Riassunto lezione precedente

- proprietà di SU(N), rappresentazioni fondamentale, regolare, coniugata; operatore di Casimir e classificazione dei multipletti; esempi di SU(2) e di SU(3)

- rappresentazione fondamentale di SU(2) per sistemi di due o tre particelle; proprietà di simmetria degli stati

- estensione a SU(3) per sistemi di due o tre particelle; stati simmetrici, antisimmetrici, e a simmetria mista; notazione spettroscopica

SU(N) e i tableaux di Young

SU(2): $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle$

$|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle, |\chi_3\rangle$

SU(3): $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle$

$|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle, |\chi_3\rangle$

SU(6): $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle, |\chi_3\rangle \otimes (\uparrow, \downarrow)$

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3}_S \oplus \mathbf{1}_A$$
$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4}_S \oplus \mathbf{2}_{M_S} \oplus \mathbf{2}_{M_A}$$
$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6}_S \oplus \overline{\mathbf{3}}_A$$
$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_{M_S} \oplus \mathbf{8}_{M_A} \oplus \mathbf{1}_A$$
$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{56}_S \oplus \mathbf{70}_{M_S} \oplus \mathbf{70}_{M_A} \oplus \mathbf{20}_A$$

…. c'è una procedura automatica per calcolare le dimensioni delle rappresentazioni irriducibili?

I tableaux di Young

identificazione rappresentazioni di **SU(N)**

rappresentazione fondamentale N a dim.N = $\square$

rappresentazione coniugata N* = $\left.\begin{array}{c}\square\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \square\end{array}\right\}$ N-1 quadrati

tableaux di Young: prodotto di rappresentazioni

$$\square \otimes \square = \square\square \oplus \begin{array}{c}\square\\ \square\end{array}$$

$$N \quad N = \; ? \qquad ?$$

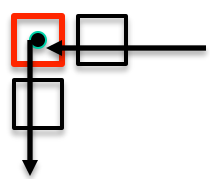
come calcolare le dimensioni delle rappresentazioni prodotto?

dimensioni = $\dfrac{\text{numeratore}}{\text{denominatore}}$

numeratore =

N	N+1	N+2
N-1	N	N+1
N-2	N-1	N
N-3		

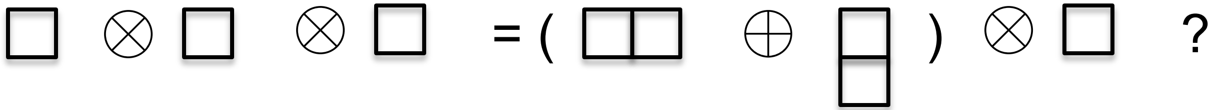
= prodotto dei numeri in tutte le caselle

“gancio” =  = nr. di caselle attraversate

denominatore = prodotto dei “ganci” di tutte le caselle

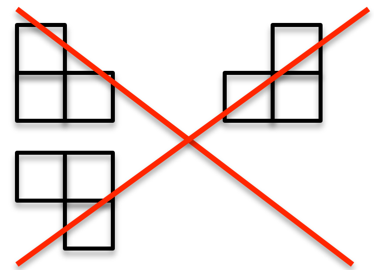
quindi dim. $\square \otimes \square = \underset{\text{stato S}}{\square\square} \oplus \underset{\text{A}}{\begin{array}{c}\square\\ \square\end{array}} = \dfrac{N(N+1)}{2} \oplus \dfrac{N(N-1)}{2}$

