

# Riassunto della lezione precedente

- compatibilità tra funz. d'onda  $SU(6)_S$  e statistica Fermi-Dirac per barioni; parastatistica fermionica dei quark; singoletto di  $SU(3)_C$  di colore e confinamento dei quark; colore non è numero quantico misurabile
- vari motivi per introdurre nuovo numero quantico per i quark (colore), spettroscopici e dinamici: problemi e soluzioni
- ripercorriamo la stessa necessità di ipotizzare i quark con n. quantici di spin/sapore/colore seguendo la dinamica, cioè l'analisi di processi inelastici a media/alta energia che ha portato alla nascita e al successo del modello a partoni di Feynman

Diffusione

leptone

–

adrone

(elettrone, neutrino, muone)

(nucleone, nucleo, fotone)

- Quantum ElectroDynamics (QED) nota ad ogni ordine

- sonda leptonica esplora tutto il volume del bersaglio

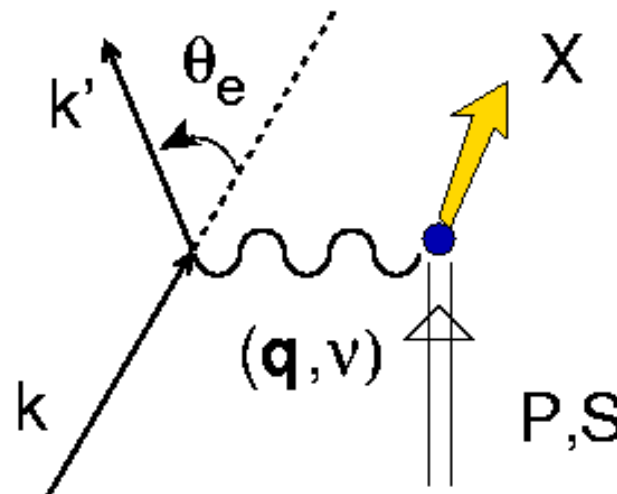
- $\alpha_{em} \sim$  costante struttura fine piccola  $\rightarrow$  sviluppo perturbativo possibile

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

- approssimazione di Born (scambio di un fotone solo) è accettabile

- fotone virtuale ( $\gamma^*$ ): ( $\mathbf{q}, \nu$ ) indipendenti, risposta longitudinale e trasversa rispetto alla polarizzazione di  $\gamma^*$

prototipo  
 $e+p \rightarrow e'+X$



3 vettori indipendenti  
 $k, k', P$   
+ lo spin  $S$   
 $\theta_e$  angolo di diffusione

# definizioni e cinematica

$e^-$  ultrarelativistico  $m_e \ll |\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'|$   
Target Rest Frame (TRF)

$$P = (M, \mathbf{0})$$
$$k = (\sqrt{m_e^2 + |\mathbf{k}|^2}, 0, 0, |\mathbf{k}|)$$
$$\sim (E, 0, 0, E)$$
$$k' = (\sqrt{m_e^2 + |\mathbf{k}'|^2}, |\mathbf{k}'| \sin \theta_e, 0, |\mathbf{k}'| \cos \theta_e)$$
$$\sim (E', E' \sin \theta_e, 0, E' \cos \theta_e)$$
$$q = k - k' = (E - E', \mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

Invarianti cinematici

$$P^2 = M^2 \quad ; \quad S^2 = 1 \quad ; \quad P \cdot S = 0$$
$$k^2 = k'^2 = m_e^2 \sim 0$$
$$q^2 \sim -2EE'(1 - \cos \theta_e) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \leq 0$$
$$\implies Q^2 \equiv -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \geq 0$$

