Meccanica 14 aprile 2014

1. **Problema (1 punto)**

Un treno parte da fermo in un tratto curvo della linea ferroviaria di raggio di curvatura R=800 m, muovendosi con accelerazione tangenziale costante fino a raggiungere una velocità di modulo m V=36 km/h dopo aver percorso un tratto lungo L=600 m. Determinare: a) il modulo della accelerazione tangenziale a_t, b) il tempo t impiegato per effettuare il percorso, c) il modulo V_0 della velocità del treno quando si trova a metà percorso, d) il modulo della accelerazione a metà percorso.

Soluzione:

a) $a_T = V^2/(2L)$=0.083 m/s2; b) $t = \sqrt{2L/a_T}$ =120 s; c) $V_0 = \sqrt{a_T L}$=7.05 m/s;

d) $a = \sqrt{\frac{V_0^2}{R} + a_T^2} = 0.103 \text{ m/s}^2$

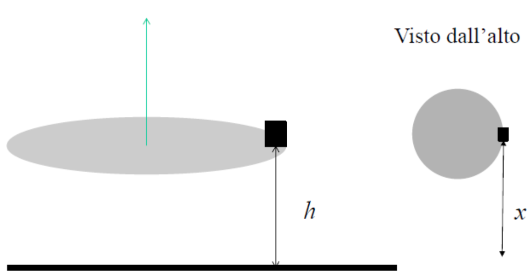
2. **Problema (2 punti)**

Un massa m= 0.5 kg è posta sul bordo di un disco di raggio R=0.5 m posto orizzontalmente ad una altezza dal suolo h=1 m; il coefficiente di attrito tra massa e disco è μ=0.3. Il disco ruota intorno al suo asse e raggiunge una velocità angolare tale che la massa scivola dal disco e cade al suolo, percorrendo in verticale il tratto h. Calcolare la distanza x percorsa dalla massa m in orizzontale.

Soluzione:

$$\frac{m\,v^2}{R} = \mu m g \quad \text{da cui} \quad v = \sqrt{\mu R g} = 1.21 \text{ m/s}$$

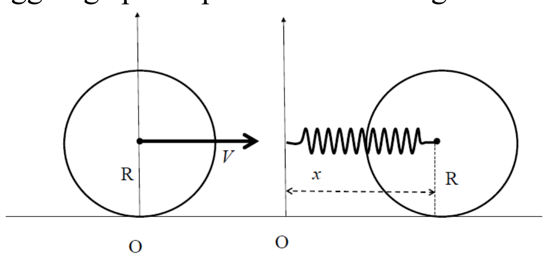
$$x = vt = \sqrt{\mu R g}\,\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.54 \text{ m.}$$



3. **Problema (2 punti)**

Un sistema è costituito da un disco di massa M=10 kg e raggio R e da una molla di costante k= 90 N/m, di massa trascurabile e lunghezza di riposo pure trascurabile. Il sistema è assemblato come in figura, con la molla collegata ad un punto di quota R sull'asse verticale ed al centro del disco; il disco è appoggiato su un piano sul quale rotola senza strisciare.

All'istante t=0 il centro C si muove con velocità V = 1 m/s parallela all'asse orizzontale. Si determini il tempo t_{max} in cui il centro del disco, muovendosi di moto armonico, raggiunge per la prima volta l'elongazione massima x.



Soluzione:

$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{4}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}kx^2$ e, dato che $\omega^2 = \frac{V^2}{R^2}$, si ha $3MV^2 = 2\,kx^2$

La elongazione massina è pertanto: $x_M = \sqrt{\frac{3M}{2k}}\,V = 0.41$ m.

Il centro di massa si muove di moto armonico con legge $x(t) = x_M \sin(\omega t)$; la pulsazione si trova derivando questa equazione e calcolandola per t=0:

$$V(t) = x_M\,\omega\cos(\omega t) \quad \rightarrow \; \omega = \frac{V}{x_M} = \sqrt{\frac{2k}{3M}} \quad per\; t = 0.$$

