (postulato di Einstein).

Come vedremo dalle successive equazioni (5), questi postulati implicano una ulteriore proprietà di c, che va considerata come una velocità limite; in altre parole, vale sempre la relazione cinematica $v \leq c$ per ogni oggetto in movimento, in qualunque sistema.

Mostreremo anche, nel paragrafo 8 a pagina 17, che il secondo postulato di Einstein può essere sostituito da quello più intuitivo della omogeneità e isotropia dello spazio tempo.

L'estensione ai riferimenti non inerziali porterà ad estendere ulteriormente la teoria, dalla relatività speciale alla relatività generale.

Ne segue che, dato che la velocità è il rapporto spazio/tempo, per fare in modo che c resti costante sia lo spazio sia il tempo devono trasformarsi in un modo del tutto nuovo passando da un sistema di riferimento ad un altro.

Le trasformazioni di Lorentz, che riguardano tutti i sistemi inerziali, ci dicono proprio questo, come andiamo a vedere.

Stabiliamo innanzi tutto un primo fatto fondamentale: le lunghezze trasversali alla direzione del moto sono identiche in tutti i sistemi di riferimento, dato che l'operazione di misura di due regoli di lunghezze L e L' è identica e simmetrica nei due sistemi in moto l'uno rispetto all'altro, come mostrato in Fig. 1.

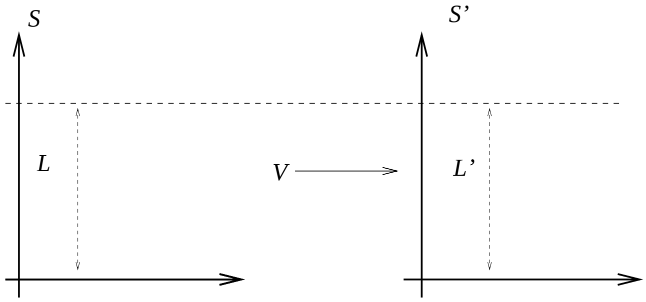

Figure 1: Due lunghezze trasversali al moto L ed L' risultano uguali nei due sistemi S ed S'.

Questo fatto ci permette di trovare subito la legge di trasformazione dei tempi.

2 Trasformazione dei tempi

Con riferimento alla Fig. 2, consideriamo un sistema composto da due specchi distanti L' che riflettono, in andata e ritorno, un raggio di luce indicato dalle frecce. Il sistema è solidale con S', che si muove rispetto al sistema S con velocità V. Il *tempo proprio* $t' \equiv t_p$ di andata e ritorno nel sistema S' è dato da:

$$t_p = \frac{2L'}{c} = \frac{2L}{c} \tag{1}$$

dove l'ultima uguaglianza è possibile perché L è trasversale alla direzione del moto.

Nel sistema S il tempo di andata e ritorno del raggio luminoso è invece, come da Fig. 2, dato da:

$$t = \frac{2d}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + L^2} = \frac{2}{c}\sqrt{\left(\frac{Vt}{2}\right)^2 + L^2} \ , \tag{2}$$

da cui:

$$t^2 = \left(\frac{Vt}{c}\right)^2 + \left(\frac{2L}{c}\right)^2 = \left(\frac{Vt}{c}\right)^2 + t_p^2 \ , \tag{3}$$

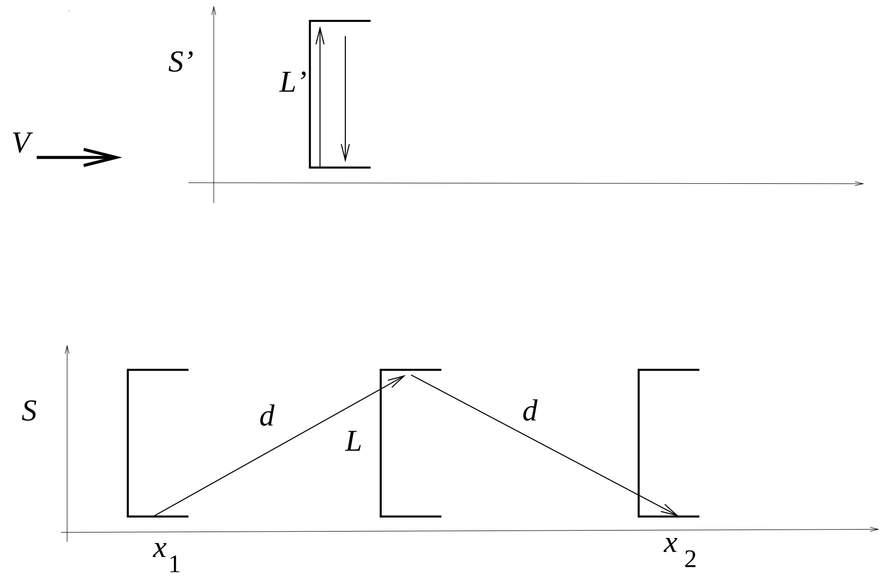

Figure 2: Trasformazione dei tempi tra due sistemi in moto relativo. Il sistema ottico si muove con velocità V nel sistema S, e vale la relazione $x_2 - x_1 = Vt$.

dove l'ultima uguaglianza segue dalla (1).

Ricavando il tempo t misurato nel sistema S dalla relazione precedente, abbiamo:

$$t = \gamma t_p \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \ . \tag{4}$$

Si noti che in tutti questi calcoli la velocità della luce compare sempre col valore c in qualsiasi sistema, in accordo col postulato della Relatività Speciale.

I termini

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \qquad \beta = \frac{v}{c} \tag{5}$$

sono standard nel formalismo relativistico. Si noti che γ diventa imaginario se $v > c$, un fatto che assegna a c il ruolo di velocità limite.

Si ha sempre $\gamma \geq 1$ e $0 \leq \beta \leq 1$

Risulta quindi dalla relazione (4) che $t > t_p$, vale a dire che *il tempo misurato in S per l'andata e ritorno del raggio luminoso nel sistema ottico in quiete rispetto ad S' è maggiore del tempo misurato in S' per lo stesso evento.*

Questo fenomeno, detto *dilatazione dei tempi*, che fa sì che i tempi misurati per gli eventi che avvengono in un sistema in moto siano più lunghi dei *tempi propri* misurati nel sistema dove gli stessi eventi sono in quiete.