## Invarianti cinematici (continua)

$$\nu = \frac{P \cdot q}{M} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{M(E - E')}{M} = E - E' \quad \text{energia trasferita}$$

$$y = \frac{P \cdot q}{P \cdot k} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{M(E - E')}{ME} = \frac{E - E'}{E} \quad \text{frazione di energia trasferita}$$

$$0 \leq y \leq 1$$

$$x_B = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \stackrel{\text{TRF}}{=} \frac{Q^2}{2M\nu}$$

$$0 \leq x_B \leq 1$$

← limite elastico  
 ← limite anelastico

massa invariante finale

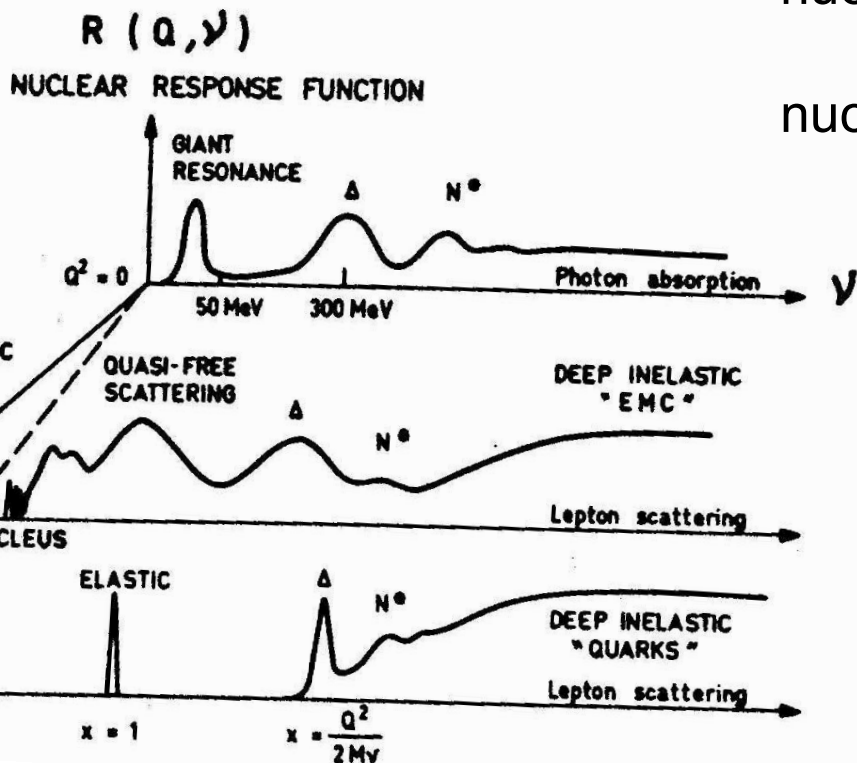
$$W = (P + q)^2 = M^2 + Q^2 \left( \frac{1}{x_B} - 1 \right) \geq M^2$$

Q è la “lente di ingrandimento”

Q [GeV]	$\lambda \sim 1/Q$ [fm]	bersaglio
0.02	10	nuclei
0.1	2	
0.2	1	mesoni / barioni
1	0.2	partoni
.....	.....	??

N.B. 1 fm = (200 MeV)<sup>-1</sup>

Frois, Nucl. Phys. **A434** (' 85) 57c



nucleo  $M_A$   $x_A = \frac{Q^2}{2M_A\nu}$   
 nucleone  $M$   $x_B = \frac{Q^2}{2M\nu}$

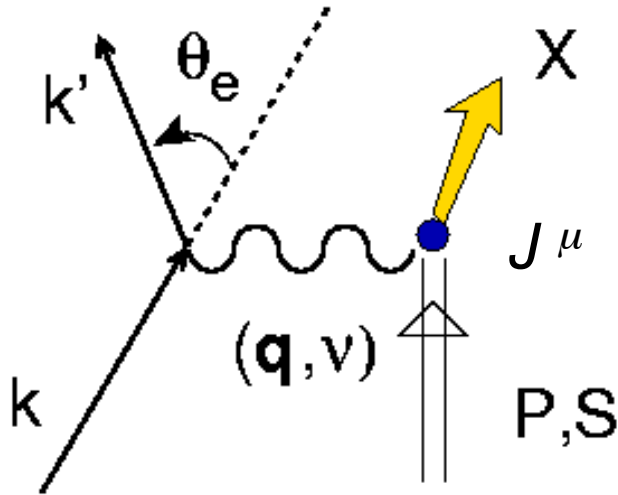
area proibita  $\nu \leq \frac{Q^2}{2M_A}$



