

Riassunto della lezione precedente

- necessità di introdurre correzioni radiative a QPM
→ IQPM inglobato nella pQCD
- rinormalizzazione di teoria di gauge: cancellazione divergenze ultraviolette; eq. di Callan-Symanzik; running coupling; β function
- teorie di gauge con quanti massless: divergenze infrarosse e collineari; fattorizzazione collineare
- radiazione di quanti massless, vertice di Altarelli-Parisi in QED e QCD
- funzione di struttura di un elettrone / partone; equazioni di evoluzione DGLAP

evoluzione, fattorizzazione: DIS inclusivo

Teorema : (Collins, Soper, Sterman, '89)

$$F_{1/2/3}(x_B, Q^2) = \sum_{i=f, \bar{f}, a} \int_{x_B}^1 \frac{dx}{x} C_{1/2/3} \left(\frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F^2}{\mu_R^2}, \alpha_s(\mu_R^2) \right) \phi_i(x, \mu_F, \mu_R)$$

somma su quark,
antiquark e gluoni

μ_R scala di rinormalizzazione
 μ_F scala di fattorizzazione : definisce
 ciò che è a brevi distanze $\rightarrow C$
 da ciò che è a lunghe distanze $\rightarrow \phi$

N.B. può essere $\mu_F = \mu_R (=Q)$

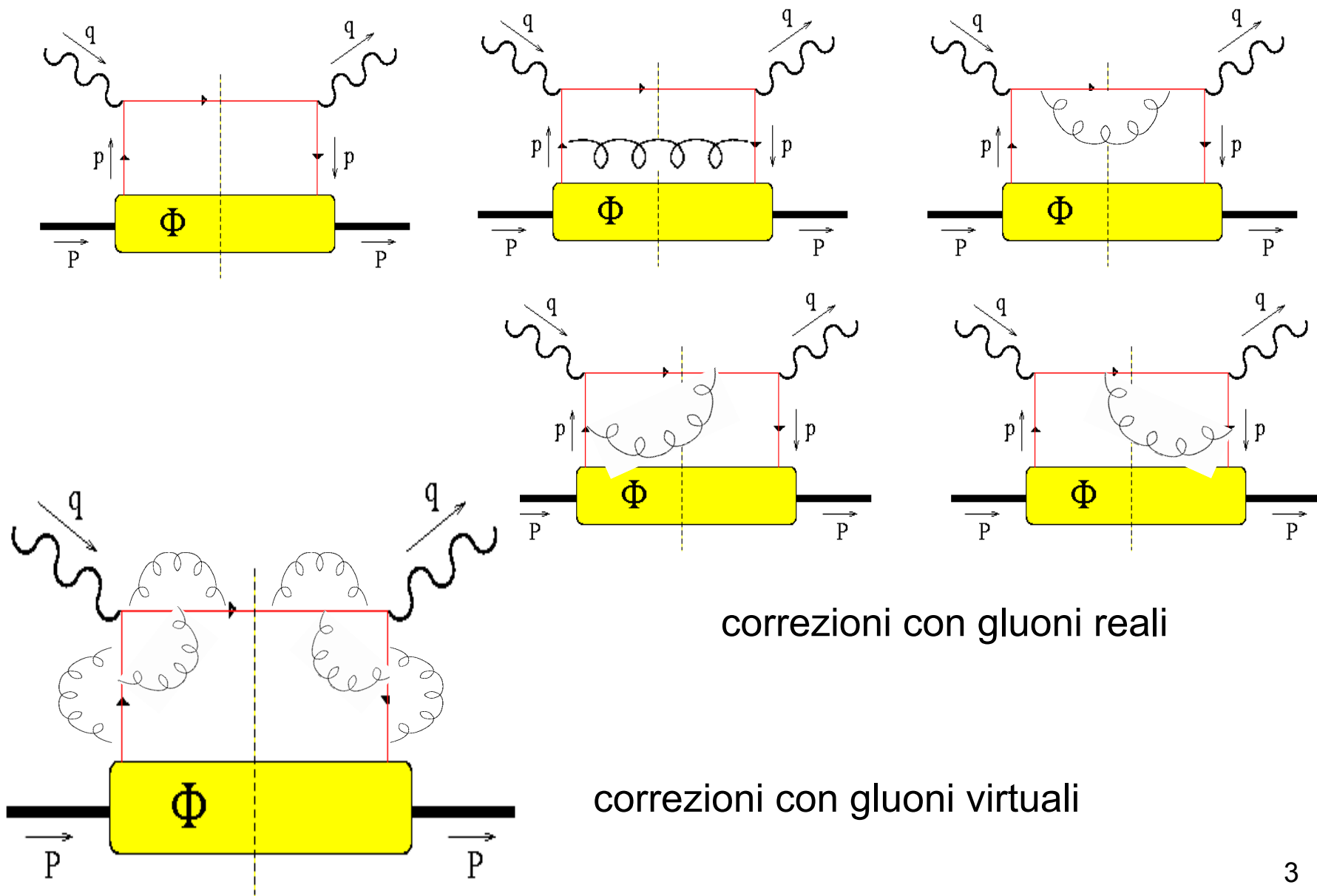
$$C = \left(\frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F}{\mu_R}, \alpha_s(\mu_R) \right)$$