Notiamo infine che la situazione di Fig. 2non è simmetrica, perché il dispositivo con gli specchi si trova in S', e chi misura in S' ha bisogno di un solo orologio, mentre l'osservatore in s *deve utilizzare due orologi posti nei punti diversi* x_2 e x_1. Quindi, la dilatazione dei tempi significa che un orologio in moto ritarda rispetto ad un insieme di orologi fissi sincronizzati e va scritta come:

$$t = \gamma t' \equiv \gamma t_p \ , \qquad \Delta x' = 0 \ . \tag{6}$$

Alla stessa conclusione di S arriverebbe un osservatore in S' se il dispositivo fosse solidale con S.

3 Trasformazione delle lunghezze

Consideriamo, come in Fig. 3, il regolo con due specchi di lunghezza propria $L' \equiv L_p$ posto in quiete nel sistema S', che si muove con velocità V rispetto al sistema S. La lunghezza L sia questa volta non trasversale, ma parallela a V. Supponiamo che il raggio di luce venga emesso al tempo $t = 0$ di S ne punto A parallelamente a V. Il tempo di andata e ritorno del raggio di luce in S' vale:

$$t' \equiv t_p = \frac{2L_p}{c} \ . \tag{7}$$

Dato che c è invariante, nel sistema S il raggio di luce si trova nel generico istante t nella posizione:

$$x(t) = x_A(0) + ct \ ,$$

mentre l'estremo B si trova nella posizione:

$$x_B(t) = x_B(0) + Vt \ .$$

Quando il raggio di luce giunge in B nel tempo di andata t_a, si devono eguagliare queste due distanze:

$$x_B(t_a) = x_B(0) + Vt_a = x_A(0) + ct_a \quad \rightarrow \quad ct_a = Vt_a + [x_B(0) - x_A(0)] = Vt_a + L \ . \tag{8}$$

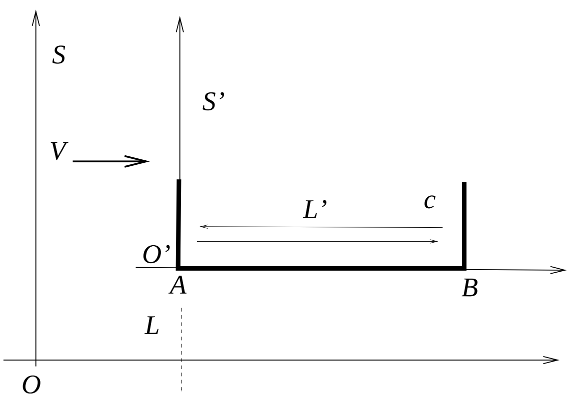

Figure 3: Due lunghezze parallele al moto L ed L' risultano diverse nei due sistemi S ed S'.

Si noti che nell'ultima espressione compare la lunghezza del regolo in S. Il tempo di andata vale quindi:

$$t_a = \frac{L}{c - V}. \tag{9}$$

Per il tempo di ritorno t_r, basta sostituire $-c$ a c nelle equazioni precedenti e si ottiene:

$$t_a = \frac{L}{c + V}. \tag{10}$$

Il tempo totale vale quindi:

$$t = t_a + t_r = \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = 2L\frac{c}{c^2 - V^2} = \frac{2L}{c}\gamma^2 \ . \tag{11}$$

Dalle (4, 7) risulta allora:

$$t = \frac{2L}{c}\gamma^2 = \gamma t_p = \gamma\, \frac{2L_p}{c} \ , \tag{12}$$

da cui la relazione fondamentale:

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = L_p\left(\sqrt{1 - \beta^2}\right) \ , \tag{13}$$

che prende il nome di *contrazione delle lunghezze:* il regolo $L' \equiv L_p$, in moto rispetto ad S, quando viene misurato in questo sistema appare più corto di un fattore $1/\gamma$. Idealmente la misura di L' in S, cioè L, potrebbe essere fatta in un istante fissato, quando il punto A transita nell'origine O di S, confrontando la lunghezza con un regolo in S. Si ha quindi:

$$L = \frac{L'}{\gamma} \equiv \frac{L_p}{\gamma} \qquad \Delta t = 0 \ . \ , \tag{14}$$

Allo stesso riusultato si arriverebbe, scambiando gli indici S ed S', se il regolo mobile fosse in S.

4 Le trasformazioni di Lorentz

Consideriamo ora il sistema S' in moto con velocità $\boldsymbol{V}$ lungo l'asse x del sistema fisso S. Un punto di coordinata x, visto da S' come x', appare in S come un punto di coordinata $x - Vt$. In base alla (14) e considerando il fattore γ della (5) che tiene conto della velocità V tra i due sistemi di riferimento, $\gamma \equiv \gamma(V)$, possiamo allora scrivere:

$$x' = \gamma(x - Vt) \ , \quad x = \gamma(x' + Vt') \ , \tag{15}$$

mentre si ha $y = y'$ e $z = z'$. Eliminando x' da queste due equazioni si trova:

$$t' = \gamma \left[t - x \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{1}{V} \right] = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \tag{16}$$

e analogamente:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \tag{17}$$

Le (15-17), sono le famose trasformazioni di Lorentz, trovate da Lorentz e Fitzgerald nel 1892 prima di Einstein come le trasformazioni necessarie per rendere le leggi dell'elettromagnetismo valide in ogni sistema inerziale. A Lorentz, tuttavia, sfuggì il significato profondo di queste trasformazioni. Per capire in quale sistema vanno applicate, basta guardare le variabili che compaiono nel membro a destra; ad esempio, la prima delle (15) si riferisce alla valutazione di un osservatore in S su ciò che si misura in S', mentre l'altra equazione si riferisce a ciò che deve applicare l'sservatore O' in S' (che vede una velocità $-V$) per valutare le coordinate in S.

