Riconsideriamo lo scattering elastico di una sonda elettronica su un bersaglio fermionico puntiforme. La sezione d'urto risulta (Lez. 6, slide 10)

$$\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} \quad = \quad \frac{\alpha^2}{4M^2Q^4}\,\frac{E'}{E}\,L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}\,\delta(\nu - \frac{Q^2}{2M})\;, \tag{1}$$

dove la contrazione dei tensori può essere rielaborata in termini delle variabili di Mandelstam s, t, u:

$$s = (k+P)^2\;, \quad t = (P-P')^2\;, \quad u = (P-k')^2\;. \tag{2}$$

Ad alte energie E possiamo trascurare M^2/E^2. Nel target rest frame quindi valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} s \approx 2ME\;, \quad u \approx -2ME' \quad &, \quad t = -Q^2 \\ s+t+u \quad &\approx \quad 2M\nu - Q^2 \\ s+t+u \quad &= \quad 0 \quad \text{elastic}\;. \end{aligned} \tag{3}$$

Il modulo quadrato dell'ampiezza di scattering diventa quindi

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} &= 2[k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu - g_{\mu\nu}k\cdot k'] \\ &\quad \times 2[P'_\mu P_\nu + P_\mu P'_\nu - g_{\mu\nu}(P\cdot P' - M^2)] \\ &= 8[P'\cdot k'\,P\cdot k + P'\cdot k\,k'\cdot P - k'\cdot k\,M^2] \\ &\quad (P' \to P+q) \\ &= 8[2P\cdot k\,P\cdot k' + P\cdot k\,q\cdot k' + P\cdot k'\,q\cdot k - k\cdot k'\,M^2] \\ &= 8[2M^2EE' + (M\nu - M^2)\,k\cdot k'] \\ &= 8[2M^2EE' + (M\nu - M^2)\,EE'(1-\cos\theta_e)] \\ &= 8\left[2M^2EE'\left(1-\sin^2\frac{\theta_e}{2}\right) + M(E-E')\,2EE'\sin^2\frac{\theta_e}{2}\right] \\ &= 8\left[2M^2EE' - M^2\frac{Q^2}{2} + M(E-E')\,\frac{Q^2}{2}\right] \\ &\approx 8\left[-\frac{su}{2} + M^2\frac{t}{2} - \frac{s+u}{2}\,\frac{t}{2}\right] \\ &\quad t = -(s+u) \\ &= 8\left[-\frac{su}{2} + \left(\frac{s+u}{2}\right)^2\right] = 2[s^2+u^2]\;. \end{aligned} \tag{4}$$

Prima di inserire il risultato qui sopra in Eq. (1), facciamo una trasformazione di variabile. Ricordando gli appunti da Lez.9, slide 15, abbiamo

$$dQ^2 = \frac{EE'}{\pi}\,d\Omega\;, \quad dE' = d\nu\;. \tag{5}$$

Quindi la sezione d'urto diventa

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} &= \frac{\pi}{EE'}\,\frac{d\sigma}{dE'd\Omega} \\
&= \frac{\pi}{EE'}\,\frac{\alpha^2}{4M^2Q^4}\,\frac{E'}{E}\,L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}\,\delta(\nu - \frac{Q^2}{2M}) \\
&= \frac{\pi\alpha^2}{Q^4}\,\frac{1}{4M^2E^2}\,L_{\mu\nu}W^{\mu\nu}\,2M\,\delta(2M\nu - Q^2)\;. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

A questo punto trasformiamo l'espressione della sezione d'urto in termini di variabili di Mandelstam. Per fare ciò, dobbiamo però prima trasformare le variabili rispetto a cui la sezione d'urto è differenziale:

$$
\begin{aligned}
t = -Q^2 \quad &\to \quad dQ^2 = dt \\
\nu = 2M\,\frac{E-E'}{2M} = \frac{s+u}{2M} \quad &\to \quad d\nu = \frac{1}{2M}\,du\;. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Mettendo insieme tutti i pezzi, possiamo scrivere la sezione d'urto come

