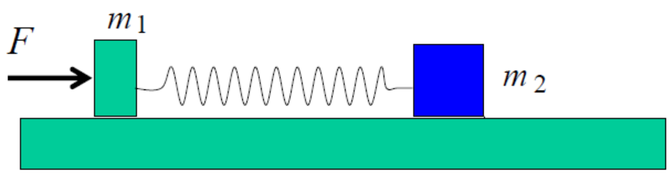
Meccanica   13 Aprile 2015

Problema 1 (due punti)

Due corpi di massa m_1= 10 kg e m_2=18 kg sono collegati da una molla di costante elastica K=100 N/m come in figura. Al corpo m_1 è applicata una forza F=56 N. Trovare la compressione della molla x nel caso

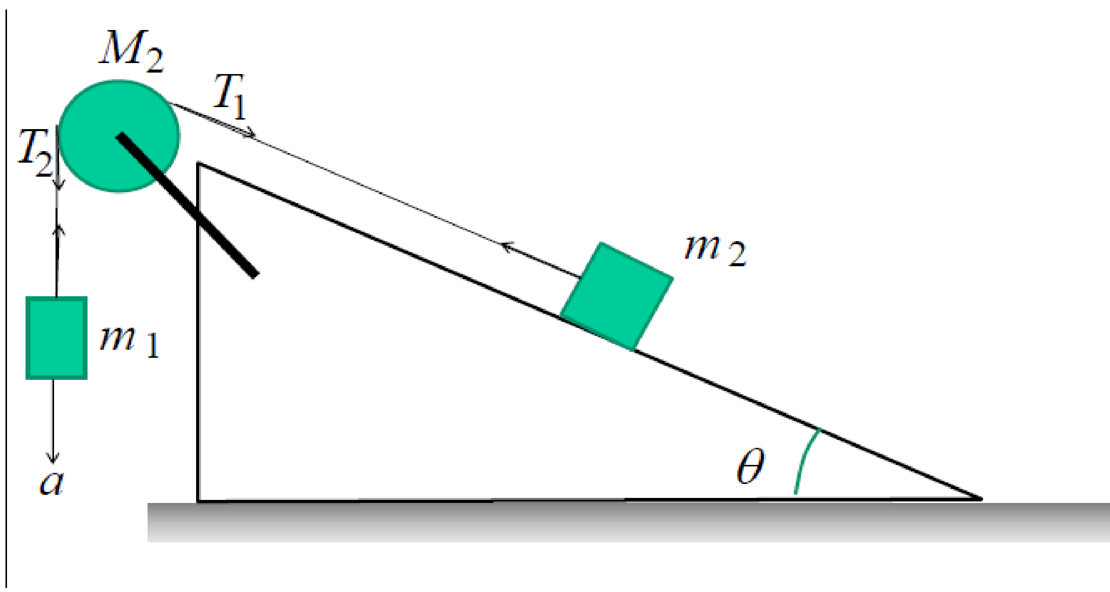
a) i corpi scivolino sulla superficie senza attrito
b) oppure con coefficiente di attrito dinamico μ=0.2.



Problema 2 (3 punt1)

Su un piano inclinato di angolo θ=30° due masse m_1 =3 kg ed m_2=2.5 kg sono collegate come in figura con un filo inestensibile di massa trascurabile. La puleggia, di raggio R=20 cm e massa M=2 kg, ruota permettendo al filo di scorrere senza strisciare. La massa m_2 scorre senza attrito sul piano del cuneo mentre la massa m_1 scende a causa della forza peso.

a) Trovare le tensioni del filo T_1 e T_2 e la accelerazione a delle due masse m_1 ed m_2
b) Trovare la massa di m_2 che sarebbe necessaria per mantenere il sistema in equilibrio statico nel caso il coefficiente di attrito tra m_2 e cunei valga μ=0.2.

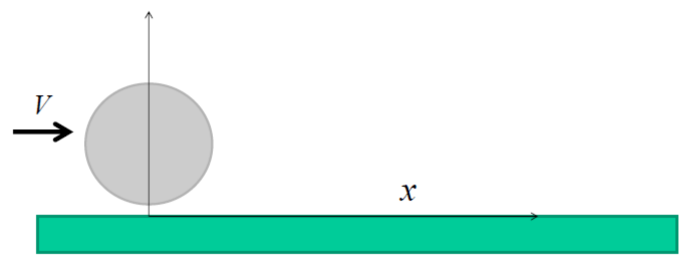


Problema 3 (3 punti)

Una ruota (disco), senza moto rotatorio iniziale, viene fatta traslare con velocità iniziale V=2 m/s lungo un piano di coefficiente di attrito dinamico μ=0.2. Venuto a contatto col piano, il disco rotola e striscia. Trovare:

a) la distanza a partire dalla quale il moto diventa di puro rotolamento;

b) la frazione di energia meccanica iniziale persa prima di arrivare al puro rotolamento.