Le trasformazioni assumono una forma simmetrica nelle coordinate (ct, x):

$$\begin{cases} ct' = \gamma[(ct) - \beta x] \\ x' = \gamma[x - \beta(ct)] \\ y' = y \\ z' = z \ , \end{cases} \tag{18}$$

dove $\beta = V/c$ e si può passare da x a x' scambiando gli indici primati e V con $-V$ (β con $-\beta$). Le trasformazioni (18) si riducono a quelle di Galileo quando $V \ll c$, ovvero $\beta \ll 1$ e $\gamma \approx 1$.

Dalle (18) si ricava *l'invarante relativistico* fondamentale:

$$\begin{aligned} x'^2 - c^2 t'^2 &= \gamma^2[(x - \beta ct)^2 - (ct - \beta x)^2] \\ &= \gamma^2[(x^2 - c^2 t^2)(1 - \beta^2)] = x^2 - c^2 t^2 \ , \end{aligned} \tag{19}$$

da cui è possibile definire i seguenti invarianti:

$$l^2 = |\boldsymbol{x}|^2 - c^2 t^2 \quad \text{distanza propria,} \tag{20}$$

$$\tau^2 = t^2 - \frac{|\boldsymbol{x}|^2}{c^2} \quad \text{tempo proprio.} \tag{21}$$

Queste quantità, che vengono usate per definire la norma degli eventi nelle spaziotempo, mantengono lo stesso valore numerico in qualunque sistema inerziale.

Il raggio di luce verifica la condizione $\tau = 0$.

Se $\tau > 0$ l'intervallo è detto di genere tempo (*time like*). Vuole dire che, se due eventi che sono separati da un tempo t e avvengono in luoghi separati da una distanza $|\boldsymbol{x}|$ possono essere messi in relazione causale. In un sistema di riferimento dove $Vt = x$ dalla seconda delle (18) risulta $x' = 0$ e i due eventi avvengono nello stesso punto.

Se invece $\tau < 0$ l'intervallo è di genere spazio (*space like*) e gli eventi non possono essere messi in relazione causale, perché ci vorrebbero velocità $\boldsymbol{x}/t > c$. Ad esempio, due eventi che avvengono sul Sole e sulla Terra separati da due minuti sono di genere spazio, perchè occorrono almeno 8 minuti perché un segnale di luce dalla Terra possa raggiungere il Sole e viceversa. Inoltre, dalle (18) si vede che, se $x/t > c$, sarebbe possibile trovare un sistema di riferimento dove $V = c^2t/x < c$, $t' = 0$ e gli eventi sono simultanei, oppure, se $V > c^2t/x$, un sistema dove l'ordine cronologico degli eventi è invertito.

La Eq. (16) sulla trasformazione dei tempi sembra in contraddizione con la (6) sulla dilatazione dei tempi misurati in S per eventi che avvengono in un punto di S'. Tuttavia, dalla Fig. 2 si vede che quando $x = Vt$ la (16) diventa proprio:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}Vt\right) = \gamma t\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{t}{\gamma(V)} \ . \tag{22}$$

Come abbiamo già visto, il tempo t', relativo alla durata di eventi in sistemi in quiete rispetto all'osservatore, prende il nome di *tempo proprio* t_p dell'evento.

Sfruttando le proprietà del formalismo vettoriale, secondo cui se una legge vettoriale è valida in un sistema di riferimento vale in tutti i sistemi, si può cercare di generalizzare la forma delle trasformazioni di Lorentz quando la velocità $\boldsymbol{V}$ ha una direzione arbitraria. La legge generale, come si può facilmete verificare dalle (15-18), è la seguente [2, 6]:

$$\begin{cases} t' = \gamma(V)\left(t - \dfrac{\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{x}}{c^2}\right) \\ \\ \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}_\perp + \gamma(V)\left(\boldsymbol{x}_{||} - \boldsymbol{V}t\right) \ , \end{cases} \tag{23}$$

dove $\boldsymbol{x}_\perp$ e $\boldsymbol{x}_{||}$ sono la componente ortogale e parallela a $\boldsymbol{V}$, rispettivamente. Queste formule assicurano la invarianza delle lunghezze trasversalmente al moto (Fig.1) e la validità delle trasformazioni di Lorentz (18).

Veniamo ora alle trasformazioni della velocità $\boldsymbol{v}$ della particella (da non confondere con la velocità $\boldsymbol{V}$ di S' rispetto a S).

Dalle (15, 16) si ha:

$$\mathrm{d}x' = \gamma(\mathrm{d}x - V\mathrm{d}t) \ , \qquad \mathrm{d}t' = \gamma\left(\mathrm{d}t - \frac{V}{c^2}\mathrm{d}x\right) \tag{24}$$

e quindi:

$$v'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{v_x - V}{1 - \dfrac{v_x V}{c^2}} \ . \tag{25}$$

Questa formula si riduce alla somma galileiana delle velocità per $v \ll c$, mentre si ha sempre $v'_x \le c$ e $v'_x = c$ quando $v_x = c$, in accordo col postulato di relatività.

Vediamo ora la trasformazione delle velocità.

Dalle (24, 18) è facile ottenere anche le leggi di trasformazione per le altre componenti v_y e v_z della velocità. Per comodità riportiamo qui tutte le componenti:

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} \\[2ex] v'_y = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{v_y}{1 - v_x V/c^2} \\[2ex] v'_z = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{v_z}{1 - v_x V/c^2} \end{cases} \tag{26}$$

La componente v_x risente sia della contrazione spaziale sia della dilatazione temporale, le altre due componenti risentono solo della dilatazione temporale. Queste formule vanno utilizzate dall'osservatore O in S. Quelle che deve utilizzare O' in S' si trovano scambiando V con $-V$:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \\[2ex] v_y = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{v'_y}{1 + v'_x V/c^2} \\[2ex] v_z = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{v'_z}{1 + v'_x V/c^2} \end{cases} \tag{27}$$

5 Come evitare i paradossi: il ragionamento di Einstein

Le trasformazioni (18) possono essere ricavate anche con un ragionamento originale, dovuto a Einstein [5], che ha il pregio di usare esplicitamente il postulato di relatività, cioè la equivalenza dei sistemi di riferimento inerziali.