coefficiente di Wilson

generalizzazione delle F^{el} in scattering elastico in QPM

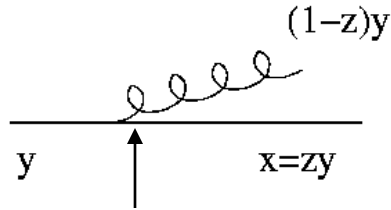
$$C_1^i = \frac{1}{2} \delta_{iq} e_q^2 \delta \left(1 - \frac{x_B}{x} \right) \rightarrow F_1(x_B) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 \phi_q(x_B)$$

DIS inclusivo : processi oltre il tree level



Calcolo di C

gluoni reali



quark con momento y può irraggiare un gluone e riscaldare il suo momento a x

divergenze collineari per $z \rightarrow 1$

da riassorbire in ϕ , perché connesse all'evoluzione del singolo q , indipendenti dall'interazione

vertice di Altarelli-Parisi

determina l'evoluzione in Q^2 di ϕ , determina cioè il suo contenuto partonico

$$s = (p + q)^2 \sim 2p \cdot q - Q^2 = Q^2 \frac{1 - x_B}{x_B} \quad \text{divergenze soft per } x_B \rightarrow 1 \text{ (s} \rightarrow 0 \text{)}$$

non riassorbibili in ϕ , perché riguardano gluone nello stato finale

non riassorbibili in C perché C è I.R.-safe e si romperebbe fattorizzazione

gluoni virtuali quark on-shell nel taglio $\rightarrow \delta((p+q)^2) \approx x_B/Q^2 \delta(x_B - 1)$

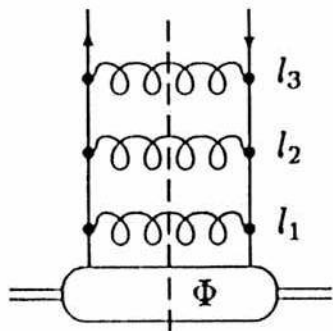
in approssimazione collineare, cancellazione sistematica delle divergenze soft con gluone reale = “fattorizzazione collineare”

calcolo dei diagrammi con regolarizzazione dimensionale $d = 4 - 2\varepsilon$ ($\varepsilon \rightarrow 0$)

