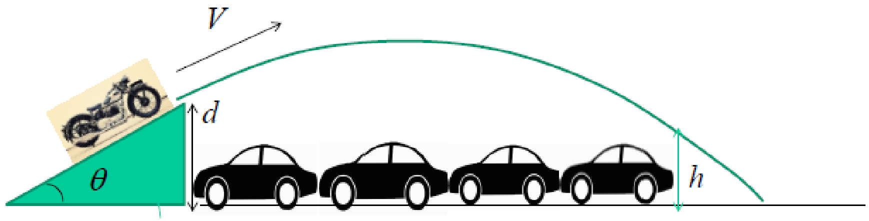
Meccanica 19 Aprile 2017

Problema 1 (1 punto)

Una moto salta una fila di automobili di altezza h= 1.5 m e lunghezza l=3m ciascuna. La moto percorre una rampa che forma con l'orizzontale un angolo θ= 30° e lascia la rampa ad una altezza d=2.5 m e una velocità V= 100 km/h, compiendo una traiettoria sotto l'azione della forza peso. Determinare, trascurando l'attrito dell'aria, quante automobili la moto riesce a saltare.



Soluzione

Le due equazioni orarie in x e y sono:

$$y = d + V\sin\theta\, t - \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$x = V\cos\theta\ t\ ,$$

dove V= 27.8 m/s.

Ponendo $y = h$ e risolvendo la prima equazione di secondo grado rispetto al tempo, ponendo $V_y = V\sin\theta = 13.9$ m/s, si ottiene

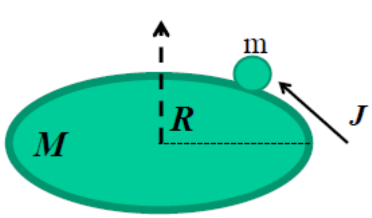
$$t = \frac{2V_y + \sqrt{4V_y^2 + 8g(d-h)}}{2g} = 2.9 \text{ s}$$

La distanza percorsa vale: $x = V\cos\theta\ 2.9 = 69.8$ m, per cui

69.8/3 = 23.2 = 23 automobili

Problema 2 (2 punti) :

Un punto materiale di massa m = 200 g è vincolato a ruotare sul bordo si un disco omogeneo di raggio R=0.3 m e massa M = 2 kg. Il disco è vincolato a ruotare su un piano orizzontale mediante un vincolo liscio posto nel suo centro. Fra il punto materiale e il disco esiste una forza di attrito. Quando il disco e il punto materiale sono fermi, il punto materiale viene messo in movimento tramite un impulso J=3 Ns in direzione perpendicolare al raggio. Calcolare: a) la velocità angolare ω del sistema all'istante t_1, quando il punto smette di strisciare sul disco, b) il lavoro W fatto dalla forza di attrito. (*Momento di inerzia del disco rispetto all'asse centrale*: $I = mR^2/2$



Soluzione

La velocità iniziale vale $V = J/m = 3/0.2 = 15$ m/s. Si conserva il momento angolare rispetto al polo individuato dall'asse di rotazione, dove sono applicate le forze esterne. Si ha pertanto:

$$m\,V\,R = I\,\omega = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega$$

$$\omega = \frac{mVR}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2} = \mathbf{8.33\ rad/s}$$

Il lavoro fatto dalla forza di attrito si scrive come $W = \int F_{att} \cdot \boldsymbol{dx}$ e, all'istante t_1, vale l'equazione

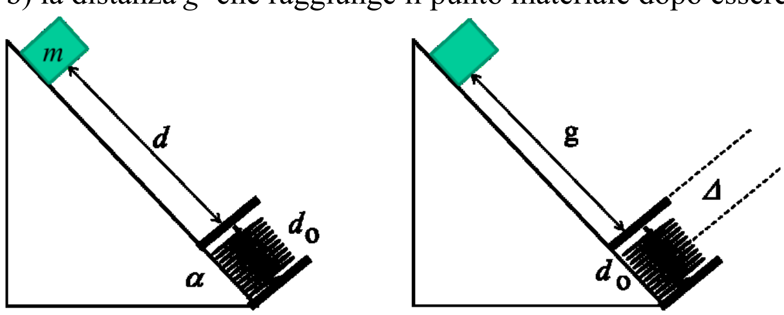
$$\frac{1}{2}I\,\omega^2 + W = E_{in} = \frac{1}{2}\,mV^2$$

Per cui

$$W = \frac{1}{2}\,mV^2 - \frac{1}{2}I\,\omega^2 = \mathbf{18.75}\ \mathrm{J}$$

Problema 3 (2 punti)