Consideriamo il sistema S' in moto con velocità v rispetto al sistema S. In entrambi i sistemi deve valere, per un raggio di luce, la relazione $x - ct = 0$. Si deve pertanto avere:

$$x' - ct' = \lambda(x - ct) \ , \tag{28}$$

dove λ è un numero reale. Invertendo il verso del raggio luminoso, vale anche:

$$x' + ct' = \mu(x + ct) \ , \tag{29}$$

dove anche in questo caso μ è un numero reale.

Sommando e sottraendo le (28, 29), otteniamo facilmemnte:

$$x' = ax - bct \ , \qquad ct' = act - bx \ , \quad a = \frac{\lambda + \mu}{2} \ , \quad b = \frac{\lambda - \mu}{2} \ . \tag{30}$$

La velocità relativa tra i due sistemi si trova ponendo nella (30) $x' = 0$:

$$ax = bct \ \rightarrow \ \frac{x}{t} = v = \frac{b}{a}c \ . \tag{31}$$

Per trovare il valore delle costanti a e b procediamo come segue. Il valore della lunghezza di un regolo $\Delta x'$ visto dal sistema S si trova misurando in S il regolo ad un tempo fisso, per esempio $t = 0$. Avremo quindi, dalla prima delle (30):

$$\Delta x'_{t=0} = a\Delta x \ , \tag{32}$$

dove Δx è la lunghezza del regolo scelto come riferimento in S.

Poniamo ora $t' = 0$ e misuriamo in S' il regolo in S. Dalla second delle (30) abbiamo:

$$\Delta t = \frac{b}{ac}\Delta x_{t'=0} \ , \tag{33}$$

e inserendo questa equazione nella prima delle (30) e tenendo ancora presente la (31), otteniamo:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= a\Delta x_{t'=0} - bc\frac{b}{ac}\Delta x_{t'=0} = a\left(1 - \frac{b^2c^2}{a^2c^2}\right)\Delta x_{t'=0} \\ &= a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta x_{t'=0} \ . \end{aligned} \tag{34}$$

Ora viene il punto cruciale: dalla (32) e *dal principio di relatività discende*:

$$\Delta x_{t'=0} = a\Delta x' \ , \tag{35}$$

e quindi, dalla (34):

$$a^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \ \rightarrow a = \gamma \ , \tag{36}$$

e poi, dalla (31):

$$b = \frac{av}{c} = \beta\gamma \tag{37}$$

Inserendo le (36, 37) nelle (30), otteniamo immediatamente le trasformazioni di Lorentz (18).

In sostanza, con questo ragionamento Einstein dimostra che le trasformazioni di Lorentz sono le uniche compatibili col la invarianza di c e la equivalenza dei sistemi inerziali.

6 Paradossi e il problema dei due fulmini

Come abbiamo visto, un osservatore in quiete giudica che i tempi, per un osservatore in moto, sono dilatati e le lunghezze contratte. Lo stesso vale scambiando gli osservatori, cosa che a prima vista sembrerebbe intutivamente portare a contaddizioni e paradossi. Tuttavia, è possibile dimostare che, se interpretate correttamente, le trsformazioni di Lorentz non portano ad alcuna contraddizione.

A titolo di esempio, discutiamo il problema dei due fulmini [3], che praticamente contiene in sè tutte le nuove verità delle trasformazioni di Lorentz.

Con riferimento alla situazione di Fig. 4, si consideri un vagone S' che si muove con velocità V lungo l'asse x di un sistema di riferimento S. Ad un tratto due fulmini si abbattono ai due estremi A' e B' del vagone S': i fulmini lasciano sul terreno di S una traccia di bruciato nei punti A e B di S, dove precedentemente sono stati posti due orologi sincronizzati.

Mettiamoci ora nei panni dell'osservatore in S.

Egli constata che i due orologi si sono fermati alla stessa ora e che pertanto i due fulmini si sono abbattuti in A e B nello stesso istante. L'osservatore n S

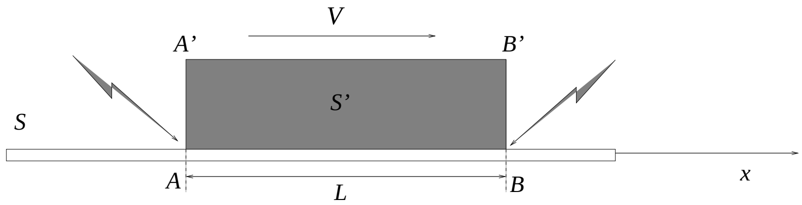

Figure 4: Il problema dei due fulmini visto da S

si chiede ora cosa abbia visto chi sta in S', dove ci sono due orologi sincronizzati posti in A' e B'. Cosa trova questo osservatore (secondo S)? Ebbene, trova che l'orologio in B' si è fermato *prima* dell'orologio in A'. Infatti, dalle trasformazioni di Lorentz (16), dato che qui $t' = t'_B - t'_A$, $t = t_B - t_A$ ed $x = x_B - x_A = L$, possiamo scrivere (ricordate che le quantità a destra definiscono chi sta operando, cioè S):

$$t'_B - t'_A = \gamma \left[t_B - t_A - \frac{V}{c^2}(x_B - x_A) \right] \tag{38}$$

e, dato che in S gli eventi sono simultanei ($t_B = t_A$):

$$t'_B - t'_A = -\frac{V}{c^2} \frac{L}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} < 0 \ , \tag{39}$$

da cui risulta appunto $t'_B < t'_A$ e che, per l'osservatore S', gli eventi in A e B *non sono simultanei*, B precede A, ovvero $t_A > t_B$.

Per inciso, dalle formule precedenti si vede che la simultaneità è conservata solo se $x_A = x_B$, ovvero nelle interazioni per contatto. La conseguenza cruciale è che, in Relatività il concetto di azione a distanza perde di significato e va sostituito dall'azione per contatto ad opera di campi di forza, che si propagano con la velocitá della luce [6].