# Sezione d'urto

$n^\circ$  eventi per unita` di tempo, diffusore, angolo solido

$n^\circ$  particelle incidenti per unita` di tempo, superficie



$$d\sigma = \frac{1}{\mathcal{F}} |\mathcal{M}|^2 dR$$

flusso

$$\mathcal{F} = 4\sqrt{(P \cdot k)^2 - P^2 k^2} \stackrel{\text{TRF}}{=} 4ME$$

spazio fasi

$$dR = (2\pi)^4 \delta(P + q - P_X) \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2E'}$$

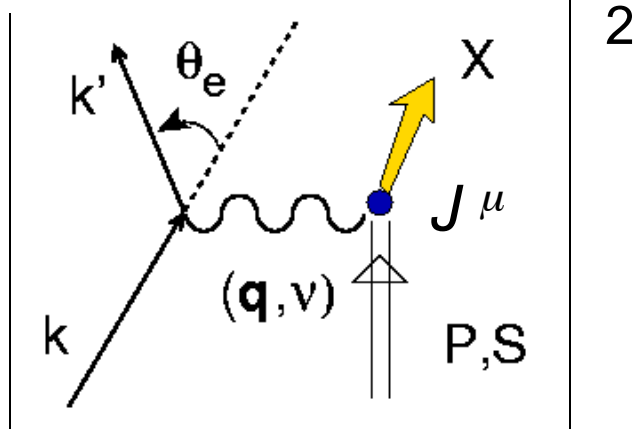
$$\frac{E' dE' d\Omega}{16\pi^3}$$

ampiezza scattering

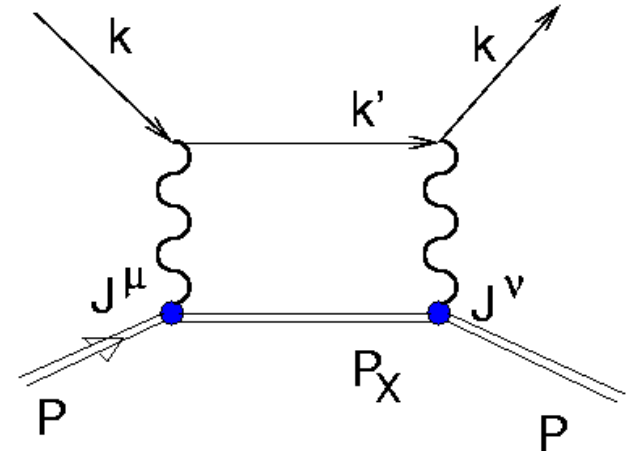
$$\mathcal{M} = \bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \frac{e^2}{Q^2} \langle P_X | J^\mu(0) | P, S \rangle$$

# Tensore adronico

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spin}}$$



=



$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$$

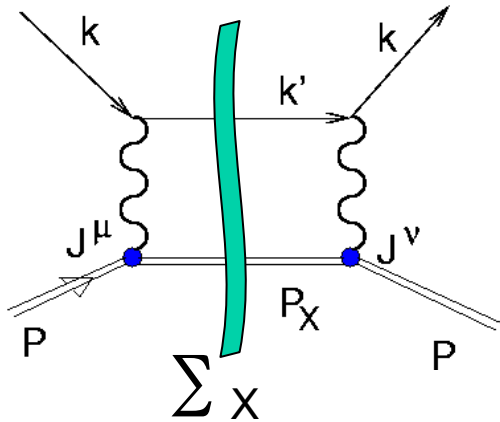


tensore leptónico  $L^{\mu\nu} = 2k^\mu k'^\nu + 2k^\nu k'^\mu - Q^2 g^{\mu\nu}$

tensore adronico  $H^{\mu\nu} = \langle P | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | P \rangle$



