Riassunto della lezione precedente

• e+e- inclusivo: OPE per quark liberi equivalente a QPM
DIS inclusivo: serie OPE organizzabile in serie di potenze $(M/Q)^n$; twist

• OPE dimostrabile solo per processi inclusivi;
approccio diagrammatico per processi semi-inclusivi

• dominanza cinematica Light-Cone (LC) in regime DIS;
definizione variabili LC;
equivalenza tra LC e Infinite Momentum Frame (IFM)

Algebra di Dirac sul light-cone

rappresentazione usuale delle matrici di Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

così (anti-)particelle hanno solo componenti upper (lower) nello spinore di Dirac

nuova rappresentazione per teoria di campo light-cone

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma}_\perp = \begin{pmatrix} i\boldsymbol{\sigma}_\perp & 0 \\ 0 & i\boldsymbol{\sigma}_\perp \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ok

definizioni : $\gamma^\pm = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0 \pm \gamma^3)$ $\qquad P_\pm = \dfrac{1}{2}\gamma^\mp\gamma^\pm$

proiettori $(P_\pm)^2 = P_\pm \quad ; \quad P_+ P_- = P_- P_+ \quad , \quad P_+ + P_- = \mathbb{1}$

$$P_+ = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad |\psi\rangle = \left| \begin{array}{c} \phi \\ \chi \end{array} \right| \quad , \quad P_+|\psi\rangle = \phi\ ,\ P_-|\psi\rangle = \chi$$

Proiettare eq. di Dirac

$$P_\pm \quad (i\gamma \cdot D + m)\begin{vmatrix}\phi \\ \chi\end{vmatrix} = 0 \qquad\qquad D_\pm = \partial_\pm - igA^\mp$$

$$\begin{cases} i\gamma^- D_- \chi &= -i\boldsymbol{\gamma}_\perp \mathbf{D}_\perp \phi - m\phi \\ i\gamma^+ D_+ \phi &= -i\boldsymbol{\gamma}_\perp \mathbf{D}_\perp \chi - m\chi \end{cases} \longleftarrow$$

non contiene "tempo" x^+ :
χ dipende da ϕ e $\mathbf{A}_\perp$ a x^+ fissato
ϕ, $\mathbf{A}_\perp$ gradi di libertà indipendenti

$$|\psi\rangle = \begin{vmatrix}\phi \\ \chi\end{vmatrix} \begin{matrix}\longleftarrow \\ \longleftarrow\end{matrix}$$

"good"
"bad"

componenti light-cone

$$P_+|\psi\rangle$$
$$P_-|\psi\rangle$$

componenti "good" → componenti indipendenti e leading
componenti "bad" → dipendenti dall'interazione (quark-gluone)
e pertanto di ordine superiore

Stati di spin per quark

generatore delle rotazioni di spin intorno a z $\Sigma^3 = \frac{i}{2}[\gamma^1, \gamma^2] = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

se momento k || z, misura l'elicità

γ^1, γ^2, γ_5 commutano con $P_\pm$ $\rightarrow$ 2 possibili scelte :

- diagonalizzare γ_5 e Σ^3 $\rightarrow$ base di elicità
- diagonalizzare γ^1 (o γ^2) $\rightarrow$ base di "trasversità"

N.B. in base di elicità $\gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$ $\Sigma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

elicità = chiralità per componente "good" ϕ

elicità = - chiralità per componente "bad" χ

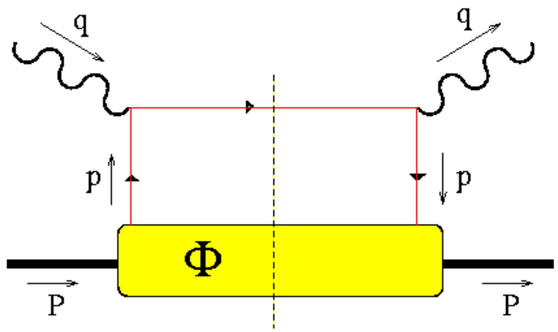
N.B. proiettore di polarizzazione trasversa $P_{\uparrow/\downarrow} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \gamma_5\,\gamma^1\right)$ $\left[P_{\uparrow/\downarrow}\,,\,P_\pm\right] = 0$

definiamo $P_{\uparrow/\downarrow}\,\phi = \phi_{\perp/\mathsf{T}} = f(\phi_\pm)$

$\phi_{\perp/\mathsf{T}}$ non sono autostati dell'operatore di spin trasverso !