Mettiamoci ora nei panni di un osservatore in S', che vede le cose come in Fig. 5. Secondo un osservatore in S' il vagone è fermo e il binario scorre

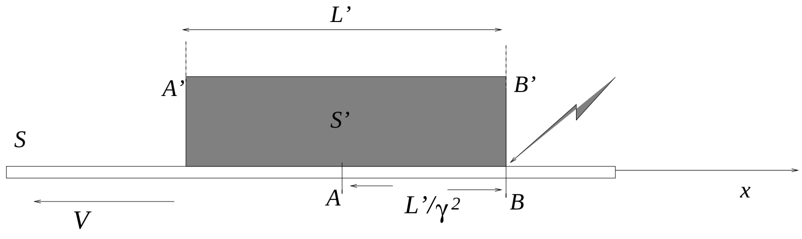

Figure 5: Il problema dei due fulmini visto da S'

in senso opposto, con velocità $-V$. I due punti A e B del terreno dove S ha posizionato i due orologi viaggiano insieme al binario, quindi la loro distanza, che in S vale $L = L'/\gamma$, in S' vale $L/\gamma = L'/\gamma^2$. Questo è il passaggio cruciale che permette di capire il problema. Quando un fulmine si abbatte in sul terreno in B e sull'estremità del vagone in B' al tempo t'_B, il punto A del terreno si trova ad una distanza $L' - L'/\gamma^2 = L'(1 - 1/\gamma^2)$ dall'estremità A' del vagone, come in Fig. 5. Il secondo fulmine cade quando A si trova in A', con un ritardo

$$t'_A - t'_B = \frac{1}{V} L'(1 - 1/\gamma^2) = \frac{1}{V} \frac{L'V^2}{c^2} = \frac{V}{c^2} \frac{L}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \ , \tag{40}$$

in accordo con la (39).

Vediamo quindi che se in un riferimento inerziale due eventi si verificano nello stesso istante in punti A e B separati da una distanza L, in un altro riferimento inerziale che trasla parallelamente ad AB con velocità V i due eventi appaiono separati da un intervallo $\gamma LV/c^2$.

Riepiloghiamo dunque quello che vedono i due osservatori:

S: i due orologi in A e B sono sincronizzati e si arrestano colpiti dal fulmine nello stesso istante. Gli orologi in S' segneranno invece un'ora diversa e non sono sincronizzati. Precisamente, l'orologio A' anticipa sull'orologio B'; dato che la distanza tra i due orologi in S' è L', l'anticipo di A' su B', misurato in S, è $t_{A'} - t_{B'} = \gamma L'V/c^2$. Tuttavia, in S gli orologi di S' hanno un funzionamento rallentato di un fattore $1/\gamma$. Quindi, secondo S, rispetto alle lancette dell'orologio B', le lancette dell'orologio A' indicano un'ora anticipata di $\gamma LV/c^2$;

S': l'orologio B di S è in anticipo sull'orologio A: il fulmine cade prima sull'orologio B, poi, col ritardo della (40), cade su A quando A ha raggiunto il tempo di B. Il ritardo tra i due orologi in S' è proprio il ritardo tra i due eventi che in S si verificano contemporaneamente a distanza L, ed è pari a un tempo $t'_B - t'_A = \gamma LV/c^2$. Gli orologi di S appaiono rallentati di un fattore $1/\gamma$; B anticipa su A di $(t'_B - t'_A)/\gamma = LV/c^2$.

7 La dinamica

Per costruire una dinamica, per prima cosa è necessario verificare che utilizzando la nuova cinematica valga ancora la legge di conservazione della quantità di moto per un sistema isolato non soggetto a forze esterne. Consideriamo quindi il sis-

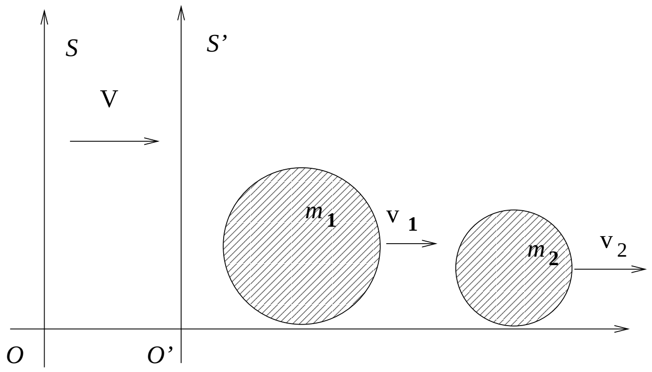

Figure 6: Sistema di test per la conservazione del momento della quantitd̀i moto.

tema di Fig. 6 [1], dove due corpi di masse m_1 e m_2, in moto con velocità v_1 e v_2 rispettivamente nel sistema S, sono visti anche da un altro osservatore O' in un sistema S' in moto lungo l'asse x con velocità V rispetto al sistema S.

Secondo la dinamica Newtoniana ci sono due costanti del sistema, la massa totale

$$M = m_1 + m_2$$

e la quantitá di moto totale nel sistema S:

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 \ , \tag{41}$$

e quella nel sistema S', che in base alla (27), vale:

$$P' = m_1 \frac{v_1 + V}{1 + v_1 V/c^2} + m_2 \frac{v_2 + V}{1 + v_2 V/c^2} \ , \tag{42}$$

La quantità di moto assume valori diversi nei vari riferimenti inerziali, ma mantiene lo stesso valore se si resta nello stesso sistema. Le grandezze M e P rimangono costanti qualunque cosa accada ai corpi all'interno del sistema di riferimento, se non ci sono forze esterne. Per esempio, i corpi possono urtarsi e andare in vari pezzi, ma la massa totale M resterà costante.

Notiamo ora che la (42) può essere scritta come:

$$P = V\left(\frac{m_1}{1+v_1V/c^2}+\frac{m_2}{1+v_2V/c^2}\right)+\left(\frac{m_1v_1}{1+v_1V/c^2}+\frac{m_2v_2}{1+v_2V/c^2}\right) . \tag{43}$$

e che, pur essendo il valore della velocità V costante, le grandezze m_1, m_2, v_1 e v_2 possono variare in qualunque modo, se prese singolarmente. Ne deduciamo che, nel sistema S', la quantità di moto P *non si conserva*. Dobbiamo quindi trovare una nuova espressione per la quantità di moto p che obbedisca alle leggi di conservazione della meccanica.