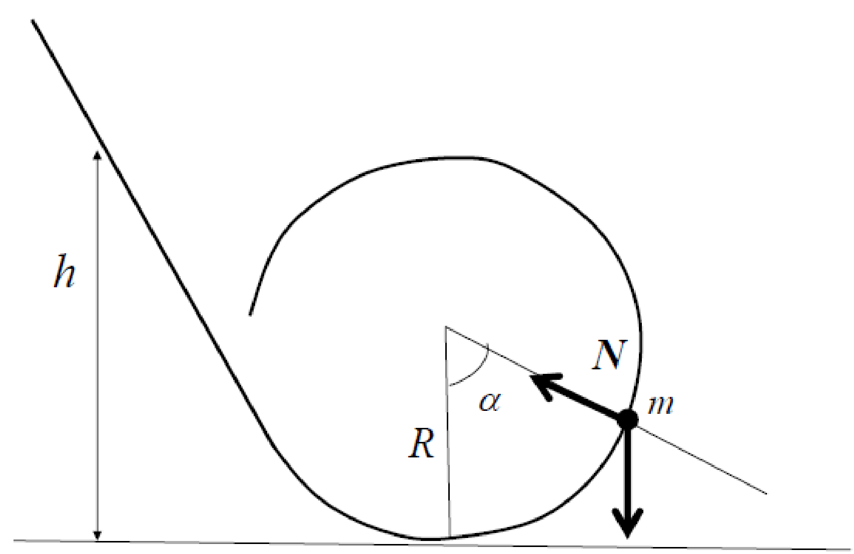


Problema 4 (2 punti)

Un punto di massa m=2 kg scivola senza attrito lungo la pista in figura, di raggio R=1 m. La massa viene rilasciata con velocità iniziale nulla da una altezza h=3 m.

a) Si determini la reazione vincolare $\boldsymbol{N}$ in funzione dell'angolo α. Trovare il valore di N per α=90° e α=180° (posizione verticale).

b) Qual è la altezza minima da cui rilasciare il carrello perché esso percorra l'intera guida circolare?



Soluzioni

Problema 1

Il sistema si muove con accelerazione pari a

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = 2\ \mathrm{m}/s^2\,.$$

La seconda legge della dinamica applicata alla massa 2 fornisce:

$$x = \frac{m_2 a}{K} = \ 0.36\ \mathrm{m}$$

In presenza di attrito si ha:

$$F - \mu g m_1 - \mu g m_2 = (m_1 + m_2)a\,,$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} - \mu g = 0.038\ \mathrm{m/s^2}$$

da cui

$$Kx - \mu g\, m_2 = m_2 a,$$

$$x = \frac{m_2 a + \mu g\, m_2}{K} = 0.36\ \mathrm{m}\,,$$

come nel caso senza attrito.

Problema 2

Si ha il sistema (si notino gli indici 1 e 2 come da figura e il segno del momento sulla puleggia concorde a quello della accelerazione su m_1):

$$-T_2 + m_1 g = m_1 a$$

$$m_2 g\ \mathrm{sen}\vartheta - T_1 = -m_2\, a$$

$$T_2 R - T_1 R = \frac{1}{2}\, M R^2\, \frac{a}{R}$$

Si noti che con i segni scelti a sarà una quantità positiva se la massa m_1 scende.

La risoluzione del sistema fornisce:

$$a = \frac{g(m_1 - m_2\ \mathrm{sen}\vartheta)}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = 2.64\ \mathrm{m/s^2},$$

$$T_2 = m_1(g - a) = 21.51\ N\,,$$

$$T_1 = \ T_2 - \frac{M}{2} a = 18.87\ N\,.$$

Nel caso statico, le due tensioni sono uguali (T_1=T_2=T), il momento sulla puleggia si annulla e si ha:

$$T - m_1 g = 0\,,$$
$$m_2 g\ \text{sen}\vartheta + \mu g\ m_2 \cos\vartheta \quad - T = 0$$

da cui

$$m_2 = \frac{m_1}{\text{sen}\vartheta + \ \mu\ \cos\vartheta} = 4.46\ \text{kg}$$

Problema 3

Durante la fase di strisciamento e rotolamento è attiva la forza di attrito dinamico $f = \mu M g$, pari ad una accelerazione a=f /m=$\mu\, g$. Pertanto, le velocità angolare e del centro di massa della ruota variano col tempo come segue:

$$V(t) = V - \mu g t;$$
$$I\frac{d\omega}{dt} = \ \mu M g R \quad \rightarrow \ \frac{1}{2}\ M R^2 \omega = \ \mu M g R\ \ t \ \ \rightarrow \ \ \omega(t) = \frac{2\mu g}{R}\ \ t \quad (1)$$