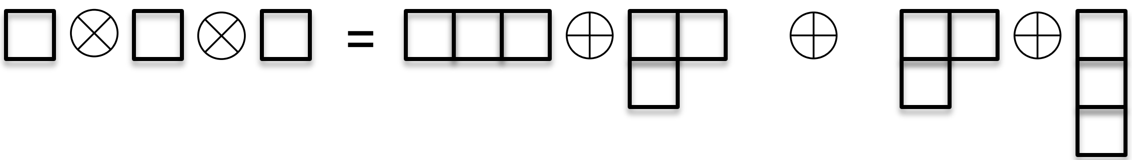
continua



si combinano le caselle in tutti i modi purché

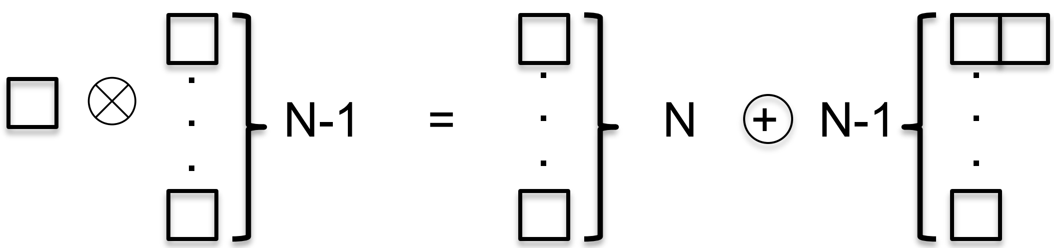
- no figure concave verso l'alto
- no figure concave verso il basso a sinistra





$$N \otimes N \otimes N = \frac{N(N+1)(N+2)}{6} \oplus \frac{(N-1)N(N+1)}{3} \oplus \frac{(N-1)N(N+1)}{3} \oplus \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$$

per strutture mesoniche, cioè "quarkonio"



$$N \otimes N^* = 1 \oplus (N^2 - 1)$$

spettro mesonico e simmetria degli stati

mesone = $\{q\bar{q}\}$ con q = u,d,s ➔ nonetto

quark	carica	stranezza	stati
$u\bar{d}$	1	0	π^+ ρ^+
$d\bar{u}$	-1	0	π^- ρ^-
$u\bar{u}$	0	0	π^0 ρ^0
$d\bar{d}$			η^0 ω^0
$s\bar{s}$			η'^0 ϕ^0
$u\bar{s}$	1	1	K^+ K^{*+}
$d\bar{s}$	0		K^0 K^{*0}
$\bar{u}s$	-1	-1	K^- K^{*-}
$\bar{d}s$	0		$\bar{K}^0$ $\bar{K}^{*0}$

come distinguere ?

Ex: stati a C=0 S=0

come distinguere

singoletto da ottetto ?

iso-singoletto da iso-tripletto ?

distinzione per G parità e carica C

➔ ogni $|\chi\rangle$ si sdoppia in $|\chi\rangle_S$ e $|\chi\rangle_A$

spin dei quark: $SU(3)_f \rightarrow SU(6) = SU(3)_f \times SU(2)$

se quark avessero spin=0 allora avremmo spettro $\{q\,\bar{q}\}$

L=0	$J^P=0^+$	scalari
L=1	$J^P=1^-$	vettori
L=2	$J^P=2^+$	tensori
…	…	…

massa

invece spettro è 0^- pseudoscalari
1^- vettori
… …

compatibile con spin=½ : $\mathbf{\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0}$

|χ> rappr. di SU(3) di sapore
|φ> rappr. di SU(2) di spin

rappr. di SU(6) per 0^-,1^- sono $\boxed{\begin{array}{l} |\chi\rangle_A\,|\varphi\rangle_S \\ |\chi\rangle_S\,|\varphi\rangle_A \end{array}}$

$$|\chi\rangle_S^i \;\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\right\rangle$$

$$|\chi\rangle_A^i \;|\uparrow\uparrow\rangle \qquad |\chi\rangle_A^i \;|\downarrow\downarrow\rangle$$

$$|\chi\rangle_A^i \;\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\right\rangle$$

i= 0 (singoletto), 1…8 (ottetto)