La soluzione, come verifichiamo subito, sta nel definire la *massa relativistica* (un concetto provvisorio, di cui ci libereremo) $m(v)$ e la massa m o massa intrinseca o *massa a riposo (rest mass)* della particella come:

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \text{(provvisoriamente!)} , \tag{44}$$

e quindi definire la quantità di moto di una particella come:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} , \tag{45}$$

Con questa definizione della massa è possibile dimostrare che, se per un particolare osservatore massa relativistica e quantità di moto rimangono costanti, lo stesso vale in tutti gli altri sistemi inerziali.

Ridefiniamo ora il problema di Fig. 6 con le nuove definizioni (44, 45). In S la massa totale vale:

$$M = \frac{m_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}+\frac{m_2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} , \tag{46}$$

mentre la quantità di moto vale:

$$P = \frac{m_1v_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}}+\frac{m_2v_2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} . \tag{47}$$

In S' la massa totale vale invece, sempre in base alle (27):

$$M' = \frac{m_1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{v_1+V}{1+v_1V/c^2}\right)^2}}+\frac{m_2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{v_2+V}{1+v_2V/c^2}\right)^2}} , \tag{48}$$

Dato che vale l'identità:

$$1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{v+V}{1+vV/c^2}\right)^2 = \frac{(1-v^2/c^2)(1-V^2/c^2)}{(1+vV/c^2)^2} \tag{49}$$

possiamo scrivere, con facili passaggi algebrici e in base alla (46):

$$
\begin{aligned}
M' &= \frac{m_1(1+v_1V/c^2)}{\sqrt{(1-v_1^2/c^2)(1-V^2/c^2)}} + \frac{m_2(1+v_2V/c^2)}{\sqrt{(1-v_2^2/c^2)(1-V^2/c^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left[\frac{m_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}} + \frac{V}{c^2}\left(\frac{m_1v_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + \frac{m_2v_2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}(M + \frac{PV}{c^2}) \ . \qquad (50)
\end{aligned}
$$

Questa relazione, anche se un po' elaborata, è di importanza fondamentale, perché mostra come la massa relativistica totale, dipendendo dalle costanti (P, M, V, c), rimane costante anche nel sistema S'.

Vediamo ora se resta costante il momento P' in S'. Dato che vale l'identità:

$$
\frac{m(1+vV/c^2)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-V^2/c^2)}}\frac{(v+V)}{1+vV/c^2} = \frac{m(v+V)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-V^2/c^2)}} \ , \qquad (51)
$$

nel sistema S', in base alla (50), possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
P' &= \frac{m_1(v_1+V)}{\sqrt{(1-v_1^2/c^2)(1-V^2/c^2)}} + \frac{m_2(v_2+V)}{\sqrt{(1-v_2^2/c^2)(1-V^2/c^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left[V\left(\frac{m_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}\right) + \left(\frac{m_1v_1}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}} + \frac{m_2v_2}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}(MV + P) \ . \qquad (52)
\end{aligned}
$$

Anche questa relazione mostra che P' resta costante nel sistema S'. Si può mostrare anche, considerando gli urti in generale, che questa proprietà, se si adotta la definizione (45), vale sempre.

Concentriamoci ora sulla conservazione della massa relativistica (44). Applicando lo sviluppo in serie al primo ordine per $x \ll 1$:

$$
\frac{1}{\sqrt{1-x}} \simeq 1 + \frac{1}{2}x
$$

possiamo scrivere, per $v \ll c$:

$$
\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \simeq m + \frac{1}{2}m\frac{v^2}{c^2} \ . \qquad (53)
$$

Questo limite non relativistico, e il fatto che mc^2 è una grandezza con le dimensioni di una energia, portano a definire come energia relativistica che si conserva nei sistemi isolati la quantità:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \ , \tag{54}$$

che ha come limite non relativistico:

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \ , \tag{55}$$

in accordo con la dinamica Newtoniana, a parte il nuovo fattore $E_0 = mc^2$ che rappresenta la energia di una massa a riposo nel sistema di riferimento.

Abbiamo quindi ottenuto un risultato fondamentale:

la conservazione della massa relativistica in un sistema fissato,
non è altro che la conservazione dell'energia!

Quindi, per affrontare la dinamica in modo coerente, conviene, d'ora in poi definire un solo tipo di massa, la massa a riposo, che chiameremo semplicemente massa e che è un invariante relativistico, mentre momento ed energia sono dati dalle (45, 54). Non parleremo quindi più di massa relativistca.

Mentre nella meccanica Newtoniana la conservazione dell'energia implica le definizione di tutte le trasformazioni possibili, nella dinamica relativistica, basta considerare la massa. Pertanto, la energia cinetica viene definita come:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = m(\gamma - 1)c^2 \ . \tag{56}$$

Di fondamentale importanza è inoltre la quantità:

$$P^2 \equiv E^2 - |\boldsymbol{p}|^2c^2 = m^2\gamma^2c^4 - m^2\gamma^2v^2c^2 = m^2c^4\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = (mc^2)^2 \ , \tag{57}$$

che, essendo funzione del prodotto di due grandezze invarianti, la massa m e la velocità c, *mantiene lo stesso valore numerico in ogni sistema di riferimento inerziale*. Grandezze con questa proprietà, come già abbiamo visto nelle (20, 21), si chiamano *invarianti relativistici*.

Una particella che non è in movimento, ha quindi una energia totale pari a $E_0 = mc^2$: secondo questa formula, che è l'icona e il risultato più importante della teoria della Relatività Speciale, il bilancio energetico di una sistema va considerato in modo molto diverso da quello cui la meccanica Newtoniana ci ha abituati.

Infatti, d'ora in poi la massa dei corpi entrerà sempre nel bilancio energetico dei sistemi, andando a sostituire il bilancio, proprio della dinamica Newtoniana, fatto includendo forme energetiche diverse dalla energia cinetica.

