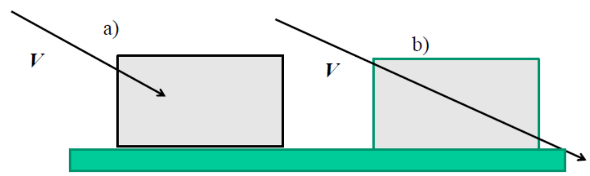
Meccanica 15Aprile 2016

Problema 1 (1 punto)

Una pallottola di massa m= 20 g arriva con velocità V= 300 m/s, inclinata verso il basso di un anglo α= 15° rispetto al piano orizzontale, su un blocco di massa M= 10 kg, fermo su un piano orizzontale lungo il qual può scivolare senza attrito. Calcolare la velocità acquistata dal blocco quando

a) il proiettile si conficca nel blocco

b) il proiettile trapassa il blocco senza cambiare direzione ma uscendone con una velocità V_1= 100 m/s.



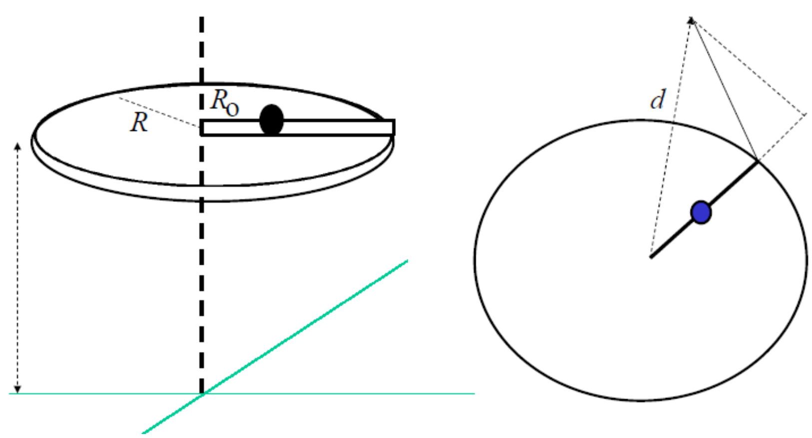
Soluzione

a) $V_b = mV\cos\alpha/(M+m)$= 0.578 m/s;

b) $mV\cos\alpha = MV_b + mV_1\cos\alpha$ da cui V_b= 0.386 μ/σ

Problema 2 (2 punti) :

Una piattaforma circolare di raggio R= 3.0 m ruota intorno al suo asse principale ad una velocità angolare costante ω = 12.6 rad/s. Un corpo puntiforme viene posto in quiete rispetto alla piattaforma in un punto a distanza R_0=R/3 dall'asse della piattaforma. A causa di una guida rettilinea disposta radialmente, il corpo viene trascinato senza attrito nella rotazione della piattaforma e scivola verso l'esterno. Sapendo che la piattaforma si trova ad una quota h= 2.0 m rispetto al suolo calcolare a) il modulo della velocità con la quale il corpo raggiunge il bordo della piattaforma e b) la distanza d dall'asse della piattaforma del punto dove il corpo raggiunge il suolo soggetto alla forza peso.



Soluzione
Mentre scorre nella guida il corpo ha solo la componente normale della velocità.
All'uscita dalla piattaforma il corpo avrà sia la componente normale che quella tangenziale.
La componente normale in funzione del raggio è data da:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v = \omega^2 r$$

e quindi la componente all'uscita dalla piattaforma vale:
$\int_0^{V_N} v\,dv = \int_{R/3}^{R} \omega^2 r\,dr$ da cui $V_N^2 = \omega^2\left(R^2 - \frac{R^2}{9}\right) \rightarrow V_N(R) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega R = 35.6\,m/s$

All'uscita dalla piattaforma di raggio R la componente tangenziale vale:

$$V_T = \omega R = 37.8\ \mathrm{m/s}.$$

Il modulo della velocità di uscita è allora dato da:
$V = \sqrt{V_N^2 + V_T^2} = \frac{\sqrt{17}}{3}\omega R =$ 51.9 m/s.
L'angolo tra la velocità di uscita dalla piattaforma e la direzione del raggio di uscita vale (si veda la figura): $\vartheta = \arctan\frac{V_T}{V_N} = 46.7°$.
Dato che il tempo di caduta vale $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ = 0.638 s, la distanza tra la proiezione del punto di uscita dalla piattaforma sul suolo e il punto di caduta sarà $L = Vt$ =33.1 m.