$$\Sigma^1 = \gamma_5\gamma_0\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 \\ -i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riprendiamo risultato OPE per DIS inclusivo



contributo dominante in OPE

$$2MW^{\mu\nu} \quad \sim \quad \sum_f e_f^2 \int d^4p\, \delta((p+q)^2 - m^2)\, \theta(p^0 + q^0 - m)$$

$$\mathrm{Tr}\left[\Phi(p,P)\, \gamma^\mu\, (\not p + \not q + m)\, \gamma^\nu + \overline{\Phi}(p,P)\, \gamma^\nu\, (\not p + \not q - m)\, \gamma^\mu\right]$$

$$\begin{aligned} \Phi(p,P) \quad &= \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4}\, e^{-ip\cdot\xi}\, \langle P|\bar\psi_f(\xi)\, \psi_f(0)|P\rangle \\ &= \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \langle P|\bar\psi_f(0)\,|P_X\rangle\langle P_X|\psi_f(0)|P\rangle\, \delta(P - p - P_X) \end{aligned}$$

Φ operatore bilocale, contiene twist ≥ 2

IFM ($Q^2 \to \infty$) ⇒ isolare contributo leading in 1/Q
equivalentemente calcoliamo Φ sul Light-Cone (LC)

Contributo leading

$$\begin{cases} P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp\right) \xrightarrow{A=Q} P^\mu \sim \left(Q, \frac{1}{Q}, \mathbf{0}_\perp\right) \xrightarrow{Q^2\to\infty} (Q, 0, \mathbf{0}_\perp) \\ p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(xA, \frac{p^2+\mathbf{p}_\perp^2}{xA}, \mathbf{p}_\perp\right) \xrightarrow{A=Q} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(xQ, \frac{p^2+\mathbf{p}_\perp^2}{xQ}, \mathbf{p}_\perp\right) \sim (Q, 0, \mathbf{0}_\perp) \\ q^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x_N A, \frac{Q^2}{x_N A}, \mathbf{0}_\perp\right) \xrightarrow{A=Q} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-x_N Q, \frac{Q}{x_N}, \mathbf{0}_\perp\right) \end{cases}$$

N.B. $p^+ \sim Q \to (p+q)^- \sim Q$

$$\begin{aligned} 2MW^{\mu\nu} &= \sum_f e_f^2 \int d^4p\, \delta((p+q)^2 - m^2)\, \theta(p^0 + q^0 - m) \\ &\qquad \times \mathrm{Tr}\left[\Phi(p,P)\, \gamma^\mu\, (\gamma\cdot p + \gamma\cdot q + m)\, \gamma^\nu\right] \\ &\sim \frac{1}{2}\sum_f e_f^2 \int dp^- d\mathbf{p}_\perp\, \mathrm{Tr}\left[\Phi(p,P)\, \gamma^\mu\, \gamma^+\, \gamma^\nu\right]\Big|_{p^+=xP^+} \end{aligned}$$

$$\delta(p^+ + q^+) = \delta(xP^+ - x_N P^+) \;\to\; x \sim x_N \sim x_B$$

(analogamente per antiquark)

(continua)

- decomposizione della matrice di Dirac Φ(p,P,S) sulla base delle strutture di Dirac e dei 4-(pseudo)vettori p,P,S compatibilmente con Hermiticity e invarianza per parità

$$\begin{aligned}\Phi(p,P,S) &= \gamma^0\,\Phi^\dagger(p,P,S)\,\gamma^0 \\ \Phi(p,P,S) &= \gamma^0\,\Phi(\tilde{p},\tilde{P},-\tilde{S})\,\gamma^0\end{aligned}$$

base di Dirac $\mathbb{1}\,,\ i\gamma_5\,,\ \gamma^\mu\,,\ \gamma^\mu\gamma_5\,,\ \sigma^{\mu\nu}\,,\ i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5$ $\qquad \tilde{a}^\mu = (a_0, -\mathbf{a})$

$$\begin{aligned}\Phi(p,P,S) &= A_1 M + A_2\,\not{P} + A_3\,\not{p} + A_4\sigma_{\mu\nu}\,P^\mu p^\nu + iA_5 p\cdot S\gamma_5 + A_6 M\,\not{S}\gamma_5 \\ &+ A_7\frac{p\cdot S}{M}\,\not{P}\gamma_5 + A_8\frac{p\cdot S}{M}\,\not{p}\gamma_5 + iA_9\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 S^\mu P^\nu + iA_{10}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 S^\mu p^\nu \\ &+ iA_{11}\frac{p\cdot S}{M^2}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 P^\mu p^\nu + A_{12}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\,\frac{\gamma^\mu P^\nu p^\rho S^\sigma}{M}\end{aligned}$$

time-reversal $\rightarrow$ 0

$$\Phi^*(p,P,S) = -\mathrm{i}\gamma^1\gamma^3\,\Phi(\tilde{p},\tilde{P},\tilde{S})\,\mathrm{i}\,\gamma^1\gamma^3$$

$$\mathrm{Tr}\left[\Phi(p,P)\,\gamma^\mu\,\gamma^+\,\gamma^\nu\right]\Big|_{p^+=xP^+} = -4g_\perp^{\mu\nu}\,\underbrace{(A_2 + xA_3)\;P^+}_{\int dp^- d\mathbf{p}_\perp\ldots|_{p^+=xP^+}}$$