Un punto materiale di massa $m = 1$ kg, inizialmente fermo, viene lasciato scivolare sotto l'azione della forza peso lungo un piano inclinato di angolo $\alpha = 45°$. Il coefficiente di attrito dinamico tra il punto e il piano è $\mu = 0.1$. Dopo aver percorso la distanza $d = 2$ m, il punto incontra una molla di lunghezza a riposo $d_0 = 1$ m. Osservando che la molla viene compressa di un tratto $\Delta = 0.5$ m, calcolare: a) la costante elastica k della molla e b) la distanza g che raggiunge il punto materiale dopo essere stato respinto dalla molla.



Soluzione

Lo zero dell'energia potenziale viene fissato sulla molla compressa, corrispondente ad una distanza punto iniziale-molla (d+Δ) sul piano inclinato. Dalla conservazione dell'energia meccanica appena prima della compressione e alla fine della compressione risulta:

$$mg(d + \Delta)\sin\alpha - \mu mg\,d\cos\alpha = \frac{1}{2}\,k\Delta^2 + \mu mg\,\Delta\cos\alpha$$

Questa equazione permette di ricavare il valore della costante elastica;

$$k = 124.8 \text{ N/m}$$

Per la distanza g' dopo il respingimento, si usa l'equazione:

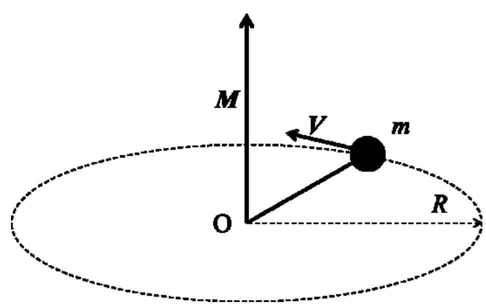
$$\frac{1}{2}k\Delta^2 = mg\,(\Delta + g')\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha\,(\Delta + g')$$

Che risolta permette di trovare il valore

$$g' = 1.54 \text{ m.}$$

Problema 4 (2 punti)

Un punto materiale di massa m= 200 g, appoggiato su un piano orizzontale liscio, è vincolato a ruotare intorno ad un punto O da un filo inestensibile di massa trascurabile, lunghezza R= 20 cm e tensione di rottura T= 800 N. Al punto materiale è applicato, tramite un meccanismo non mostrato in figura, un momento meccanico costante $M\boldsymbol{u}_z$, perpendicolare al piano di rotazione, di modulo M=0.4 Nm, che accelera il punto materiale. All'istante iniziale il corpo è in moto con velocità di modulo V= 2 m/s. Determinare a) la velocità del punto nell'istante in cui il filo si rompe e b) dopo quanti giri il filo si rompe.



Soluzione

Vale l'equazione dinamica:

$$\frac{m\ V_R^2}{R} = T$$

E quindi la velocità al punto di rottura è data da:

$$V_R = \sqrt{\frac{RT}{m}} = 28.3\ \text{m/s}$$

Il lavoro compiuto dal momento è dato da:

$$M\vartheta = \frac{1}{2}\,m\,V_R^2 - \frac{1}{2}mV^2,$$

per cui si ha

$$\vartheta = \frac{1}{2}m(V_R^2 - V^2)/M = 199.22\ \text{rad}$$

e quindi

$$\text{n giri} = \frac{199.22}{2\,\pi} = 31.7$$

Alternativamente, si può procedere in questo modo. L'accelerazione tangenziale è data da:

$$a = \alpha R = \frac{M}{m\,R^2}\,R = \frac{M}{mR} = 10\ \mathrm{m/s^2}$$

Mentre il tempo di accelerazione vale $at = V_R - V$:

$$t = \frac{V_R - V}{a} = 2.63\ \mathrm{s}\,.$$

Lo spazio percoso sul bordo è quindi:

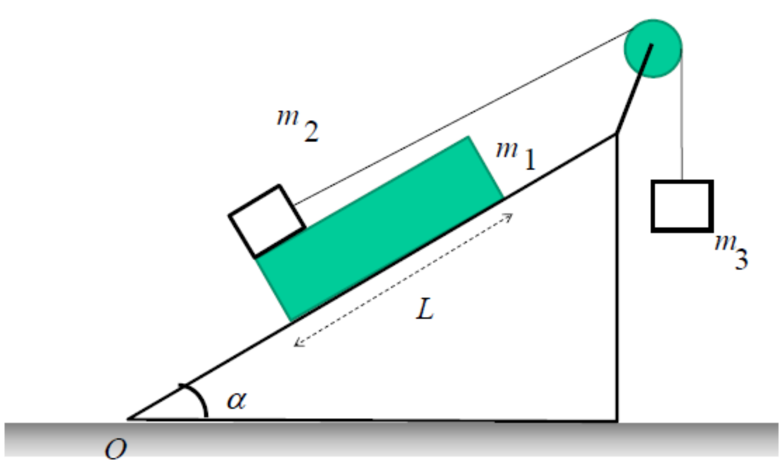
$$d = Vt + \frac{1}{2}at^2 = 39.84\ \mathrm{m}.$$

I giri percorsi sono allora:

$$\text{n giri} = \frac{d}{2\pi R} = \frac{39.84}{1.256} = 31.7$$

Problema 5 (3 punti)

Una tavola di massa m_1= 6 kg e di lunghezza L=2 m è posta su un piano liscio fisso inclinato di $\alpha = 30^o$ con l'orizzontale. Sull'estremo inferiore della tavola è appoggiato un corpo di massa $m_2 = 2$ kg collegato con una fune inestensibile di massa trascurabile con un atro corpo di mass $m_3 = 5$ kg sospeso in aria. La puleggia che alloggia il filo non presenta attriti ed è di massa trascurabile. Tra il corpo m_2 e la tavola m_1 c'è attrito con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.3$. Il sistema viene lasciato libero di muoversi con velocità iniziali nulle sotto l'azione della forza peso e il corpo m_2 inizia a strisciare sulla tavola. Determinare: 1) le accelerazioni dei corpi m_1, m_2 ed m_3 ; 2) la tensione del filo; 3) la velocità di m_2 quando cade dalla tavola.



Soluzione
I diagrammi di corpo libero forniscono le equazioni seguenti:

$$-m_1\, g \sin\alpha + \ \mu m_2 g \cos\alpha = \ m_1 a_1$$

$$T - m_2\ g \sin\alpha - \ \mu m_2 g \cos\alpha = \ m_2 a_2$$

$$m_3 g - T = m_3 a_3$$

Con questi segni i versi di a_2 e a_3 sono concordi. Dato che il filo assicura che in modulo a_2=a_3, il sistema di equazioni fornisce i valori delle quanità incognite:

$$a_1 = \frac{-m_1\, g \sin\alpha + \ \mu m_2\ g \cos\alpha}{m_1} = -\,4.06\mathrm{m/s^2}$$

$$a_2 = \ a_3 = \frac{m_3\, g - m_2\, g \sin\alpha - \ \mu m_2\ g \cos\alpha}{m_2 + m_3} = +4.88\ \mathrm{m/s^2}$$

$$T = m_3 g - \ m_3 a_3 = 24.65\ \mathrm{N}$$

Il corpo m_3 scende, m_2 sale mentre m_1 scende lungo il piano inclinato.
Il corpo m_2 si muove, rispetto a m_1, con accelerazione:

$$a_2' = \ a_2 - \ a_1 = 8.94\ \mathrm{m/s^2}$$

Il tempo di scorrimento di m_2 su m_1 vale quindi:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_2'}} \ = \ 0.67\ \mathrm{s}$$

La velocita finale di m_2, nel sistema inerziale, vale pertanto:

$$V = \ a_2\ t = 3.26\ \frac{m}{s}.$$

Ammessi

Matr.	Voto	Matr.	Voto	Matr.	Voto
446277	4/10	445929	10/10	446957	9/10
445556	8/10	448495	5.5/10	449805	9/10
446232	5/10	449022	8/10	444310	8.5/10
446795	6/10	449955	10/10	444684	9/10
446868	6/10	445503	7/10	446984	5/10
445990	4/10	451136	7/10	445448	6/10
446671	6.5/10	444747	5/10	448323	5/10
449267	5/10	446184	8/10	449593	9/10
447266	5.5/10	445430	9/10	444780	10/10
449244	9/10	445998	4/10		

Non Ammessi

Matr.	Voto	Matr.	Voto	Matr.	Voto
439826	-	446698	2/10	444273	2/10
448394	1/10	447081	--	445995	1/10
445753	1/10	447462	1/10	444719	2/10
446930	2/10	445706	1.5/10	448816	1/10
445842	2/10	440566	1/10	450266	1/10
448383	1/10	446620	--	436029	--
435610	--	447115	--	447303	2/10
445914	1.5/10	446955	1/10	445953	1/10
448208	1/10	446409	--	441852	--