In totale 36 stati, cioè $\mathbf{6 \otimes \bar{6} = 1 \oplus 35}$

conseguenza di spin(q)=½ e

SU(6) e spettro dei mesoni

quark	stati
$1/\sqrt{2}\,(u\bar{d} \pm \bar{d}u)$	π^+ ρ^+
$-1/\sqrt{2}\,(d\bar{u} \pm \bar{u}d)$	π^- ρ^-
$½\,[(d\bar{d}-u\bar{u}) \pm (\bar{d}d-\bar{u}u)]$	π^0 ρ^0
$1/\sqrt{6}\,[(u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}) \pm (\bar{u}u+\bar{d}d+\bar{s}s)]$	η_1 ω_1
$1/(2\sqrt{3})\,[(u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}) \pm (\bar{u}u+\bar{d}d-2\bar{s}s)]$	η_8 ω_8
$1/\sqrt{2}\,(u\bar{s} \pm \bar{s}u)$	K^+ K^{*+}
$1/\sqrt{2}\,(d\bar{s} \pm \bar{s}d)$	K^0 K^{*0}
$-1/\sqrt{2}\,(s\bar{u} \pm \bar{u}s)$	K^- K^{*-}
$-1/\sqrt{2}\,(s\bar{d} \pm \bar{d}s)$	$\bar{K}^0$ $\bar{K}^{*0}$

SU(6) e spettro dei barioni

$$SU(6) = SU(3) \otimes SU(2)$$

$|\chi_1\rangle\,|\chi_2\rangle\,|\chi_3\rangle$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10}_S \oplus \mathbf{8}_{M_S} \oplus \mathbf{8}_{M_A} \oplus \mathbf{1}_A$$

$|\varphi_1\rangle\,|\varphi_2\rangle\,|\varphi_3\rangle$

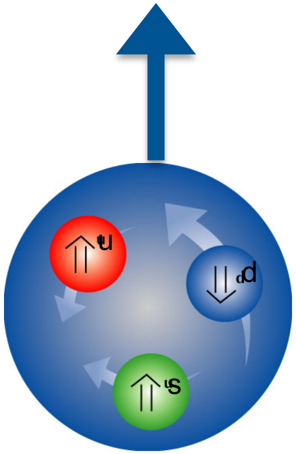
$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4}_S \oplus \mathbf{2}_{M_S} \oplus \mathbf{2}_{M_A}$$

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{56}_S \oplus \mathbf{70}_{M_S} \oplus \mathbf{70}_{M_A} \oplus \mathbf{20}_A$$

simmetria	stati	
S	$|\chi\rangle_S\,|\varphi\rangle_S$ = (**10**,**4**) ← Δ	
	$1/\sqrt{2}\,(\chi_{MS}\varphi_{MS}+\chi_{MA}\varphi_{MA})$ = (**8**,**2**) ← N	
M_S M_A	$\chi_S\varphi_{MS}$ = (**10**,**2**)	$\chi_S\varphi_{MA}$ = (**10**,**2**)
	$\chi_{MS}\varphi_S$ = (**8**,**4**)	$\chi_{MA}\varphi_S$ = (**8**,**4**)
	$1/\sqrt{2}\,(-\chi_{MS}\varphi_{MS}+\chi_{MA}\varphi_{MA})$ = (**8**,**2**)	$1/\sqrt{2}\,(\chi_{MS}\varphi_{MA}+\chi_{MA}\varphi_{MS})$ = (**8**,**2**)
	$\chi_A\varphi_{MA}$ = (**1**,**2**) ← Λ(1405)	$\chi_A\varphi_{MS}$ = (**1**,**2**)
A	$\chi_A\varphi_S$ = (**1**,**4**)	
	$1/\sqrt{2}\,(\chi_{MS}\varphi_{MA}-\chi_{MA}\varphi_{MS})$ = (**8**,**2**)	

perché **56** ha energia più bassa e P=+ e gli altri stati si alternano con P=-,+,-,..?

moto orbitale dei quark: SU(6) ⊗ O(3)



quark con nr. quantici:

sapore	u, d, s	$SU(3)_f$	⊗	SU(6)	⊗
spin	S= ↑, ↓	SU(2)			
moto orbitale	L	O(3)			

⬇

adrone con nr. quantici L⊕S=**J** SU(6) ⊗ O(3)

<u>regola generale</u> : solo rappresentazioni simmetriche di SU(6) ⊗ O(3)

$[SU(6) \otimes O(3)]_S$

SU(6) ⊗ O(3) : barioni

stato fondamentale

esempio più semplice: potenziale di oscillatore armonico, stati (nl)

