Meccanica 17 giugno 2013

Problema 1 (1 punto)

Un punto si muove nel piano y-x con legge oraria:

$$x = t^2$$
$$y = (t-1)^2$$

Con x,y misurati in metri, t in secondi.

a) Determinare i valori di y quando x=1 m;

b) Determinare il modulo della velocità del punto per t= 2s;

c) Determinare il modulo dell'accelerazione.

Soluzione

(Nota: dal punto di vista formale, come discusso durante il compito, è più corretto scrivere $x = a\,t^2$, $y = b\,(t-t_0)^2$, con le costanti a,b=1 m/s^2 e t_0=1 s. Comunque, questo non influisce sulla risoluzione numerica del problema).

a) Equazione oraria: $y = x \pm 2\sqrt{x} + 1$, che per x=1 fornisce i due valori y=0 e y=4.

b) $v_x = \frac{dx}{dt} = 2t,\ v_y = \frac{dy}{dx} = 2t - 2$. Per t= 2s, si ha

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 4{,}47$ m/s per t= 2s.

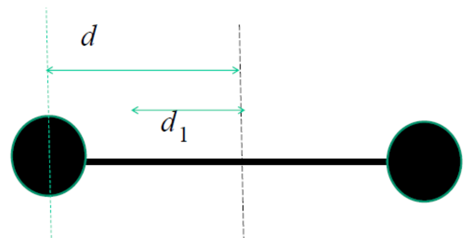
c) $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2, a_{xy} = \frac{dv_{yx}}{dt} = 2,\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{8} =$ 2.83 m/s^2 per t=2s.

Problema 2 (2 punti)

Agli estremi di un'asta rigida ed omogenea di massa m= 60 kg e lunghezza $2d$ = 2 m, disposta orizzontalmente e girevole con attrito trascurabile intorno ad un asse passante per il suo centro di massa, sono fissati due corpi di uguale mass M= 30 kg. Il sistema ruota con una frequenza f=0.5 Hz. Un meccanismo interno fa avvicinare le due masse verso l'asse di rotazione, fino ad una distanza d_1=0.8 m (vedi figura).

Si calcoli la variazione di energia meccanica del sistema.

(*Momento di inerzia di un'asta*: $I=md^2/3$).



Soluzione:

Momenti di inerzia nella posizione 1 e nella posizione 2:

$I_1 = \frac{md^2}{3} + 2Md^2 = 80.0$ kg m^2, $\qquad I_2 = \frac{md^2}{3} + 2Md_1^2 = 58.4$, kg m^2

Dalla conservazione del momento angolare, dato che $\omega_1 = 3.14$ rad/s:

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$, da cui $\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = 4.30$ rad/s.

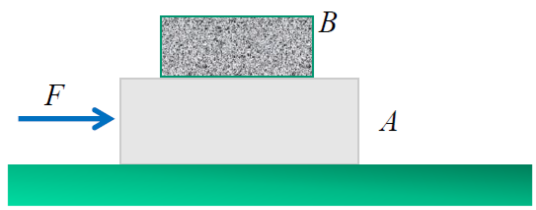
Variazione di energia meccanica:

$$\Delta E = \frac{I_2\,\omega_2^2}{2} - \frac{I_1\,\omega_1^2}{2} = 539.9 - 394.4 = 145\ \mathrm{J}$$

Problema 3 (due punti)

Un corpo A di massa m_A=100 kg poggia su un piano orizzontale scabro e il coefficiente di attrito statico relativo è μ_A=0.2. Un secondo corpo B, di massa m_B=20 kg, è posto su A (vedi figura). Il coefficiente di attrito statico tra due corpi è μ_B=0.1.

Si determini a) l'intensità F_{min} della forza parallela al piano orizzontale applicabile al corpo A superando la quale il corpo A si mette in movimento; b) l'intensità massima F_{max} della forza parallela al piano orizzontale che può essere applicata al corpo A senza che i corpo B scorra su A e sfugga (si assuma il coefficiente di attrito dinamico uguale a quello di attrito statico).