Il tempo t_0 al quale avviene il puro rotolamento è dato dalla condizione:

$$V - \mu g t_0 = \ \frac{2\mu g}{R}\ R\ \ t_0 \quad \ \rightarrow \quad t_0 = \ \frac{V}{3\mu g} \qquad (2)$$

Da questo istante il disco procede con velocità angolare e di traslazione costanti e pari a:

$$V(t_0) \equiv V_0 = \ \frac{2}{3}V\,, \qquad \omega(t_0) = \ \frac{V_0}{R}\ \ .$$

La risposta alla prima domanda (lo spazio percorso L) è quindi, dalla (2):

$$L = V\ t_0 - \ \frac{1}{2}\ \mu g t_0^2 \ = \ \frac{V^2}{3\mu g} - \ \frac{1}{2}\ \mu g \frac{V^2}{9\mu^2 g^2} = \ \frac{5}{18}\ \frac{V^2}{\mu g} = \mathbf{0.57\ m}\ . \ \ (3)$$

Per la seconda domanda basta fare la differenza tra la energia meccanica iniziale e quella all'istante del puro rotolamento:

$$\frac{1}{2} M V^2 - \frac{1}{2} M\ V_0^2 \ - \frac{1}{2} I\ \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{2} M V^2 - \frac{1}{2} M\ \left(\frac{2}{3}V\right)^2 \ - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\ \ \text{M}R^2 \left(\frac{2\,V}{3R}\right)^2 = \frac{1}{2} M V^2 \left[\frac{1}{3}\right] \qquad (4)$$

E' interessante confrontare questo risultato con il lavoro svolto dalla forza di attrito. Se consideriamo tutta la lunghezza L, otteniamo un risultato sbagliato, perché lungo L

avviene sia il rotolamento che lo strisciamento. Il lavoro della forza di attrito avviene lungo la parte data dal percorso totale L meno la parte di rotolamento. Dalle (1), (2) e (3) si ha:

$$L_{att} = L - \int_0^{\vartheta} R \; d\vartheta \; = L - \int_0^{\frac{V}{3\mu g}} R \; \omega(t) \; dt = L - \int_0^{\frac{V}{3\mu g}} R \; \frac{2\mu g}{R} \; t \; dt$$

$$= \frac{5}{18} \; \frac{V^2}{\mu g} - \frac{1}{9} \frac{V^2}{\mu g} = \frac{1}{6} \frac{V^2}{\mu g} \, ,$$

e quindi il lavoro è dato da:

$$W = \int_0^{\frac{1V^2}{6\mu g}} \mu M g \; dx = \frac{1}{2} M V^2 \left[\frac{1}{3}\right] ,$$

come nella (4), pari a 1/3 dell'energia iniziale.

Problema 4

Dalla seconda legge della dinamica e dalla conservazione della energia meccanica si ha:

$$N - mg \cos \alpha = \frac{mV^2}{R} ,$$

$$mgh = \frac{1}{2} m V^2 + mgR(1 - \cos \alpha)$$

da cui:

$$N = mg \left(\frac{2h}{R} + 3 \cos \alpha - 2 \right)$$

Nei due casi richiesti ($\cos \alpha = 0$ e $\cos \alpha = 1$), si ha

$$N = mg \left(\frac{2h}{R} - 2 \right) = 78.48 \; N \, ,$$

$$N = mg \left(\frac{2h}{R} - 5 \right) = \; 19.62 \; N$$

L'altezza minima per un giro completo si ottiene con la condizione N=0:

$$N = mg \left(\frac{2h}{R} - 5 \right) = 0 \;\; \rightarrow \;\; h = \frac{5}{2} R = 2.5 \text{ m}.$$

Risultati

Ammessi senza restrizione di voto:

Matricola	voto	Matricola	voto
426868	10	427638	10
429894	9.5	431102	8
430106	8	426502	8
427989	7	427948	6.5
427344	8		

Ammessi con limite di voto massimo (tra parentesi)

Matricola	voto	Matricola	voto
424722	5 (29)		
429821	5 (29)	428735	5 (29)
430654	4 (28)	426567	4 (28)
427620	4 (28)	427017	4 (28)
430062	3 (27)	426734	3 (27)
431235	3 (27)	421451	3 (27)

Non ammessi:

Matricola	voto	Matricola	voto
430098(?)	2	427204	2
427884	2	429634	2
427981	1	426409	2
430022	2	427160	1
477036	-	426728	1
426621	1	430949	2
419072	-	427609	2
427696	-	426424	-
427393	-	426767	-
428381	1	426971	-