$|0>_{O(3)} = (1s)(1s)(1s) \equiv |O(3)>_S$ con $L^P = 0^+$

$[SU(6) \otimes O(3)]_S \Rightarrow |SU(6)>_S \equiv$ $\mathbf{56}_S$

$P_{O(3)} = + \Rightarrow P_{SU(6)} = +$ cioè ($\mathbf{10}$, $J^P = 3/2^+$) e ($\mathbf{8}$, $J^P = ½^+$)

1° stato eccitato

$|1>_{O(3)} = (1s)(1s)(1p) \equiv |O(3)^*>_M$ con $L^P = 1^-$

$[SU(6) \otimes O(3)]_S \Rightarrow |SU(6)^*>_M \equiv$ $\mathbf{70}_M$: ($\mathbf{10}$,2) $S_{31}(1650)$, $D_{33}(1670)$

($\mathbf{8}$,2) $S_{11}(1535)$, $D_{13}(1520)$

($\mathbf{8}$,4) $S_{11}(1700)$, $D_{13}(1700)$, $D_{15}(1670)$

$X_{2I,2J}$ ($\mathbf{1}$,2) $S_{01}(1405; \Lambda)$, $D_{03}(1520; \Lambda)$

… altri stati con stranezza ….

$SU(6) \otimes O(3)$: barioni

altri stati eccitati

$|2\rangle_{O(3)}$? (1s)(1s)(1d) degenere con (1s)(1s)(2s) e (1s)(1p)(1p)

risulta $|O(3)^{**}\rangle_S = \sqrt{2/3}\,(1s)(1s)(2s) + \sqrt{1/3}\,(1s)(1p)(1p)$ con $L^P = 0^+$

$[SU(6) \otimes O(3)]_S \Rightarrow |SU(6)^{**}\rangle_S \equiv \mathbf{56}_S$

altri stati possibili: $\mathbf{56}_S$ con $L^P = 2^+$ $5/2^+(1690)$, $3/2^+(1810)$ con $S=1/2$
$1/2^+(1910)$, $3/2^+(?)$, $5/2^+(1890)$,
$7/2^+(1950)$ con $S=3/2$
$\mathbf{70}_M$ con $L^P = 0^+, 1^+, 2^+$ ….

ma i primi stati eccitati ($\sim |1\rangle_{O(3)}$) sono $\mathbf{70}_M$ con P=- o P=+ ?
ipotesi "diquark+quark" $\Rightarrow$ alternanza di P=+ / - / + / …

radial excitations (1s)(1s)(2s) degenerate with (1s)(1s)(1d) : P_{11}, P_{33}, …

SU(6) ⊗ O(3) : mesoni

sistema $\underbrace{\{q\,\bar{q}\}}_{L}$ ha parità $P = (-)^{L+1}$

sistema " " in stato $\begin{cases} |\chi\rangle_S\,|\varphi\rangle_A \\ |\chi\rangle_A\,|\varphi\rangle_S \end{cases}$ ha $C = (-)^{L+S}$

quindi $CP = -$ $S=0$

$CP = +$ $S=1$

$S=0 \Rightarrow J \equiv L \Rightarrow C = (-)^J = -P \Rightarrow J^{PC} = \boxed{0^{-+}}$, 1^{+-}, 2^{-+}, …

$S=1 \Rightarrow J = L+1 \Rightarrow C = P \Rightarrow J^{PC} = \boxed{1^{--}}$, $(0^{++}, 1^{++}, 2^{++})$, $(1^{--}, 2^{--}, 3^{--})$, …

nonetto pseudoscalare
e vettore

J^{PC}	I = 1	I = 0		I = ½
0^{-+}	π(140) …	η(550) …	η'(960) …	K(495)
1^{--}	ρ(770) …	ω(780) …	ϕ(1020) …	K*(890) …
1^{+-}	$b_1(1235)$	$h_1(1170)$		$K_1(1270)$
0^{++}	$a_0(980)$ …	σ(600)	$f_0(980)$ …	$K^*_0(1430)$
1^{++}	$a_1(1260)$	$f_1(1285)$	$f_1(1420)$	$K_1(1400)$
2^{++}	$a_2(1320)$	$f_2(1270)$ …	$f'_2(1525)$	$K^*_2(1430)$
2^{-+}	$\pi_2(1670)$ …	$\eta_2(1645)$		$K_2(1770)$ …
…	…	…	…	…