La massima elongazione si raggiunge quando $\sin(\omega t) = 1$, cioè per

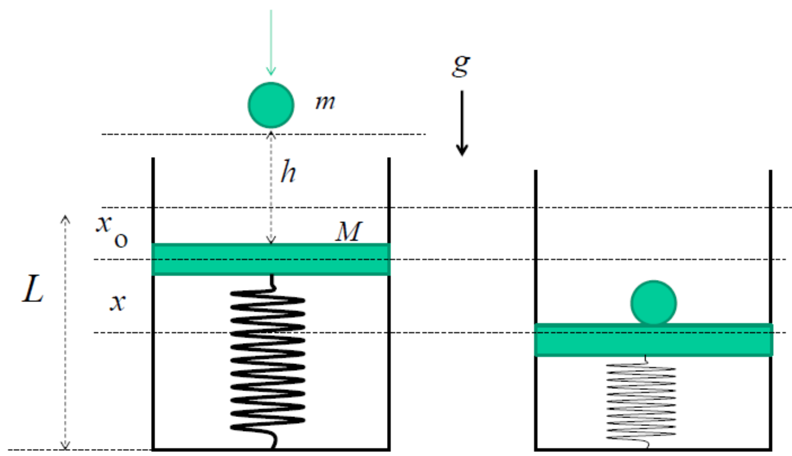
$\omega t = \frac{\pi}{2}$, da cui $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3M}{2k}} =$ 0.64 s.

4. **Problema (2 punti)**

Un piatto di massa M=5 kg comprime un molla di costante elastica k=100 N/m di una lunghezza x_0 (fase 1).

Un corpo di massa m=1 kg viene lasciato cadere da una altezza h=2 m sul piatto di massa M. L'urto e completamente anelastico e i due corpi rimangono incollati dopo l'urto (fase 2).

Trovare la massima compressione x della molla dopo l'urto (fase 3) , come indicato in figura.



Soluzione:

Inizialmente la molla è compressa di una quantità $x_0 = \frac{Mg}{k}$= 0.49 m.

Il corpo di massa m impatta sul piatto con una velocità v=$\sqrt{2gh}$. Si conserva la quantità di moto, ed il sistema formato dal piatto più il corpo si muove come un tutto con velocità $V = \frac{m}{m+M}$v. Da questo momento si conserva l'energia meccanica e possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 + (M+m)(L-x_0)g = \frac{1}{2}k\,(x_0 + x\,)^2 + (M+m)g(L-x_0-x)$$

Da questa eguaglianza si ottiene l'equazione di secondo grado:

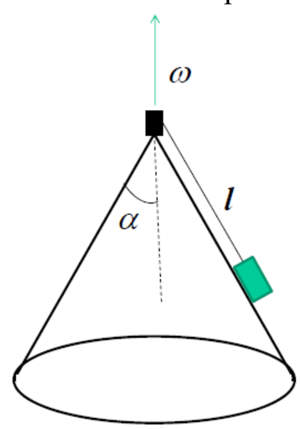
$$kx^2 - 2mgx - \frac{2m^2gh}{M+m} = 0$$

Che ha come soluzione positiva:

$$x = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2m^2gh}{k(m+M)}} = 0.371 \text{ m.}$$

Problema (3 punti)
Un corpo di piccole dimensioni di massa m=0.1 kg è appoggiato sopra la superficie liscia di un cono di angolo $\alpha=\pi/4$, ed è trattenuto da un filo inestensibile di lunghezza l = 1m e di massa trascurabile, come in figura. A partire dall'istante t=0 si esercita sul corpo una forza perpendicolare al filo e tangente alla superficie conica, pari a F= 0.1 N.

Dopo aver determinato l'andamento col tempo della velocità angolare ω del corpo, diretta come in figura, si determini il modulo R della reazione della superficie conica e quindi l'istante t_0 in cui avviene il distacco del corpo dalla superficie del cono.



Soluzione:
Dalla equazione cardinale lungo l'asse z (il momento della forza peso è nullo lungo l'asse z):
$Fl\ \sin\alpha = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$=m$l^2\sin^2\alpha\ \ \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ da cui, integrando: $\omega = \frac{F}{ml\sin\alpha}t$ =1.4 t rad/s.
Scrivendo la reazione R perpendicolare alla superficie conica si ha:

$$R = m\omega^2 l\sin\alpha\ \ \cos\alpha - mg\sin\alpha$$

Ponendo R=0 e sostituendo l'espressione trovata per ω si ottiene l'istante di distacco:

$$t\ = \sqrt{\frac{m^2 g\ l\ \sin^2\alpha}{F^2\cos\alpha}}\ = 2.64\ \mathrm{s}$$

Risultati

Matricola	punteggio in decimi	ammesso all'orale
419995	8.3	SI
420288	8	SI
421772	8	SI
419710	7.5	SI
417132	7	SI
418433	6	SI
419196	3.8	SI
419837	3.5	SI
418582	3.5	SI
417798	3.5	SI
420613	3	SI
--		
418536	2	NO
419369	1.5	NO
417961	0.8	NO
417115	0.8	NO
419779	-	NO
419459	-	NO
419314	-	NO
416915	-	NO
424722	-	NO