Meccanica   17 Aprile 2019

Problema 1 (1 punto)

Una massa puntiforme di valore m= 1.5 kg, posta nell'origine, viene sottoposta all'azione di una forza ***F***= 3**i** + 2 **j** N, dove **i** e **j** sono i versori degli assi del piano x-y. Sapendo che, sotto l'azione della forza, la massa raggiunge il punto di coordinata x= 125 m, trovare il lavoro compiuto dalla forza fino a quel punto.

Soluzione

La coordinata y può essere trovata dalla equazione della traiettoria:

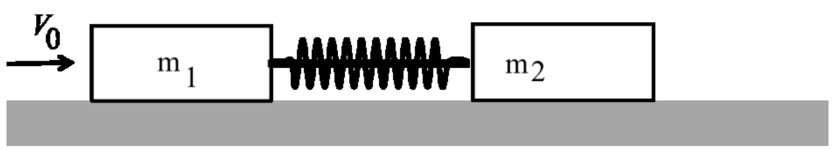
$$x = \frac{1}{2}\frac{F_x}{m}t^2, \; y = \frac{1}{2}\frac{F_y}{m}t^2 \Rightarrow y = \frac{F_y}{F_x}x \; ,$$

che è una retta di coefficiente angolare F_y/F_x. La formula della traiettoria, per x=125 m fornisce il valore y= 125 2/3= 83.3 m. Poiché le componenti della forza sono costanti, il lavoro compiuto dalla forza vale:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x\, x + F_y\, y = 3 \cdot 125 + 2 \cdot 83.3 = 541.6\ J$$

Problema 2 (2 punti)

Due blocchi di massa m_1=0.3 kg e m_2 = 0.6 kg si muovono su un piano orizzontale liscio con velocità V_0= 2 m/s.. Tra di essi è inserita una molla di massa trascurabile e costante elastica K= 20 N/m e massa trascurabile,tenuta compressa tra i due blocchi da un filo teso. La compressione della molla è Δx= 0.2 m. A un certo istante il filo viene tagliato e la molla si decomprime fino a raggiungere la lunghezza di riposo. I blocchi procedono liberamente sconnessi dalla molla con velocità costante lungo il piano. Determinare le velocità finali V_1 e V_2 dei due blocchi. (*Suggerimento: si utilizzi il sistema del centro di massa e poi si trovino le velocità finali nel laboratorio*)



Soluzione

Lungo la direzione di $\boldsymbol{V_0}$ si conserva la quantità di moto, non essendoci forze esterne. Non essendoci attriti, si conserva anche l'energia meccanica. Il sistema del centro di massa si muove con velocità $\boldsymbol{V_0}$; in esso la quantità di moto vale zero e dopo la decompressione della molla V_1 è negativa e V_2 è positiva. Indicando con l'apostrofo le quantità nel CM, le leggi di conservazione dopo la decompressione della molla si scrivono come:

$$m_1 V_1^{'} + m_2 V_2^{'} = 0 \Rightarrow V_1^{'} = -\frac{m_2}{m_1} V'_2$$

$$\frac{1}{2} K\, \Delta x^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^{'2} + \frac{1}{2} m_2 V_2^{'2} \;\Rightarrow\; K\, \Delta x^2 = \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2 \right) V_2^{'2}$$

da cui

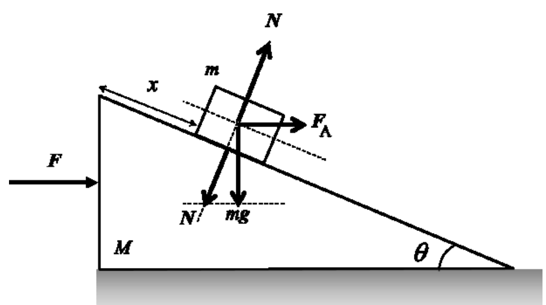
$$V_2^{'} = \sqrt{\frac{K \Delta x^2}{m_2 + m_2^2 / m_1}} = 0.67\,,\;\; V_1^{'} = -\frac{m_2}{m_1} V'_2 = -1.33$$

Le velocità riportate nel laboratorio valgono:

$$V_1 = V_0 + V_1^{'} = 0.67\,, \quad V_2 = V_0 + V_2^{'} = 2.67$$

Problema 3 (2 punti)