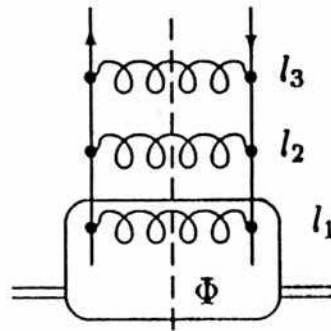
\rightarrow scala fittizia μ_d e compaiono poli $\sim 1/\varepsilon$

Evoluzione

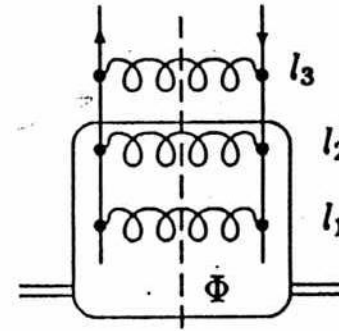
scala $Q^2 = \mu_F^2 \rightarrow$ al variare di μ_F la funzione di splitting determina il contenuto partonico della distribuzione ϕ , discrimina cioè ciò che va inglobato in ϕ (essendo off-shell $< \mu_F$) da ciò che va inglobato in C (essendo off-shell $> \mu_F$)



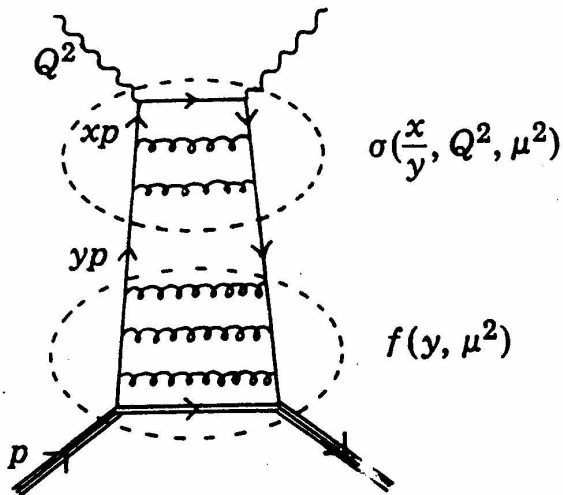
$$\boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{1T}^{-2} \leq \tilde{l}_{2T}^{-2} \leq \tilde{l}_{3T}^{-2}$$



$$\tilde{l}_{1T}^{-2} \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{2T}^{-2} \leq \tilde{l}_{3T}^{-2}$$



$$\tilde{l}_{1T}^{-2} \leq \tilde{l}_{2T}^{-2} \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{3T}^{-2}$$



al variare di μ_F la situazione cambia
 \rightarrow Evoluzione DGLAP

assorbiti in $\phi < \mu_F <$ assorbiti in C



$$F_1(x, Q^2) \sim \int_x^1 \frac{dz}{z} f_1^{bare} \otimes \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \log \left(\frac{Q^2}{\mu_d^2} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F P_{qq} \left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \right) + \dots \right\} \otimes \phi$$



cancellazione singolarità e dipendenza da μ_d

$$f_1 \equiv f_1^{bare} \otimes \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \log \left(\frac{\mu_F^2}{\mu_d^2} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F P_{qq} \left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \right) + \dots \right\}$$

DIS

MS

la scala di partenza dell'evoluzione (ad es. Q_0^2) è arbitraria

→ assegnare contributi a ϕ o a C è arbitrario

→ necessità di definire uno schema in cui calcolare l'evoluzione e confrontarsi con i dati consistentemente

diverse scelte: **schema DIS** (Altarelli, Ellis, Martinelli, '79) QPM esatto a Q_0^2

schema MS (Bardeen *et al.*, '78 ; Furmanski & Petronzio, '82 ; Collins & Soper, '82)

potere predittivo di DGLAP:

