Riassunto lezione precedente

- Evidenza spettroscopica di multipletti quasi degeneri; organizzabili secondo simmetria SU(2) di isospin, con lieve rottura di degenerazione per interazione elettromagnetica

- necessità di introdurre nuovo numero quantico stranezza S; secondo SU(3) mesoni organizzati in nonetti sia pseudoscalari sia vettori; barioni organizzati in ottetto e decupletto a parità + e singoletto a parità –; nello spettro, ad alta energia segnali di rottura di una simmetria legata a P (simmetria chirale?)

- Gell-Mann & Zweig ('63): ipotesi di simmetria a livello più basso, basata su struttura più elementare, i quarks; si giustificano osservazioni spettroscopiche, ma non si evidenzia mai il tripletto di SU(3): i quark sono reali?

- cenni di teoria dei gruppi: il caso SU(2), le matrici di Pauli

- definizione e proprietà di generatori di SU(N); rappresentazioni fondamentale, regolare, coniugata; operatore di Casimir e classificazione dei multipletti; esempi di SU(2) e SU(3)

SU(3) : proprietà generali

gruppo delle trasformazioni unitarie U tali per cui χ' = Uχ

$$\chi = \begin{vmatrix} u \\ d \\ s \end{vmatrix}$$

U sono matrici unitarie 3x3 del tipo $U = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{i}\theta\hat{\mathbf{n}}\cdot\lambda}$

8 generatori della trasformazione: 8 matrici 3x3 hermitiane a traccia nulla
le matrici di Gell-Mann λ

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sottogruppo SU(2) di isospin
"I – spin" su (u,d)

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sottogruppo "V – spin" su (u,s)

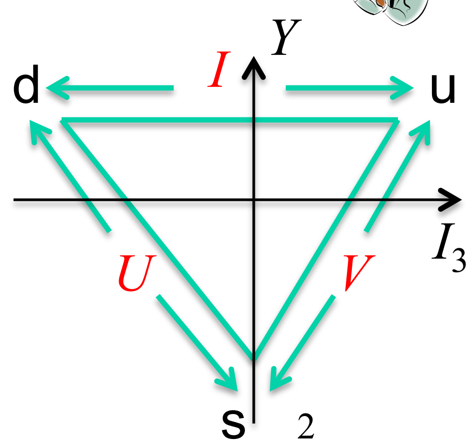
$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

sottogruppo "U – spin" su (d,s)

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

operatore isospin ½ λ_3

operatore ipercarica $Y = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\lambda_8$



SU(3) : classificazione multipletti e operatore di Casimir

definiamo $F_i = ½\lambda_i$. Algebra: $[F_i, F_j] = i\, f_{ijk}\, F_k$, $\{F_i, F_j\} = 4/3\, \delta_{ij} + 4\, d_{ijk}\, F_k$
costanti di SU(3):

$f_{123}=1$, $f_{458}=f_{678}= \sqrt{3}/2$

$f_{147}=f_{246}=f_{257}=f_{345}=f_{516}=f_{637}= ½$

$d_{118}=d_{228}=d_{338}=-d_{888}= 1/\sqrt{3}$

$d_{146}=d_{157}=d_{256}=d_{344}=d_{355}= ½$

$d_{247}=d_{366}=d_{377}= -½$

$d_{448}=d_{558}=d_{668}=d_{778}= -1/2\sqrt{3}$

operatore di Casimir

SU(2): $I_i = ½\, \sigma_i$ $\qquad C = (\boldsymbol{I})^2 = ½\,(I_+I_- + I_-I_+) + (I_3)^2 = ½\,\{I_+, I_-\} + (I_3)^2$

SU(3): $F_i = ½\, \lambda_i$ $\qquad C = (\mathbf{F})^2 = \Sigma_{i=1}^{8} F_iF_i = ½\,\{I_+, I_-\} + ½\,\{V_+, V_-\} + ½\,\{U_+, U_-\} + (F_3)^2 + (F_8)^2$

$I_\pm = F_1 \pm i\, F_2$
$V_\pm = F_4 \pm i\, F_5$
$U_\pm = F_6 \pm i\, F_7$

autovalore di C è $⅓\,(p^2+pq+q^2)+(p+q)$ p,q ε $\mathbf{N}_+$

dim.	(p,q)	F^2
1	(0,0)	0
3	(1,0)	4/3
$\bar{3}$	(0,1)	4/3
8	(1,1)	3
6	(2,0)	10/3
10	(3,0)	6