# Scattering inclusivo



tensore adronico

$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \sum_X \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(P+q-P_X) H^{\mu\nu}$$

sezione d'urto per scattering inclusivo (formula generale)



$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{E'}{E} \frac{\alpha^2}{Q^4} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

$$Q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta_e}{2} \quad \text{grandi angoli soppressi !}$$

# Scattering inclusivo elastico

$$\sum_X \dots |P_X\rangle \langle P_X| \dots = \dots |P'\rangle \langle P'| \dots \quad W' = (P+q)^2 = M^2$$

tensore adronico

$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \sum_X \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(P+q-P_X) H^{\mu\nu}$$

$$= \delta((P+q)^2 - M^2) H^{\mu\nu} = \delta(2P \cdot q - Q^2) H^{\mu\nu}$$



$$\stackrel{\text{TRF}}{=} \delta(2M\nu - Q^2) H^{\mu\nu} = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) H^{\mu\nu}$$

$\nu \leftrightarrow Q$  : concetto di scaling

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{E'}{E} \frac{\alpha^2}{4M^2 Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

vari casi

$$\int dE' \frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \frac{\alpha^2}{4M^2 Q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}$$

## Bersaglio = particella scalare libera

$$H^{\mu\nu} = \langle P | J^\mu | P' \rangle \langle P' | J^\nu | P \rangle$$

2 vettori indipendenti :  $R = P + P'$  ,  $q = P - P'$   $\Rightarrow J^\mu \approx F_1 R^\mu + F_2 q^\mu$   
 $F_{1,2}(q^2, P^2, P'^2) = F_{1,2}(q^2)$

conservazione della corrente  $q_\mu J^\mu = 0 \rightarrow F_2(q^2) = -\frac{R \cdot q}{q^2} F_1(q^2)$

definizione :  $\tilde{P}^\mu = R^\mu - \frac{R \cdot q}{q^2} q^\mu \rightarrow J^\mu = \tilde{P}^\mu F_1(Q^2)$

N.B. per particella on-shell  $q \cdot R = 0$  ; ma in generale per off-shell  $q \cdot \tilde{P} = 0$

$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} = \left( 2k \cdot \tilde{P} k' \cdot \tilde{P} - \tilde{P}^2 k \cdot k' \right) 2 |F_1(Q^2)|^2$$

$$\stackrel{\text{TRF}}{\sim} 16EE' M^2 |F_1(Q^2)|^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2}$$



# Scattering inclusivo elastico su particella scalare libera

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2}{Q^4} E'^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \frac{E'}{E} |F_1(Q^2)|^2 \equiv \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} |F_1(Q^2)|^2$$



Coulomb scattering elastico da  
particella puntiforme

rinculo  
bersaglio

struttura  
bersaglio

## Breit frame $\Rightarrow$ fattore di forma

$$P = -q/2$$



$$P' = +q/2$$

$$v = 0$$

$$R^\mu = (2E, \mathbf{0})$$

$$q^\mu = (0, \mathbf{q})$$

$$J^\mu = (J^0, \mathbf{0}) \approx 2E F_1(Q^2)$$



$$F_1(Q^2) \rightarrow F_1(|\mathbf{q}|^2) = \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}$$

↑  
 fattore di forma di  
 carica  
 materia  
 .....

↑  
 distribuzione di  
 carica  
 materia  
 .....