$\longrightarrow$ $q_f(x)$

idem per antiquark

$$\Downarrow$$

$$2MW^{\mu\nu} \sim -g_\perp^{\mu\nu}\,\frac{1}{2}\sum_f e_f^2\,[q_f(x) + \bar{q}_f(x)] + o\left(\frac{1}{Q}\right)$$

(continua)

$$2MW^{\mu\nu} \sim -g_\perp^{\mu\nu} \underbrace{\frac{1}{2} \sum_f e_f^2 \left[q_f(x) + \bar{q}_f(x) \right]}_{F_1(x_B)} + o\left(\frac{1}{Q}\right)$$

$x \approx x_B$ $\qquad$ $F_1(x_B)$ $\rightarrow$ risultato di QPM

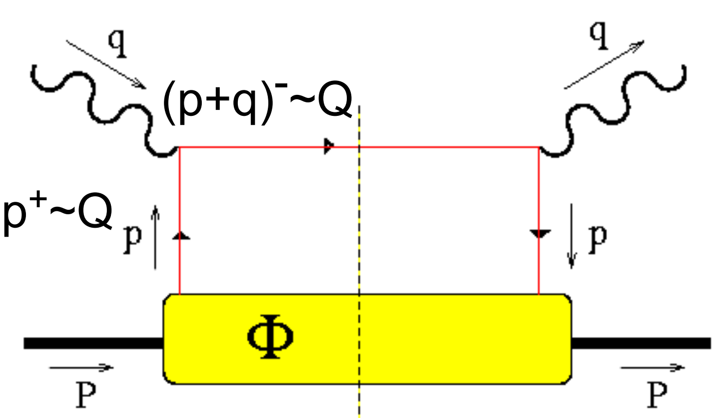
$$W^{\mu\nu} = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) W_1 + \frac{\tilde{P}^\mu \tilde{P}^\nu}{M^2} W_2$$

W_1 risposta a polarizzazione trasversa di γ^* $\longrightarrow -g_\perp^{\mu\nu} F_1$

Morale :

operatore bilocale Φ ha twist ≥ 2 ; il contributo a leading twist si ottiene in IFM selezionando il termine dominante in 1/Q ($Q^2 \rightarrow \infty$) ; equivalentemente calcolando Φ sul LC

al leading twist (t=2) si ritrova risultato di QPM per $W^{\mu\nu}$ non polarizzato; ma qual è il risultato generale a t=2 ?



Decomposizione di Φ al leading twist

Base di matrici di Dirac $\{\mathbb{1}\ ,\ \gamma^\mu\ ,\ \gamma^\mu\gamma_5\ ,\ i\gamma_5\ ,\ i\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\}$

$$\Phi(p,P,S) = \frac{1}{2}\left[S\,\mathbb{1} + V_\mu\,\gamma^\mu + A_\mu\,\gamma^\mu\gamma_5 + iP\,\gamma_5 + iT_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu}\ \gamma_5\right]$$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\Phi) = C_1(p^2, p\cdot P) \\
V^\mu &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\,\Phi) = C_2\,P^\mu + C_3\,p^\mu \\
A^\mu &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma_5\,\Phi) = C_4\,S^\mu + C_5\,p\cdot S\,P^\mu + C_6\,P\cdot S\,p^\mu \\
P_5 &= \frac{1}{2i}\mathrm{Tr}(\gamma_5\,\Phi) = 0 \\
T^{\mu\nu} &= \frac{1}{2i}\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu\nu}\,\Phi) = C_7\,P^{[\mu}S^{\nu]} + C_8\,p^{[\mu}S^{\nu]} + C_9\,p\cdot S\,P^{[\mu}p^{\nu]}
\end{aligned}$$

Tr [γ^+…] $\rightarrow$ $$q_f(x) = \Phi^{[\gamma^+]} = \int \frac{d\xi^-}{2\pi}\,e^{-ixP^+\xi^-}\,\langle P|\bar\psi_f(\xi^-)\,\gamma^+\,\psi_f(0)|P\rangle$$

Tr [$\gamma^+\gamma_5$…] $\rightarrow$ $$\Delta q_f(x) = \Phi^{[\gamma^+\gamma_5]} = \int \frac{d\xi^-}{2\pi}\,e^{-ixP^+\xi^-}\,\langle P|\bar\psi_f(\xi^-)\,\gamma^+\gamma_5\,\psi_f(0)|P\rangle$$

Tr [$\gamma^+\gamma^i\,\gamma_5$…] $\rightarrow$ $$\delta q_f(x) = \Phi^{[i\sigma^{i+}\gamma_5]} = \int \frac{d\xi^-}{2\pi}\,e^{-ixP^+\xi^-}\,\langle P|\bar\psi_f(\xi^-)\,i\sigma^{i+}\gamma_5\,\psi_f(0)|P\rangle$$