A scopo illustrativo, consideriamo una collisione completamente anelastica tra due particelle di massa m_1 e m_2 che si incollano in una particella di massa M. Secondo la meccanica Newtoniana l'energia meccanica non si conserva, perché dopo l'urto anelastico l'energia meccanica iniziale $m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$ viene dissipata nell'energia termica interna delle particelle, mentre l'energia meccanica finale si annulla. Secondo la Relatività l'energia relativistica si conserva e si si ha invece:

$$m_1 \gamma(v_1) \boldsymbol{v}_1 + m_2 \gamma(v_2) \boldsymbol{v}_2 = 0 \ , \tag{58}$$

$$\gamma(v_1) m_1 c^2 + \gamma(v_2) m_2 c^2 = M c^2 \ . \tag{59}$$

Utilizzando la (56) possiamo scrivere:

$$T_1 + m_1 c^2 + T_2 + m_2 c^2 = M c^2 \ , \tag{60}$$

da cui si vede che l'energia cinetica dell'urto si è trasformata in un incremento di massa:

$$M > m_1 + m_2 \ .$$

Vediamo ora qualche esempio (si noti che le differenze di massa sono spesso, ma non sempre, così piccole da poter essere in molti casi trascurate):

- un corpo aumenta di massa se viene riscaldato perché aumenta la energia cinetica interna delle sue componenti, quindi il contenuto globale di energia;

- un sistema legato, come un atomo o un nucleo atomico, pesa meno delle sue componenti libere sommate separatamente, perchè lo stato legato include una energia potenziale interna negativa, detta energia di legame. Ad esempio, nell'atomo di idrogeno il difetto di massa vale, con ovvio significato dei simboli:

  $$\frac{m_p + m_e - M_H}{m_p + m_e} = 10^{-8} \ ;$$

  per il deuterio, che è lo stato legato protone-neutrone, questa frazione vale circa $1.13\,10^{-3}$. Il Sole trasforma in energia radiante circa 4 milioni di tonnellate di massa/s [6], corrispondenti a un parallepido di acqua di 1 km^2 di base e alto 4 metri;

- una particella A che si disintegra spontaneamente, come in un decadimento nucleare spontaneo in più particelle $P_1, P_2, \ldots, P_i$, pesa più della somma delle masse dei suoi prodotti di decadimento. La differenza è data dalla energia cinetica dei prodotti di decadimento. Si noti che la massa varia, ma l'energia si conserva sempre:

  $$m_A c^2 = \sum_i \gamma_i m_i c^2 \ ;$$

- una molla compressa o allungata pesa più di una molla a riposo perché include anche il contributo della energia potenziale positiva;

- una pila carica pesa più di una pila scarica perchè contiene energia elettrostatica positiva;

- la massa M di un gas perfetto, dove si trascura l'energia potenziale di interazione tra le molecole, pesa più della somma delle masse delle sue molecole:
$$Mc^2 = \sum_i \gamma_i m_i c^2 > \sum_i m_i c^2 \ .$$

8 Il postulato di Einstein

In questo paragrafo mostriamo un aspetto poco trattato, ma di fondamentale importanza per capire il postulato di Einstein. In sostanza si mostra che, assumendo il principio di inerzia di Newton, al postulato sulla costanza di c si può sostituire il postulato sulla omogeneità e isotropia dello spazio-tempo. Questo principio, essendo comune a molti altri campi della Fisica, appare per questo più plausibile ed intuitivo. Omogeneità dello spazio significa che, a parità di tutte le altre condizioni, i risultati di un esperimento devono essere gli stessi spostando l'apparato da un punto x_1 ad un altro punto x_2. Isotropia significa che il risultato sarà lo stesso anche ruotando l'apparato di qualsisi angolo. Come conseguenza, i risultati dovranno essere gli stessi anche invertendo il verso degli assi spaziali. Infine, omogeneità del tempo significa che, a parità di tutte le altre condizioni, i risultati di un esperimento non cambieranno se l'esperimento viene ripetuto ad un tempo diverso. La Fisica Classica assume anche l'invarianza per inversione dell'asse temporale. Questi postulati sono generalmente accettati, stanno alla base della riproducibilità dei risultati scientifici, principio alla base di tutta la scienza moderna, ed assicurano i principi di conservazione dell'energia, della quantità di moto e del momento angolare nei sistemi isolati.

Le considerazioni che seguono sono tratte da [7].

Consideriamo una trasformazione $L(V)$ tra due sistemi inerziali, con velocità relativa di modulo $|\boldsymbol{V}| = V$. Senza perdere di generalità, possiamo considerare solo le coordinate (t, x):

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = L(V) \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{61}$$

In generale le quantità a, b, c, d possono essere funzioni di V. Per l'origine di S' si deve avere:

$$\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ Vt \end{pmatrix} \ , \tag{62}$$

da cui otteniamo la prima relazione tra gli elementi di $L(V)$:

$$ct + tVd = 0 \quad \rightarrow \quad c = -Vd \ . \tag{63}$$

Per l'omogeneità e isotropia dello spazio-tempo deve valere $L(-V) = L^{-1}(V)$ e quindi:

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = L^{-1}(V) \begin{pmatrix} t' \\ -Vt' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ Vd & a \end{pmatrix}}{\det[L(V]} \begin{pmatrix} t' \\ -Vt' \end{pmatrix} \ . \tag{64}$$

Analogamente a quanto visto sulla matrice $L(V)$, possiamo scrivere:

$$Vdt' - aVt' = 0 \quad \rightarrow \quad a = d \ , \tag{65}$$

Abbiamo quindi, fino a questo momento:

$$L(V) = \begin{pmatrix} a(V) & b(V) \\ -Va(V) & a(V) \end{pmatrix} \tag{66}$$

Imponendo che $\det L \neq 0$ otteniamo:

$$a^2 + Vab \neq 0 \quad \rightarrow \quad a \equiv a(V) \neq 0 \ . \tag{67}$$

Se $V = 0$, $L(0)$ deve essere la matrice identità, quindi $b(0) = 0$. Introducendo una funzione incognita $\epsilon(V)$ siamo liberi di scrivere:

$$b(V) = -Va(V)\epsilon(V) \ , \tag{68}$$

e mettere la matrice $L(V)$ nella seguente forma:

$$L(V) = a(V) \begin{pmatrix} 1 & -V\epsilon(V) \\ -V & 1 \end{pmatrix} \tag{69}$$