# Bersaglio = particella di Dirac libera puntiforme

Esempio:  $e^- + \mu^- \rightarrow e'^- + \mu^-$

$$J^\mu = \bar{u}(P') \gamma^\mu u(P)$$

$$H^{\mu\nu} \equiv L^{\mu\nu} \quad \text{with } k^{(l)} \leftrightarrow P^{(l)}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (\not{P}' + M) \gamma^\mu (\not{P} + M) \gamma^\nu \right] \\ &= 2 \left[ P'^\mu P^\nu + P'^\nu P^\mu - (P \cdot P' - M^2) g^{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$



$$L_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \stackrel{\text{TRF}}{=} 16EE'M^2 \cos^2 \frac{\theta_e}{2} \left( 1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right)$$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left( 1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right)$$

↑  
interazione  
magnetica di  
spin con  $\gamma^*$

## Bersaglio = particella di Dirac libera con struttura

3 vettori indipendenti  $P^\mu, P'^\mu, \gamma^\mu$  (+ invarianza per time-reversal, parità)

$$J^\mu = \bar{u}(P') \Gamma^\mu u(P) = \bar{u}(P') \left[ \Gamma_1 P^\mu + \Gamma_2 P'^\mu + \Gamma_3 \gamma^\mu \right] u(P)$$

$$\Gamma_i(Q^2, P^2, P'^2) \equiv \Gamma_i(Q^2)$$

conservazione della corrente  $q_\mu J^\mu = 0$

$$\begin{aligned} q_\mu \bar{u}(P') \Gamma^\mu u(P) &= \\ &= \bar{u}(P') \left[ \Gamma_1 P \cdot (P' - P) + \Gamma_2 P' \cdot (P' - P) + \Gamma_3 \gamma \cdot (P' - P) \right] u(P) \\ &= \bar{u}(P') \left[ (P \cdot P' - M^2) (\Gamma_1 - \Gamma_2) + \Gamma_3 (\not{P}' - \not{P}) \right] u(P) = 0 \\ &\Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2 \end{aligned}$$

$$J^\mu = \bar{u}(P') \left[ \Gamma_1(Q^2) \not{P} + \Gamma_3(Q^2) \gamma^\mu \right] u(P)$$

**eq. di Dirac**  
 $\not{P}u = Mu$   
 $\bar{u}\not{P} = \bar{u}M$

## Decomposizione di Gordon (on-shell)

$$J^\mu = \bar{u}(P') \left[ \Gamma_1(Q^2) R^\mu + \Gamma_3(Q^2) \gamma^\mu \right] u(P)$$

$$\bar{u} \gamma^\mu u = \bar{u} \left[ \frac{R^\mu}{2M} + \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u \quad \text{with } \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

cioè  $R^\mu \Leftrightarrow 2M \gamma^\mu - i \sigma^{\mu\nu} q_\nu$

### proof flow-chart

- da destra, inserire def. di  $\sigma^{\mu\nu}$
- usare eq. di Dirac
- usare  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu}$
- usare eq. Dirac  $\rightarrow$  sinistra



$$J^\mu = \bar{u}(P') \left[ F_1(Q^2) \gamma^\mu + \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2(Q^2) \right] u(P)$$

$$F_1 = 2M\Gamma_1 + \Gamma_3 \quad \text{Dirac form factor} \quad F_1(0) = 1$$

$$F_2 = -2M\Gamma_1 \quad \text{Pauli form factor} \quad F_2(0) = \kappa$$



# Bersaglio = particella di Dirac libera e composita

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} H^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (\not{P}' + M) \Gamma^\mu (\not{P} + M) \Gamma^\nu \right]$$

$$\Gamma^\mu = F_1 \gamma^\mu + \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2$$

.....

Sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \left[ \left( F_1^2 + \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) + \frac{Q^2}{2M^2} (F_1 + F_2)^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2M} \right)$$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[ \left( F_1^2 + \frac{Q^2}{4M^2} F_2^2 \right) + \frac{Q^2}{2M^2} (F_1 + F_2)^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

struttura interna  
(difficilmente separabile)

## Formula di Rosenbluth

Definizione fattori  
di forma di Sachs

(Yennie, 1957)

$$G_E(Q^2) = F_1(Q^2) - \tau F_2(Q^2) \quad \text{with } \tau = \frac{Q^2}{4M^2}$$
$$G_M(Q^2) = F_1(Q^2) + F_2(Q^2)$$

N.B.: infatti, in Breit frame + riduzione nonrel.  $\Rightarrow$

$$J^0 \sim G_E$$
$$\mathbf{J} \sim \frac{G_M}{2M} \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}$$

distribuzione di carica/magnetica  
del bersaglio




$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$
$$\equiv \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[ A(Q^2) + B(Q^2) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

separazione più facile

## Separazione di Rosenbluth

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{\text{Mott}} \frac{E'}{E} \left[ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]$$

- larghi  $\theta_e$  (larghi  $Q^2$ )  $\rightarrow$  estrarre  $G_M$
- piccoli  $\theta_e$  (piccoli  $Q^2$ )  $\rightarrow$  estrarre  $G_E$  per differenza
- Rosenbluth plot


$$\epsilon (1 + \tau) \frac{E}{E'} \frac{1}{\sigma_{\text{Mott}}} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \epsilon G_E^2 + \tau G_M^2 \quad \epsilon = \left[ 1 + 2(1 + \tau) \tan^2 \frac{\theta_e}{2} \right]^{-1}$$

polarizz. longitudinale di  $\gamma^*$

misure con diverse  $(E, \theta_e) \rightarrow$  plot in  $\epsilon$  a fisso  $Q^2$

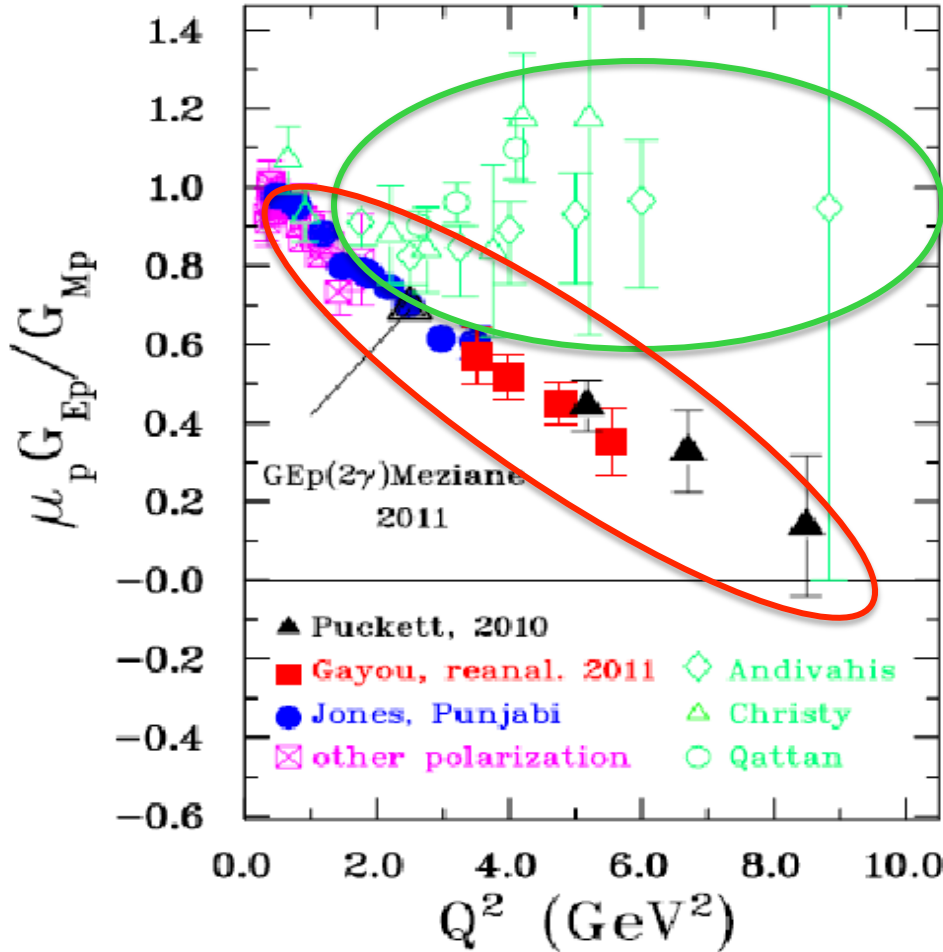
intercetta a  $\epsilon = 0 \rightarrow G_M$   
pendenza in  $\epsilon \rightarrow G_E$