Soluzione

Legge di Newton

$$F - \mu_A(m_A + m_B)g - \mu_B m_B g = m_A a_A$$

$$\mu_B m_B g = m_B a_B$$

a) Quando a_A=a_B::

$F - \mu_A(m_A + m_B)g = (m_A + m_B)a$ (1)

Ponendo a=0 si ha $F_{min} = \mu_A(m_A + m_B)g = 235.4$ N.

b) Il corpo B si muove rispetto al corpo A, verso sinistra, quando $m_B a$ diventa maggiore della forza di attrito $\mu_B m_B g$, per cui, dalla (1):

$$\mu_B m_B g = m_B a = m_B \frac{F_{max} - \mu_A(m_A + m_B)g}{(m_A + m_B)}$$

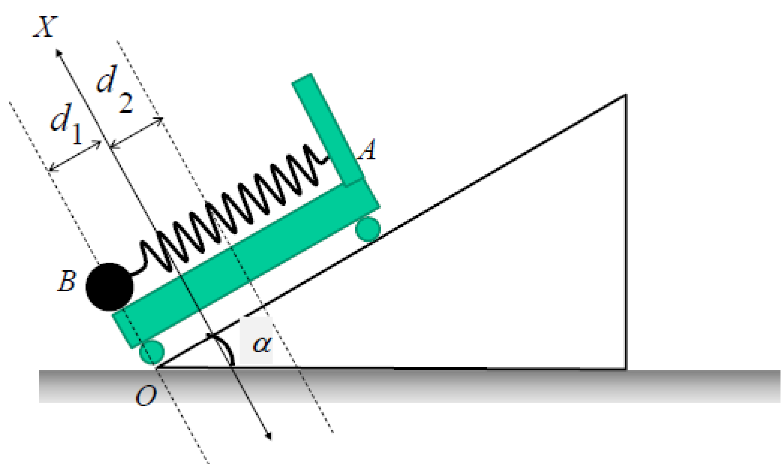
da cui

$$F_{max} = (\mu_A + \mu_B)(m_A + m_B)g = 353.2\ \mathrm{N}.$$

Problema 4 (2 punti)

Un carrello A, di massa m_A=10 kg, si trova nella parte più bassa di un piano inclinato di angolo α=30°, sul quale può scivolare senza attrito. Un corpo B, di massa m_B=0.5 kg può scivolare senza attrito sul carrello ed è collegato con una molla all'estremità superiore del carrello, come in figura. La molla ha costante elastica k= 2×10^3 N/m. Alla condizione iniziale, nel punto O, la molla è allungata di d_1= 5 cm rispetto alla condizione di riposo, indicata con X in figura. Il corpo B viene poi rilasciato e si muove sotto l'azione della gravità e della forza elastica. Tutti gli attriti sono trascurabili. Determinare:

a) Il valore d_2 della compressione della molla in corrispondenza alla quale il carrello comincia a salire verso l'alto;
b) La velocità V posseduta da B in corrispondenza della compressione d_2.



Soluzione

a) Il carrello si muove quando la reazione vincolare, dovuta alla forza elastica di compressione, supera la forza peso. La massa di B, data la mancanza di attriti, non svolge alcun ruolo. Pertanto:

$$kd_2 = m_A g \sin\alpha, \qquad d_2 = \frac{m_A g \sin\alpha}{k} = 2.45 \text{ cm}$$

b) Dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}kd_1^2 = \frac{1}{2}kd_2^2 + m_B g(d_1 + d_2)\sin\alpha + \frac{1}{2}m_B V^2$$

da cui:

$$V = \frac{1}{m_B}\left[kd_1^2 - 2m_B g(d_1 + d_2)\sin\alpha - kd_2^2\right]^{1/2} = 2.62 \text{ m/s}$$

Problema 5 (3 punti)

Un disco omogeneo A di raggio R= 0.3 m e massa m=1 kg, scivola con velocità costante $\boldsymbol{v}$ = 2 m/s (diretta come in figura) su un piano orizzontale privo di attrito, finché urta un disco uguale B in quiete e con il centro a a distanza R dalla traiettria del centro del disco A. Dopo l'urto i dischi rimangono uniti nel punto di contatto iniziale (vedi figura).