$3 \not\Leftrightarrow 3^*$ because of Y

Quarks e rappresentazioni SU(N)

supponiamo barioni = {qqq} e mesoni = {$q\bar{q}$}

sapore	up u	down d	strange s
nr. barionico B	⅓	⅓	⅓
isospin I	½	½	0
I_3	+½	-½	0
ipercarica Y	⅓	⅓	-⅔
carica Q	+⅔	-⅓	-⅓
stranezza S	0	0	-1

Y = B+S

Q = I_3+½Y

servono almeno 2 flavors
u,d per distinguere p da n

gruppo SU(2)$_I$

servono almeno 3 flavors
u,d,s per distinguere p da Σ^+

gruppo SU(3)$_f$

Spettro barionico e simmetria degli stati

barioni = {qqq} q = u,d,s (per ora non importa ordine: uds ⇔ dsu ⇔ sud…)

quark	simmetria	carica	stranezza	stati
uuu	S	2	0	Δ^{++}
uud	S M	1	0	Δ^{+} p
udd	S M	0	0	Δ^{0} n
ddd	S	-1	0	Δ^{-}
uus	S M	1	-1	Σ^{+} Σ^{*+}
uds	S M M A	0	-1	Σ^{0} Σ^{*0} Λ^{0} Λ
dds	S M	-1	-1	Σ^{-} Σ^{*-}
uss	S M	0	-2	Ξ^{0} Ξ^{*0}
dss	S M	-1	-2	Ξ^{-} Ξ^{*-}
sss	S	-1	-3	Ω^{-}

come distinguere ?

p da Δ^{+} ←

n da Δ^{0} ←

…. ←

…. ←

…. ←

…. ←

…. ←

ora ordine conta: dato {qqq} con q=u,d,s si può sempre costruire un S → 10

dato {qqq’} o {qq’q’’} si può avere simm. mista M → 8 ({qq’q’’} ha 2 “modi” diversi → M M)

dato {qq’q’’} si può avere un A ({qq’q’’}=-{q’qq’’} per ogni coppia) → 1

Rappresentazioni di SU(2)

Rappresentazione fondamentale (dim. 2): $|\chi\rangle = \begin{vmatrix} u \\ d \end{vmatrix}$

2 oggetti : $|\chi_1>$, $|\chi_2>$

$\lvert\chi_1>$	$\lvert\chi_2>$	scambio 1 <-> 2	
u	u	uu	
u	d	1/√2 (ud+du)	1/√2 (ud-du)
d	u		
d	d	dd	
		S	A

$|S_1\ S_{1z}\ ;\ S_2\ S_{2z}> \ \Leftrightarrow\ |S\ S_z>$

$|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ ;\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}> \ \Leftrightarrow\ |1\ 1>$

$1/\sqrt{2}\ [\ |\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ ;\ \tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}> + |\tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}\ ;\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}>\ ] \ \Leftrightarrow\ |1\ 0>$

$1/\sqrt{2}\ [\ |\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\ ;\ \tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}> - |\tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}\ ;\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}>\ ] \ \Leftrightarrow\ |0\ 0>$

$|\tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}\ ;\ \tfrac{1}{2}\ {-\tfrac{1}{2}}> \ \Leftrightarrow\ |1\ {-1}>$

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3}_S \oplus \mathbf{1}_A$$

notazione di teoria di gruppo

Ex: $S_1 = \tfrac{1}{2}$ $S_2 = \tfrac{1}{2}$ ➔ $S = 1$ o 0

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \otimes \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}_S \oplus \mathbf{0}_A$$

3 oggetti : $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$, $|x_3\rangle$

$\vert x_1\rangle\vert x_2\rangle\vert x_3\rangle$	**scambio 1 ⇔ 2**			S_z
uuu	uuu			3/2
uud, udu, duu	1/√3 (uud+udu+duu)	1/√2 (ud-du)u	1/√6 [(ud+du)u - 2 uud]	½
udd, dud, ddu	1/√3 (udd+dud+ddu)	1/√2 (ud-du)d	-1/√6 [(ud+du)d - 2 ddu]	-½
ddd	ddd			-3/2
	S	M_A	M_S	

antisimmetrico simmetrico
in 1⇔2
ma non definito negli altri

Ex: $S_1 = ½$ $S_2 = ½$ $S_3 = ½$ ➔ $S_{12} = 1$ $S_3 = ½$ + $S_{12} = 0$ $S_3 = ½$
➔ $S = 3/2$ o $½_S$ + $S = ½_A$

$$\left(\tfrac{1}{2}\otimes\tfrac{1}{2}\right)\otimes\tfrac{1}{2} = 1\otimes\tfrac{1}{2} + 0\otimes\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}_S\oplus\tfrac{1}{2}_S\oplus\tfrac{1}{2}_A$$
$$(2\otimes 2)\otimes 2 = (3\otimes 2)\oplus(1\otimes 2) = 4_S\oplus 2_{M_S}\oplus 2_{M_A}$$