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dt du} &= \frac{1}{2M}\,\frac{d\sigma}{dQ^2 d\nu} \\
&= \frac{\pi\alpha^2}{t^2}\,\frac{1}{s^2}\,2[s^2+u^2]\,\delta(s+t+u)\;. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Possiamo integrare la sezione d'urto rispetto ad u ed avere quindi la stessa differenziale solo in dt, ovvero in dQ^2, ovvero nella distribuzione angolare dell'elettrone diffuso:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dt} &= \int du\,\frac{d\sigma}{dt du} \\
&= \int du\,\frac{2\pi\alpha^2}{t^2}\,\frac{s^2+u^2}{s^2}\,\delta(s+t+u) \\
&= \frac{2\pi\alpha^2}{t^2}\left(1+\frac{(s+t)^2}{s^2}\right)\;. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Questa sezione d'urto è stata ottenuta per scattering elastico su bersaglio fermionico puntiforme. Se il bersaglio ha una struttura e, in prima approssimazione, pensiamo che la struttura elettrica e magnetica siano simili (ricordiamo da Lez.6, slide 20, che $G_E/G_M \sim$ costante o al più dipende debolmente in modo lineare da Q^2), allora possiamo generalizzare l'Eq. (9) come

$$
\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\pi\alpha^2}{t^2}\left(1+\frac{(s+t)^2}{s^2}\right) G^2(t)\;. \qquad (10)
$$

Questa espressione rientra nella casistica generale prevista dallo scaling dimensionale, secondo cui la sezione d'urto per scattering elastico $ab \to ab$ di una sonda con n_a costituenti su un bersaglio con n_b costituenti deve scalare come

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim \frac{1}{t^{2(n_a+n_b)-2}} \left| \mathcal{M}\left(\frac{t}{s}\right) \right|^2 . \tag{11}$$

Nel nostro caso, cioè $ep \to ep$, abbiamo $n_a = 1$ e $n_b = 3$. Da cui si deduce che

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &\sim \frac{1}{t^6} \left| \mathcal{M}\left(\frac{t}{s}\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{t^2} \frac{1}{t^4} \left| \mathcal{M}\left(\frac{t}{s}\right) \right|^2 . \end{aligned} \tag{12}$$

Confrontando quest'ultima espressione con l'Eq. (10) deduciamo che

$$\left| \mathcal{M}\left(\frac{t}{s}\right) \right|^2 = 2\pi\alpha^2 \left(1 + \frac{(s+t)^2}{s^2}\right) , \quad G(t) \sim \frac{1}{t^2} , \tag{13}$$

che corrisponde all'evidenza sperimentale.

In generale, per lo scattering elastico con sonda elettronica ($n_a = 1$) dal confronto dell'Eq. (11) con l'Eq. (10) si deduce che

$$G(t) \sim \frac{1}{t^{n_b - 1}} \tag{14}$$

Deduciamo ora la regola di Drell-Yan-West, secondo cui se vale l'Eq. (14), allora nel corrispondente caso di DIS la funzione di struttura F_2 nel limite asintotico elastico $x_B \to 1$ scala come

$$F_2(x_B) \sim (1 - x_B)^{2(n_b - 1) - 1} . \tag{15}$$

Partiamo dalla sezione d'urto per scattering elastico su bersaglio fermionico puntiforme. Dall'Eq. (1) e sfruttando i passaggi nelle note di Lez.6, slide 10, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{4M^2Q^4} \left(\frac{E'}{E}\right)^2 L_{\mu\nu}W^{\mu\nu} \\ &= \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \frac{E'}{E} \left[\cos^2\frac{\theta_e}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2\frac{\theta_e}{2}\right] \\ &= \sigma_{\mathrm{Mott}} \frac{E'}{E} \left[1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2\frac{\theta_e}{2}\right] . \end{aligned} \tag{16}$$

Se il bersaglio ha una struttura, possiamo fare la stessa approssimazione nel caso dell'Eq. (10):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\mathrm{Mott}} \frac{E'}{E} G^2(Q^2) \left[1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2\frac{\theta_e}{2}\right] . \tag{17}$$