Un cuneo di massa M= 3 kg è libero di scorrere senza attrito su un piano orizzontale. Sul piano inclinato del cuneo, con θ=30°, è posto un blocchetto di massa m=1 kg su cui agisce la forza peso. Tra il cuneo e il blocchetto non c'è attrito. Il cuneo viene spinto da una forza $\boldsymbol{F}$ parallela al piano come in figura. Determinare: a) il valore del modulo della forza F_0 che mantiene il blocco fermo sul piano inclinato senza farlo scivolare; b) il tempo impiegato dal blocchetto per risalire fino alla sommità del cuneo compiendo un tratto x=0.5 m quando il modulo della forza vale $|\boldsymbol{F}|$= 2 F_0.



Soluzione

a) Il blocco è un sistema non inerziale soggetto ad una accelerazione A. Nel caso statico, questa accelerazione vale A=F/(m+M), dato che il sistema si muove come un corpo unico solidale col suo centro di massa. Nel sistema non inerziale del blocco vale la relazione;

$$mg \sin\theta - mA \cos\theta = 0 \;\;\Rightarrow\;\; g \sin\theta - \frac{F}{m+M} \cos\theta = 0$$

da cui:

$$F = g(m+M)\tan\theta = 22.65\ \text{N}$$

b) nel caso dinamico il blocco è un sistema non inerziale sul quale agisce una accelerazione A data dalla forza apparente F_A. Le equazioni del moto sono:

$$mg\sin\alpha - F_A\cos\alpha = ma' \quad \text{(blocco)}$$
$$N - mg\cos\alpha - F_A\sin\alpha = 0 \quad \text{(blocco)}$$
$$F - N\sin\alpha = MA \quad \text{(cuneo)}$$

Inoltre sull'asse orizzontale la forza esterna F deve essere uguale a $(m+M)a_{\mathrm{cm}}=ma+MA$, quindi:

$$F = ma + MA$$

E infine le relazione tra la componente orizzontale della accelerazione a del blocco nel sistema inerziale e quella a' nel sistema non inerziale è data da:

$$a = a'\cos\alpha + A.$$

Queste equazioni permettono di trovare le incognite a, a', F_A, N.
Ad esempio, la accelerazione a' lungo il piano inclinato, vale:

$$a' = \left(\frac{g}{\sin\alpha} - \frac{F}{m+M}\frac{1}{\tan\alpha\sin\alpha}\right)\left(1 + \frac{M}{(m+M)\tan^2\alpha}\right)^{-1} = -5.99\ \mathrm{m/s^2}$$

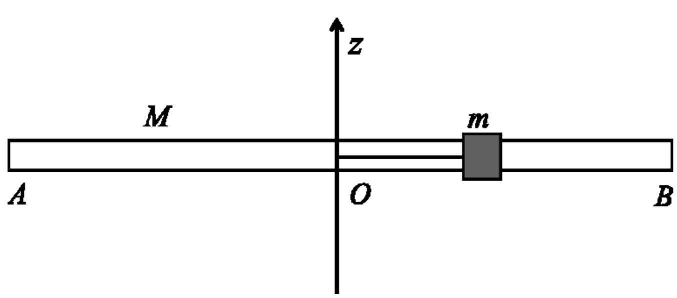
e quindi il tempo di risalita è dato da

$$t = \sqrt{\frac{2x}{|a'|}} = 0.40\ \mathrm{s}$$

(*A causa della complessità del sistema i due punti sono stati attribuiti al punto a) mentre il punto b) non è stato considerato)*

Problema 4 (2 punti)

Un'asta omogenea AB di massa M=0.4 kg e lunghezza L=1.5 m può ruotare senza attrito intorno ad un'asse verticale z passante per il suo centro O (momento di inerzia $I=ML^2/12$). Sull'asta è infilato un anello di massa m=0.1 kg che può scorrere lungo l'asta senza attrito. L'anello inizialmente è collegato al centro dell'asta con un filo teso di lunghezza $L/4$, con tensione di rottura T= 2 N. Inizialmente il sistema è fermo e viene messo in moto da un momento τ=0.2 Nm. Determinare: a) la velocità angolare ω del sistema nel momento in cui il filo si spezza; b) il tempo t nell'istante in cui il filo si spezza; c) supponendo che il momento τ cessi di agire nel momento in cui il filo si spezza, calcolare la velocità angolare ω' e del sistema quando l'anello raggiunge l'estremo B dell'asta.