Rappresentazioni di SU(3)

Rappresentazione fondamentale (dim. 3):

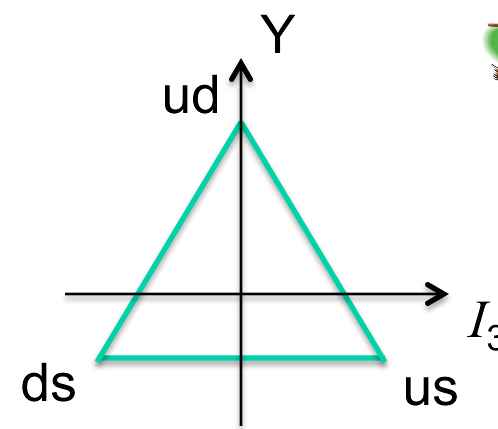
$$|\chi\rangle = \begin{vmatrix} u \\ d \\ s \end{vmatrix}$$

2 oggetti : $|\chi_1\rangle$, $|\chi_2\rangle$

$\lvert\chi_1\rangle$	$\lvert\chi_2\rangle$	scambio 1 <-> 2	
u	u	uu	
u	d	1/√2 (ud+du)	1/√2 (ud-du)
d	u		
d	d	dd	
u	s	1/√2 (us+su)	1/√2 (us-su)
s	u		
d	s	1/√2 (ds+sd)	1/√2 (ds-sd)
s	d		
s	s	ss	
		S	A

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6}_S \oplus \bar{\mathbf{3}}_A$$

stati A sono $\bar{3}$ perché



3 oggetti : $|x_1\rangle$, $|x_2\rangle$, $|x_3\rangle$

$\|x_1\rangle\|x_2\rangle\|x_3\rangle$	scambio 1 ⇔ 2				spettro
uuu	uuu				Δ^{++}
uud, udu, duu	1/√3 (uud+udu+duu)	1/√6 [(ud+du)u-2uud]	1/√2 (ud-du)u		Δ^{+}(S) p(M)
udd, dud, ddu	1/√3 (udd+dud+ddu)	-1/√6 [(ud+du)d-2ddu]	1/√2 (ud-du)d		Δ^{0}(S) n(M)
ddd	ddd				Δ^{-}
uus, usu, suu	1/√3 (uus+usu+suu)	1/√6 [(us+su)u-2uus]	1/√2 (us-su)u		Σ^{*+}(S) Σ^{+}(M)
uds	1/√6 (uds+usd+dus +sud+dsu+sdu)	1/2√3 [s(du+ud) + usd+dsu-2(du+ud)s]	1/2 [(usd+dsu) - s(ud+du)]	1/√6 [s(du-ud) + usd–dsu + (du-ud)s]	Σ^{*0}(S) Σ^{0}(M) Λ_{1405}(A)
		1/2 [(dsu-usd) + s(ud-du)]	1/2√3 [s(du-ud) + usd-dsu-2(du-ud)s]		Λ^{0}(M)
dds, dsd, sdd	1/√3 (dds+dsd+sdd)	1/√6 [(ds+sd)d-2dds]	1/√2 (ds-sd)d		Σ^{*-}(S) Σ^{-}(M)
ssu, sus, uss	1/√3 (ssu+sus+uss)	-1/√6 [(us+su)s-2ssu]	1/√2 (us-su)s		Ξ^{*0}(S) Ξ^{0}(M)
ssd, sds, dss	1/√3 (ssd+sds+dss)	-1/√6 [(ds+sd)s-2ssd]	1/√2 (ds-sd)s		Ξ^{*-}(S) Ξ^{-}(M)
sss	sss				Ω^{-}(S)
	S	M_S	M_A	A	

$$(\mathbf{3}\otimes\mathbf{3})\otimes\mathbf{3} = (\mathbf{6}\oplus\bar{\mathbf{3}})\otimes\mathbf{3} = (\mathbf{10}_S\oplus\mathbf{8}_{M_S})\oplus(\mathbf{8}_{M_A}\oplus\mathbf{1}_A)$$