Ora dimostriamo che la sezione d'urto inelastica su bersaglio fermionico con struttura, quando riscritta nel regime DIS dove le funz. di struttura scalano, ha una espressione simile a quella di Eq. (17). Infatti

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \sigma_{\text{Mott}} \, \frac{E'}{E} \left[W_2 + 2W_1 \, \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \\
& \quad \to \text{DIS} \\
&= \sigma_{\text{Mott}} \, \frac{E'}{E} \left[\frac{F_2}{\nu} + 2\frac{F_1}{M} \, \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \\
& \quad \text{Callan} - \text{Gross} \\
&= \sigma_{\text{Mott}} \, \frac{E'}{E} \, \frac{F_2}{\nu} \left[1 + \frac{\nu}{x_B M} \, \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \\
& \quad x_B \to 1 \quad \text{equivalentemente} \quad Q^2 = 2M\nu \quad \text{limite elastico} \\
&= \sigma_{\text{Mott}} \, \frac{E'}{E} \, \frac{F_2}{\nu} \left[1 + \frac{Q^2}{2M^2} \, \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \; , \qquad (18)
\end{aligned}$$

che ha la stessa struttura di Eq. (17), perciò mantiene le stesse caratteristiche anche se riscritta in termini delle variabili di Mandelstam, come in Eq. (10).

La sezione d'urto inelastica in regime DIS, e nel limite $x_B \to 1$, deve connettersi in modo continuo alla sezione d'urto elastica. Se ricordiamo la definizione della massa invariante per il processo di scattering

$$W^2 = (P+q)^2 = M^2 + Q^2 \left(\frac{1}{x_B} - 1 \right) \; , \qquad (19)$$

allora possiamo dire che

$$\frac{d\sigma}{dt}(ep \to e'p) = \int dW^2 \, \delta(W^2 - M^2) \, \frac{d\sigma}{dt dW^2}(ep \to e'X) \; . \qquad (20)$$

E siccome la struttura delle due sezioni d'urto, elastica a sinistra dell'uguale ed inelastica sotto il segno d'integrale, è la stessa (confronta Eq. (17) con Eq. (18)), la relazione qui sopra deve valere rispettivamente anche per il fattore di forma G e la funzione di struttura F_2:

$$\begin{aligned}
G^2(Q^2) \equiv G^2(t) &= \int dW^2 \, \delta(W^2 - M^2) \, \frac{F_2(\, (W^2 - M^2)/Q^2 \,)}{\nu} \\
&= \int dW^2 \, \delta(W^2 - M^2) \, \frac{F_2(\, (W^2 - M^2)/(-t) \,)}{s+u} \, 2M \\
&= 2M \int dW^2 \, \delta(W^2 - M^2) \, \frac{F_2(\, (W^2 - M^2)/(-t) \,)}{M^2 - t} \; , \qquad (21)
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà $s+t+u = M^2$ (e si è trascurata la massa dell'elettrone).

Nel limite elastico abbiamo $W^2 \to M^2$, cioè

$$\frac{W^2 - M^2}{Q^2} = \frac{1}{x_B} - 1 \to 0 \; , \qquad (22)$$

che corrisponde ovviamente a $x_B \to 1$. Se supponiamo che in regime DIS ($-t \to \infty$) l'andamento di F_2 sia del tipo $(\,(W^2 - M^2)/(-t)\,)^M$, allora dall'Eq. (21) abbiamo

$$G^2(t) \sim \frac{1}{t^{2n_b-2}} \leftrightarrow \frac{F_2}{M^2-t} \sim \left(\frac{W^2-M^2}{-t}\right)^M \frac{1}{M^2-t} \sim \frac{1}{t^{M+1}} \;, \tag{23}$$

cioè $M = 2n_b - 3$. Quindi per $-t \to \infty$ (regime DIS) e per $x_B \to 1$ la funzione di struttura F_2 si comporta come

$$F_2 \sim \left(\frac{W^2-M^2}{-t}\right)^{2n_b-3} = \left(\frac{1}{x_B} - 1\right)^{2n_b-3} \Rightarrow (1-x_B)^{2n_b-3} \;, \tag{24}$$

che è la relazione di Drell-Yan-West di Eq. (15).