## Separazione di Rosenbluth

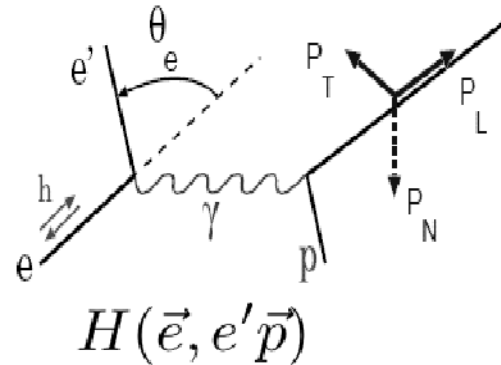
$$\mu_p \frac{G_E^p}{G_M^p} \rightarrow \text{cost} \quad \longrightarrow \quad F_2 \sim \frac{F_1}{Q^2}$$



pQCD scaling



Metodo del trasferimento di polarizzazione:



$$H(\vec{e}, e' \vec{p})$$

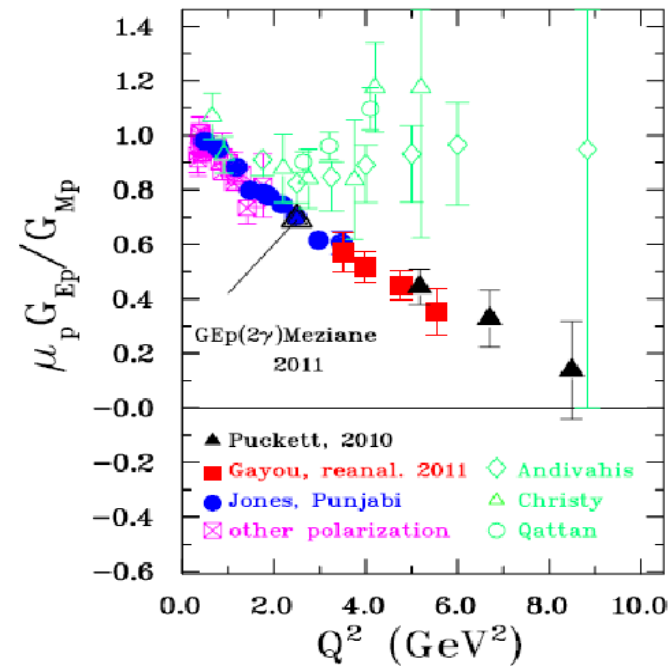
$$d\sigma = d\sigma^0 [1 + h (A + \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{s}})]$$



$$P_T = -h \sqrt{\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)}{\tau}} \frac{G_E}{G_M} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{G_E^2}{G_M^2}}$$

$$P_L = h \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1 + \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{G_E^2}{G_M^2}}$$

$$\frac{P_T}{P_L} \propto \frac{G_E}{G_M}$$



“Rosenbluth”

$$F_2 \sim \frac{F_1}{Q^2}$$

“Polariz. Transfer”  
no !

invece  $F_2 \sim \frac{F_1}{Q}$



$Q^2 \sim 10 \text{ (GeV/c)}^2$  lo scaling non è ancora raggiunto !  
non è ancora regime perturbativo !

proton