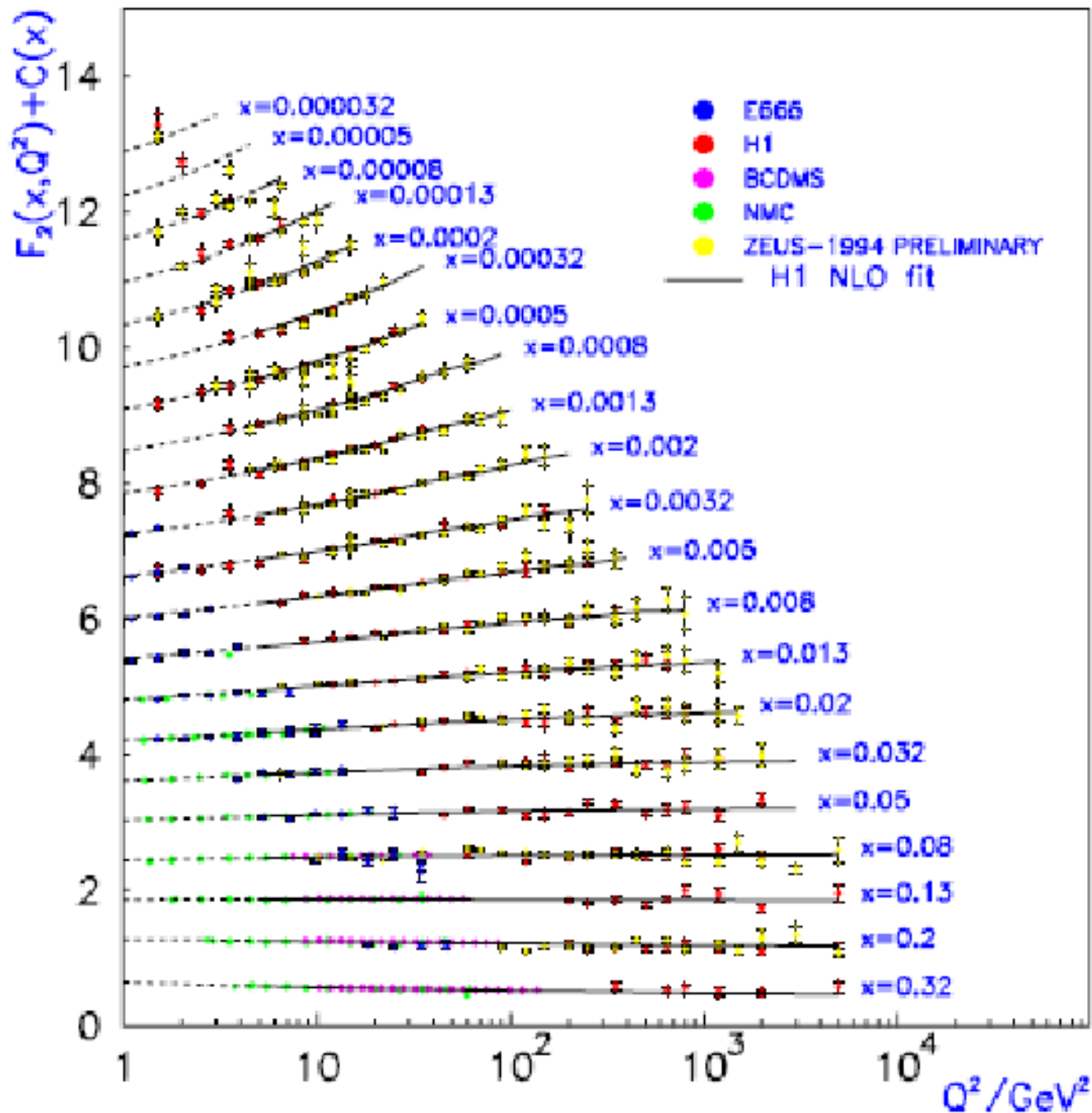
noto il risultato a Q_0^2 → DGLAP danno risultato alla scala $Q^2 \neq Q_0^2$

DGLAP + fattorizzazione

→ universalità delle distribuzioni partoniche

(definite ad una stessa scala μ_F e nello stesso schema)

