Corso di Misure Fisiche II

0.1 Temi d'esame del 25 luglio 2005

1) Siano X_1, X_2, X_3 variabili gaussiane $N(0,1)$ indipendenti.
   a) Determinare media e varianza di

$$U = 2X_1 - X_2 - X_3 \ , \quad \text{e} \quad V = X_1 - 3X_2 + 2X_3$$

   c) Che tipo di distribuzione seguono U e V?
   b) Verifcare se U e V sono indipenenti.

2) Se in 12 ore si sono registrati 100 eventi, qual'è la probabilità che in $[t_1, t_2] = 6$ ore si trovi un numero di eventi compreso tra 40 e 60?

3) Un esperimento misura 104 eventi i tipo A e 189 eventi di tipo B in un campione di 1500 reazioni.
   a) Trovare l'intervallo di stima del rapporto A/B con un livello di confidenza CL=95%.
   b) verificare l'ipotesi che le reazioni A e B abbiano la stessa probabilità.

4) Dato il campione

x	0	1	2	3
f_i	120	55	23	2

   verificare al livello $\alpha = 0.05$ se la popolazione di provenienza del campione ha distribuzione di Poisson.

5) Il fondo atteso di un esperimento di conteggio (misurato accuratamente in fase di calibrazione) è di 10 conteggi/s. In una prova (fondo più eventuale segnale) si registrano in un secondo 25 conteggi. Utilizzando l'approssimazione gaussiana, trovare il limite superiore dei conteggi per il solo segnale con $CL = 95\%$.

0.2 Soluzioni

1) a)$\langle U \rangle = 0$, $\sigma[U] = \sqrt{6}$, $\langle V \rangle = 0$, $\sigma[U] = \sqrt{14}$,
b) Sono variabili gaussiane
c) Le variabili sono correlate perchè $\mathrm{Cov}[U, V] = 3$ e quindi sono dipendenti.

2) Il problema ammette una duplice soluzione, per n fisso e per n variabile (è accettata almeno una delle due soluzioni).
a) $n = 100$ fissato oppure campione già ottenuto.
Poichè $np = 50$ con $n = 100$, segue $p = 1/2$. La distribuzione degli eventi è binomiale/gaussiana con $\mu = np = 50$ e $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 5$, per cui $P\{40 < X < 60\} = p\{\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\} = 0.954$.

b) n variabile oppure campione da ottenere.
La distribuzione degli eventi è poissoniana/gaussiana con $\mu = np = 50$ e $\sigma = \sqrt{np} = 7.1$, per cui $P\{40 < X < 60\} = p\{\mu - 1.41\sigma < X < \mu + 1.41\sigma\} = 0.84$.

3) $A/B = 0.55 \pm 1.96 \times 0.06$, quindi $A/B \in [0.42, 0.67]$ applicando la propagazione degli errori.
$t = |189 - 104|/\sqrt{9.84^2 + 12.8^2} = 5.26$, i dati differscono di più di 5 deviazioni standard, e le reazioni sono pertanto incompatibili.

4) Completando la tabella coi valori attesi si ottiene:

x	0	1	2	3
f_i	120	55	23	2
μ_i	117	63	17	3

Si ha

$$\chi^2 = (120 - 117)^2/117 + (55 - 63)^2/63 + (20 - 25)^2/20 = 2.3$$

con due gradi di libertà. I dati sono in accordo col modello.

5) Il limite superiore con $CL = 95\%$ è dato dalla equazione $25 + 1.65\sqrt{\mu} = \mu$, da cui $\mu = 34.7 \simeq 35$. Il limite per il segnale vale perciò $35 - 10 = 25$ conteggi/s. Nota: è importante sottrarre il fondo *dopo* i calcoli.