Ora viene il passaggio cruciale: consideriamo un terzo sistema S'', con velocità V_1 in S'. Che velocità V_2 avrà in S? Per le proprietà delle trasformazioni lineari, la risposta sta nel prodotto matriciale

$$\begin{aligned} L(V_2) = L(V)L(V_1) &= a(V) \begin{pmatrix} 1 & -V\epsilon(V) \\ -V & 1 \end{pmatrix} a(V_1) \begin{pmatrix} 1 & -V_1\epsilon(V_1) \\ -V_1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a(V)a(V_1) \begin{pmatrix} 1 + VV_1\epsilon(V) & -V_1\epsilon(V_1) - V\epsilon(V) \\ -V - V_1 & 1 + VV_1\epsilon(V_1) \end{pmatrix} \\ &= a(V_2) \begin{pmatrix} 1 & -V_2\epsilon(V_2) \\ -V_2 & 1 \end{pmatrix} \ , \end{aligned} \tag{70}$$

dove l'ultima relazione segue dalla (69) ed alla equivalenza tra i sistemi inerziali S, S' ed S, S''. Il risultato fondamentale che si vede da questa equazione è che la funzione $\epsilon(V)$ *deve essere costante* ($\epsilon(V) = \epsilon(V_1)$), altrimenti non sarebbe possibile dare la corretta struttura diagonale alla matrice $L(V_2)$, violando il principio di equivalenza. Mostreremo tra breve che si ha $\epsilon = 1/c^2$. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} L(V_2) = L(V)L(V_1) &= a(V)a(V_1) \begin{pmatrix} 1 + VV_1\epsilon & -(V_1 + V)\epsilon \\ -V - V_1 & 1 + VV_1\epsilon \end{pmatrix} \\ &= a(V_2) \begin{pmatrix} 1 & -V_2\epsilon \\ -V_2 & 1 \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{71}$$

e arriviamo in definitiva alla seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} L(V)L(V_1) &= a(V)a(V_1)(1 + VV_1\epsilon) \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{(V + V_1)}{(1 + VV_1\epsilon)}\epsilon \\ -\dfrac{(V + V_1)}{(1 + VV_1\epsilon)} & 1 \end{pmatrix} \\ &= a(V_2) \begin{pmatrix} 1 & -V_2\epsilon \\ -V_2 & 1 \end{pmatrix} = L(V_2) , \end{aligned} \tag{72}$$

da cui si ottiene la corrispondenza:

$$V_2 = \frac{V + V_1}{1 + VV_1\epsilon} . \tag{73}$$

La velocità V_2 non è quindi semplicemente la somma di V e V_1, in accordo con le (27).

Confrontando gli elementi $(1, 1)$ nella (72) otteniamo poi:

$$a(V)a(V_1)(1 + VV_1\epsilon) = a(V_2) . \tag{74}$$

Quando $V_1 = -V$ dalla (73) risulta che in questo caso $V_2 = 0$. Allora dobbiamo avere, dato che $L(V_2) = L(0)$ deve essere la matrice identità:

$$a(V)a(-V)((1 - V^2\epsilon) = a(0) = 1 . \tag{75}$$

Consideriamo ora la trasformazione P che inverte il verso dell'asse x, cambiando x in $-x$ e V in $-V$:

$$P \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -x \end{pmatrix} .$$

Dato che $P = P^{-1}$ e la applicazione ad un generico vettore $L\boldsymbol{r}$ può essere scritta come $PL\boldsymbol{r} = (PLP^{-1})P\boldsymbol{r}$ definendo un nuovo operatore PLP^{-1} sui vettori trasformati, possiamo scrivere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} a(V) \begin{pmatrix} 1 & -V\epsilon \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = a(V) \begin{pmatrix} 1 & V\epsilon \\ V & 1 \end{pmatrix} \tag{76}$$

Confrontando questa relazione con la (69), deve essere $a(V) = a(-V)$, per cui dalla (75) otteniamo:

$$a(V) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - V^2\epsilon}} \quad \to \quad \frac{1}{\sqrt{1 - V^2\epsilon}} \ , \tag{77}$$

dove il segno negativo è escluso dalla condizione $a(0) = 1$.

Ponendo la costante $\epsilon = 1/c^2$, cosa corretta anche dimensionalmente, otteniamo finalmente $a(V) = \gamma(V)$ e la matrice di trasformazione

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -V/c^2 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{78}$$

che porta alle trasformazioni di Lorentz (18).

Il passaggio fondamentale di questa trattazione sta nella relazione $\epsilon = 1/c^2$, che deriva direttamente dal principio di inerzia di Newton. La semplice trattazione svolta qui mostra come questo principio contenga in sè la necessità dell'esistenza di una costante universale con le dimensioni di una velocità.

References

[1] Clement V Durrell, *La Relatività con le quattro operazioni*, Boringhieri editore (1966);

[2] S. Focardi, I. Massa, A. Uguzzoni, M. Villa, *Fisica Generale, Meccanica e Termodinamica*, II edzione, Casa Editrice Ambrosiana (2014);

[3] Giovanni Tonzig, *Semplicemente Fisica*, Maggioli Editore (2013);

[4] Elio Fabri, *Insegnare Relatività nel 21-mo Secolo*, (2015) http://www.df.unipi.it/ fabri/sagredo/Q16;

[5] Albert Einstein, *Relatività, esposizione divulgativa*, Boringhieri editore, (2011)

[6] Riccardo D'Auria, Mario Trigiante, *From Special Relativity to Feynman Diagrams*, Springer, seconda edizione (2015)

[7] Wikibooks, *Special Relativity: Mathematical Transformations*, https://en.wikibooks.org/wiki/Special_Relativity/Mathematical_transformations (2015).