In un processo di scattering con sonda leptonica abbiamo visto che il tensore leptonico risulta essere

$$L_{\mu\nu} = 2\,\left(k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - k\cdot k'\,g_{\mu\nu}\right)\ . \tag{1}$$

Nel sistema di riferimento del laboratorio, per un lettone ultrarelativistico, la parametrizzazione dei vettori è (vedi Lez. 6 - Slide 3)

$$k \approx (E,\,0,\,0,\,E)\ ,\quad k' \approx (E',\,E'\sin\theta_e,\,0,\,E'\cos\theta_e)\ , \tag{2}$$

dove $\theta_e$ è l'angolo di scattering. In questo sistema di riferimento abbiamo visto anche che il vettore di polarizzazione del fotone virtuale corrispondente alla polarizzazione longitudinale è parametrizzato come

$$\epsilon_0^\mu = \frac{1}{\sqrt{Q^2}}\,(|\boldsymbol{q}|,\,0,\,0,\,\nu)\ . \tag{3}$$

Dobbiamo ora calcolare la componente longitudinale del tensore $L$ nella base di polarizzazione:

$$\begin{aligned}
L_{00} &= 2\,\left(2\,k'\cdot\epsilon_0\,k\cdot\epsilon_0 - k\cdot k'\,\epsilon_0^2\right)\\
&= 2\,\left\{\frac{2}{Q^2}\,\left[(E'|\boldsymbol{q}| - E'\nu\cos\theta_e)\,(E|\boldsymbol{q}| - E\nu)\right] - (EE' - EE'\cos\theta_e)\right\}\\
&= 2EE'\,\left\{\frac{2}{Q^2}\,\left[\boldsymbol{q}^2 + \nu^2\cos\theta_e - \nu|\boldsymbol{q}|\,(1+\cos\theta_e)\right] - 1 + \cos\theta_e\right\}\\
&= 2EE'\,\left\{1+\cos\theta_e + 2\frac{\nu^2}{Q^2}\,(1+\cos\theta_e) - 2\frac{\nu|\boldsymbol{q}|}{Q^2}\,(1+\cos\theta_e)\right\}\\
&= 2EE'\,(1+\cos\theta_e)\,\left\{1 + 2\frac{\nu^2}{Q^2} - 2\frac{\nu|\boldsymbol{q}|}{Q^2}\right\}\\
&= 4EE'\cos^2\frac{\theta_e}{2}\,\left\{\frac{\boldsymbol{q}^2}{Q^2} + \frac{\nu^2}{Q^2} - 2\frac{\nu|\boldsymbol{q}|}{Q^2}\right\}\\
&= 4EE'\cos^2\frac{\theta_e}{2}\,\frac{(|\boldsymbol{q}|-\nu)^2}{Q^2} = 4EE'\cos^2\frac{\theta_e}{2}\,\frac{\boldsymbol{q}^2}{Q^2}\,\left(1 - \frac{\nu}{|\boldsymbol{q}|}\right)^2\\
&= 4EE'\cos^2\frac{\theta_e}{2}\,\frac{\boldsymbol{q}^2}{Q^2}\,\left(\frac{Q^2}{\boldsymbol{q}^2}\right)^2\,\left(\frac{1}{1+\frac{\nu}{|\boldsymbol{q}|}}\right)^2\\
&\approx 4EE'\cos^2\frac{\theta_e}{2}\,\frac{Q^2}{\boldsymbol{q}^2}\ ,
\end{aligned} \tag{4}$$

dove si è fatto uso della relazione

$$\frac{Q^2}{\boldsymbol{q}^2} = 1 - \frac{\nu^2}{\boldsymbol{q}^2} = \left(1 + \frac{\nu}{|\boldsymbol{q}|}\right)\,\left(1 - \frac{\nu}{|\boldsymbol{q}|}\right)\ , \tag{5}$$

e quindi

$$\left(1 - \frac{\nu}{|\boldsymbol{q}|}\right) = \frac{Q^2}{\boldsymbol{q}^2}\,\left(\frac{1}{1+\frac{\nu}{|\boldsymbol{q}|}}\right)\ . \tag{6}$$