La distanza d si può trovare infine col teorema di Pitagora o col teorema del coseno utilizzando l'angolo $\varphi = \pi - \vartheta = 133.3°$
$d = \sqrt{R^2 + L^2 - 2RL\cos\varphi} =$ 35.3 m.

Problema 3 (2 punti)
Un veicolo con 4 ruote motrici ha una massa complessiva (ruote incluse) di M=5000 kg con ognuna delle 4 ruote di massa m= 25 kg e raggio R= 30 cm. Il veicolo è inizialmente fermo e si trova su una strada orizzontale. A partire dall'istante t=0 su ogni ruota il motore esercita un momento costante τ= 1000 Nm. Supponendo che il peso del veicolo sia uniformemente distribuito sulle 4 ruote, che le ruote siano cilindri uniformi con momento di inerzia $I=mR^2/2$ e che il moto sia di puro rotolamento, calcolare
a) l'accelerazione del centro di massa del veicolo,
b) il valore minimo del coefficiente di attrito statico per avere puro rotolamento.

Soluzione
Se f è la forza di attrito statico che agisce sulle ruote, le equazioni della dinamica sono in questo caso:

$$Ma = 4f \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{4}\ Ma$$

$$I\frac{a}{R} = \tau - Rf = \frac{1}{2}\ mR^2\frac{a}{R} = \frac{1}{2}\ mRa$$

La soluzione del sistema fornisce:

$$a = \frac{4\tau}{(M+2m)R} = 2.62\ \mathrm{m/s^2}$$

$$f = \frac{M\tau}{g(M+2m)R} = 3300\ \mathrm{N}$$

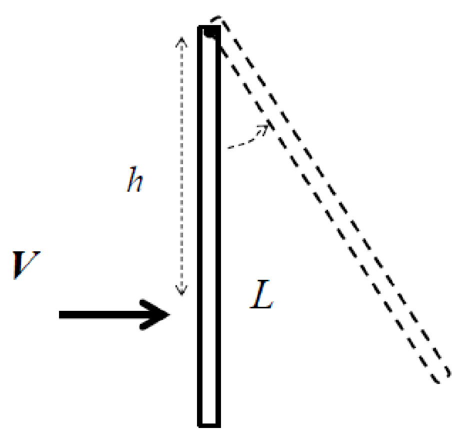
Il valore del coefficiente di attrito minimo si ottiene dalla relazione

$$\mu\frac{M}{4}g \geq \frac{M\tau}{g(M+2m)R}$$

da cui

$$\mu \geq \frac{4\tau}{gR(M+2m)} = 0.27.$$

Problema 4 (2 punti)
Una sbarra di lunghezza *L*=1 m e massa *M*= 5 kg è incernierata ad un estremo e può ruotare liberamente senza attrito intorno ad esso. All'istante t=0, con la sbarra verticale ferma, un proiettile di massa *m* = 100 g colpisce orizzontalmente la sbarra ad un distanza h= 2*L*/3. Il proiettile penetra nella sbarra in un urto completamente anelastico. Calcolare la minima velocita *V* che dovrebbe avere il proiettile per fare effettuare alla sbarra almeno un giro completo (*Momento di inerzia della sbarra rispetto all'asse passante per la cerniera I=ML*^{2}/3).



Soluzione
Si conserva il momento angolare rispetto al punto di vincolo:

$$mVh = (I + mh^2)\omega \ ,$$

dove ω è la velocità della sbarra +proiettile dopo l'urto completamente anelastico.
Esplicitando il momento di inerzia e il valore di h si ottiene:

$$V = \frac{L}{2m}\left(M + \frac{4}{3}\,m\right)\omega \ = 25.6\,\omega. \quad (1)$$

Il valore di ω può essere trovato considerando che, dopo,l'urto, l'energia meccanica si conserva. Quando la sbarra arriva al punto più alto tutta l'energia cinetica si è trasformata in energia potenziale:

$$\frac{1}{2}(I + mh^2)\omega^2 = Mg2\frac{L}{2} + \ 2h\,mg = gL(M + \frac{4}{3}m)$$