Si descriva il moto e si calcoli a) la velocità angolare di rotazione del sistema dopo l'urto e b) l'energia dissipata nell'urto.

(*Momento di inerzia di un disco che ruota intorno ad un asse passante per un punto delle sua circonferenza esterna*: I= $3mR^2/2$ *per il teorema di Steiner*).

Soluzione

Non essendoci forze esterne, il CM (punto nero in figura) si muove di moto rettilineo uniforme, con velocità

$$v_{x\,cm} = \frac{d}{dt}\frac{(mx_A + mx_B)}{2m} = \frac{v}{2}, \quad v_{y\,cm} = \frac{d}{dt}\frac{(my_A + my_B)}{2m} = \frac{d}{dt}\frac{R}{2} = 0.$$

a) Il momento angolare totale del sistema, nel CM, vale in modulo:

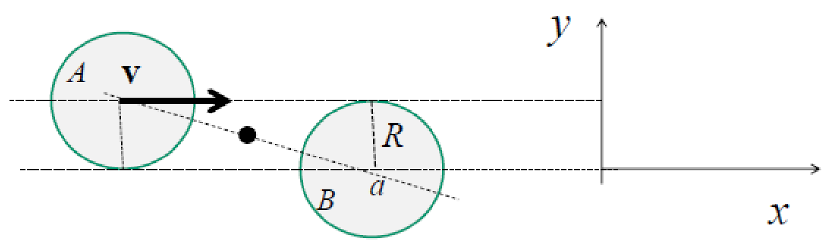
$$|\boldsymbol{L}| = |m\boldsymbol{r_A} \times \boldsymbol{v_A} + m\boldsymbol{r_B} \times \boldsymbol{v_B}| = 2 \times m\frac{R}{2}\frac{v}{2} = \frac{mRv}{2}$$

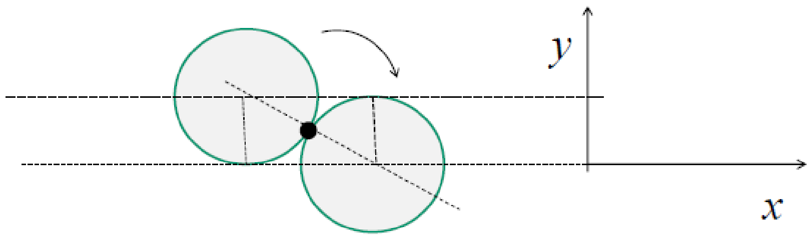
Non essendoci forze esterne, il momento angolare totale rispetto al baricentro si conserva, per cui, dopo l'urto, il baricentro continua nel suo moto rettilineo uniforme, mentre i due dischi ruotano intorno al baricentro con velocità angolare costante. Possiamo quindi scrivere:

$$L = \frac{mRv}{2} = I\omega = 3mR^2\omega, \text{ da cui} \qquad \omega = \frac{mRv}{6mR^2} = \frac{v}{6R} = 1.11 \text{ rad/s}.$$

b) L'energia dissipata nell'urto anelastico è data dalla differenza delle energie meccaniche. Tenendo presente che dopo l'urto i due dischi, di massa $2m$, si muovono incollati con velocità di trsalazione uguale a quella del baricentro, scriviamo:

$$\Delta E = \frac{1}{2}2mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = m\frac{v^2}{4} + \frac{1}{2}3mR^2\omega^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -0.83 \text{ J}$$





Risultati

Ammessi all'orale

	Matricola	**Voto**
1)	409790	7.5/10
2)	408969	7/10
3)	408725	6/10
4)	412193	7/10
5)	411375	6.8/10
6)	399503	5/10
7)	409019	2.8/10
8)	399400	2.1/10
9)	409975	3/10

Non ammessi all'orale

1)	412009	-
2)	406515	1.8/10
3)	407891	1/10
4)	412921	-
5)	409830	-
6)	411407	1.8/10
7)	410633	1.3/10