Soluzione

Il momento di inerzia del sistema col filo teso vale:

$$I_1 = \frac{ML^2}{12} + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = 0.089 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Le equazioni del moto circolare forniscono:

$$m\omega^2 \frac{L}{4} = T \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4T}{mL}} = 7.30 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I_1} = 2.25 \text{ rad / s}^2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\omega}{\alpha} = 3.24\,\text{s}$$

Quando il filo si spezza e il momento esterno cessa la sua azione si conserva il momento angolare del sistema. Allora vale l'equazione:

$$I_1\omega = I_2\,\omega'$$

dove il momento di inerzia I_2 quando l'anello *m* arriva in *B* è dato da**:**

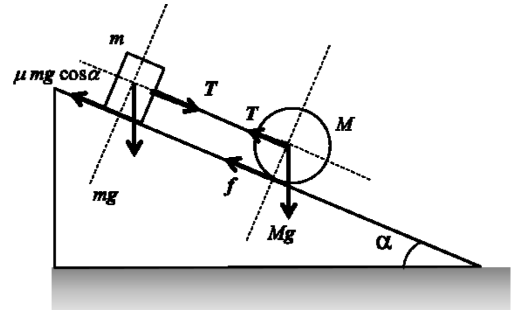
$$I_2 = \frac{ML^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 0.131 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

e quindi:

$$\omega' = \frac{I_1\omega}{I_2} = 4.96 \text{ rad/s}$$

Problema 5 (3 punti)

Un disco omogeneo di massa *M*=2 kg e raggio *R*=0.3 m scende sotto l'azione della forza peso con moto di puro rotolamento lungo un piano inclinato di un angola α=30°. Al suo centro è fissato un filo teso di massa trascurabile che trascina un blocco di massa *m*=1.5 kg. Tra il blocco e il piano c'è attrito con coefficiente di attrito dinamico μ=0.3. Determinare: a) l'accelerazione *a* del centro di masssa (CM) del disco e del blocco e la tensione *T* del filo (**due punti**); b) la velocità angolare del disco, supposto inizialmente fermo, quando il suo CM ha percorso una lunghezza *x*=0.5 m (**1 punto**). (*Momento di inerzia del disco rispetto all'asse centrale: I* = *MR*^{2}/2).



Soluzione

I diagrammi di corpo libero del cilindro e del blocco danno luogo alle seguenti equazioni:

$$Mg\sin\alpha - f - T = Ma \qquad \text{(CM del disco)}$$

$$T + mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma \qquad \text{(CM del blocco)}$$

$$fR = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \Rightarrow f = \frac{1}{2}Ma \qquad \text{(rotolamento del disco)}$$

dove f è la forza di attrito statico applicata al disco nel punto di rotolamento, T la tesione del filo. Le soluzioni del sistema nelle incognite a, T ed f sono:

$$f = \frac{1}{2}Ma = 2.96\ \text{N}$$

$$a = g\frac{(M+m)\sin\alpha - \mu m\cos\alpha}{\frac{3}{2}M + m} = 2.96\ \text{m/s}^2$$

$$T = Mg\sin\alpha - f - Ma = 0.92\ \text{N}$$

Per il quesito b), si consideri la formula che lega la velocità V con l'accelerazione a e lo spazio percorso x:

$$V = \sqrt{2ax}$$

E si applichi la condizione di puro rotolamento:

$$\omega = \frac{\sqrt{2ax}}{R} = \frac{\sqrt{2\cdot 2.96\cdot 0.5}}{0.3} = 5.73\ \text{rad/s}$$

RISULTATI

Ammessi

Matricola	punti
472501	10/10
472057	10/10
468533	6/10
472387	8/10
472427	7/10
471621	7/10
471620	7/10
468831	5/10
470408	5/10
470203	3/10
470070	3/10
471194	5/10
472791	3/10
471099	3/10
470202	4/10
470889	3/10
468147	6/10

Non Ammessi

Matricola	punti	Matricola	punti
470541	--	471090	--
470685	--	467378	--
470307	--	472086	--
473597	1.5/10	456115	--
470295	1/10	471645	1/10
468933	--	468830	1/10
470659	--	469858	--
470120	--	468151	1.5/10
457786	1/10	468814	1/10
472536	2/10	472944	1/10
469032	--	473903	2/10
468959	2/10	457780	--
466239	1/10		