Otteniamo:

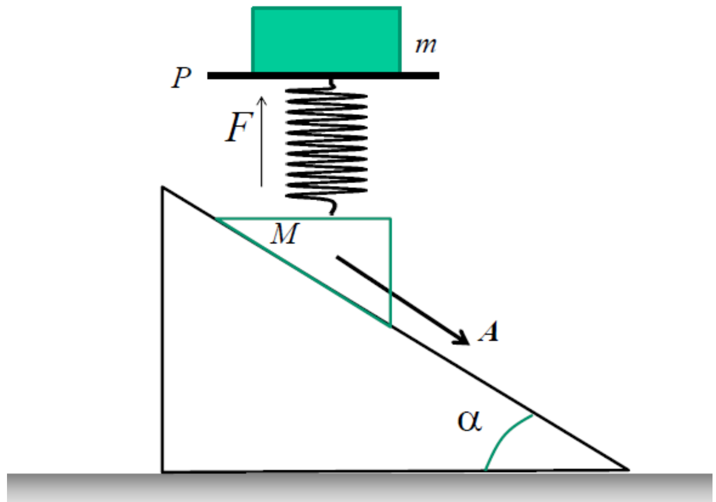
$$\omega^2 = gL\left(M + \frac{4}{3}m\right)\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3} + \frac{4mL^2}{9}\right)} = \frac{6g}{L}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6\,g}{L}} \ = \ 7.67 \quad \mathrm{rad/s}$$

Dalla (1) otteniamo:

$$V = \frac{L}{2m}\left(M + \frac{4}{3}\,m\right)\omega \ = 25.6\,\omega = 196.3 \ \ \mathrm{m/s}.$$

Problema 5 (3 punti)
Un corpo di massa m= 100 kg è posto su una bilancia a molla di massa trascurabile (molla + piatto P). In condizioni di riposo la bilancia segna una forza F= 100 kg peso. La bilancia viene fissata ad una piattaforma di massa M che scivola con attrito sotto l'azione della forza peso lungo un piano inclinato di angolo α = 30°. Il coefficiente di attrito dinamico tra piattaforma M e piano inclinato vale μ_D= 0.2. L'attrito statico tra piatto della bilancia P e il corpo di massa m fa restare il corpo fermo rispetto al piatto.
Determinare
a) la forza peso F letta dalla bilancia durante il moto della piattaforma (2 punti),
b) il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s del piatto P necessario per non far scivolare il corpo di massa m (1 punto).



Soluzione
L'equazione del moto lungo il piano inclinato è data da:

$$(M+m)g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)=(M+m)A$$

Scomponiamoora l'accelerazione $\boldsymbol{A}$ lungo una componente normale alla piattaforma e una componente orizzontale:

$$A_n = g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\sin\alpha$$
$$A_t = g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\cos\alpha$$

Lungo l'asse verticale del sistema non inerziale molla+ bilancia vale l'equazione di equilibrio tra F ed mg (F e l'accelerazione di trascinament A_n hanno verso opposto):

$$\boldsymbol{F}+m\boldsymbol{g}-m\boldsymbol{a}_t = F-mg+mA_n=0$$

$$F=mg(1-\sin^2\alpha+\mu\cos\alpha\sin\alpha)=820.7\ \text{N}\rightarrow\frac{820.7}{9.81}=83\ \text{kgp}$$

Lungo la normale del sistema molla+bilancia la forza della molla F è in equilibrio con la reazione N del corpo sul piano P. Possiamo pertanto scrivere, in modulo:

$$\mu_s N=\mu_s F\geq m\,A_t=m\,g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\cos\alpha$$

$$\mu_s\geq\frac{mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\cos\alpha}{F}=0.338\,,$$

dove F è espressa in N.

Ammessi all'orale

438657	3
435773	3
439504	3
436147	3
439568	3.5
436051	3.5
436799	3.5
437436	4
436229	4
435638	4
437066	4
435291	5
436649	5
437975	6
435573	6
436509	6
436584	8
437483	8
430654	9

Non Ammessi

437152	--
436029	--
436720	2
434900	--
435724	2
435866	1
439826	1
439612	--
440566	--
437883	--
434856	1
436990	1
434862	1
435212	1
437177	2
434544	1.5
436789	2
435850	2