⇒ ampio potere predittivo della pQCD !



evoluzione & fattorizzazione: teorema

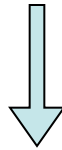
fattorizzazione in DIS inclusivo \rightarrow convoluzione:

$$F_1(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} C\left(\frac{x}{z}, \dots\right) \phi(z, \dots) \equiv C \otimes \phi$$

trasformata di Mellin di ordine N $f_N = \int_0^1 dx x^{N-1} f(x)$

risulta $(f \otimes g)_N = f_N \cdot g_N$

invarianza della fisica dalla scala di fattorizzazione μ_F : $\frac{dF_1}{d \log \mu_F^2} = 0$



$$\gamma_N[\alpha_s(Q^2)] = (P_+)_N$$

dimensioni anomale sono trasformate di Mellin di ordine N delle splitting functions (kernel delle eq. DGLAP di evoluzione)



DIS semi-inclusivo

vale un teorema analogo a DIS inclusivo purché non si osservi \mathbf{p}_T dei partoni

e^+e^- inclusivo

Teorema : la sezione d'urto totale è finita nel limite di particelle senza massa, cioè è libera da divergenze “infrarosse” (IR)

(Sterman, '76, '78)

[generalizzazione del teorema KLN (Kinoshita-Lee-Nauenberg)]

$$\sigma_{tot} = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \sum_f e_f^2 \sum_n s_n \alpha_s^n(Q^2) \quad s_0 = 1$$



QPM

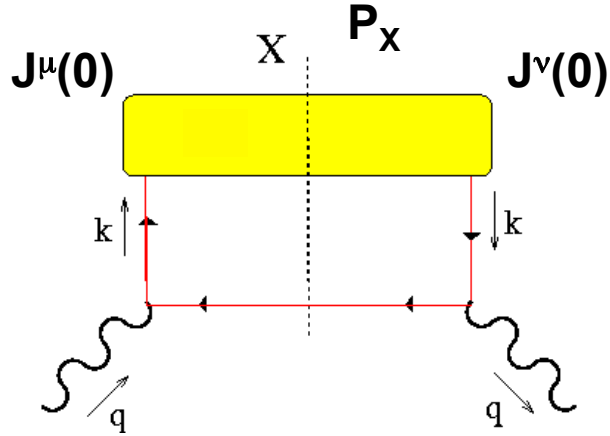
correzioni di pQCD

Drell-Yan

Teorema di fattorizzazione

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dy d\Omega} = \sum_{f_1, f_2} \int_{x_1}^1 d\xi_1 \int_{x_2}^1 d\xi_2 \phi_{f_1}(\xi_1, \mu_F) \frac{d\sigma^{el}}{dQ^2 dy d\Omega} \left(\frac{x_1}{\xi_1}, \frac{x_2}{\xi_2}, \Omega, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(\mu_F) \right) \phi_{f_2}(\xi_2, \mu_F) + o\left(\frac{1}{Q^2}\right)$$

e^+e^- inclusivo



$$\begin{aligned}
 W^{\mu\nu} &= \int \frac{dP_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(q - P_X) \\
 &\quad \langle 0 | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | 0 \rangle \\
 &= \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle
 \end{aligned}$$



Teorema: contributo dominante nel limite di Bjorken viene da corte distanze



$$\xi \rightarrow 0$$

ma prodotto di operatori nello stesso punto spazio-temporale non è sempre ben definito in teoria di campo!

(continua)

Esempio: campo scalare neutro libero $\phi(x) \rightarrow$ propagatore libero $\Delta(x-y)$

$$\begin{aligned}\langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle &= -i\Delta(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{m}{4\pi^2} \frac{K_1 \left(m \sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon} \right)}{\sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon}} - \frac{i}{4\pi} \delta((x-y)^2) \xrightarrow{x \rightarrow y} \infty\end{aligned}$$

K_1 funz. Bessel modificata
del 2° tipo

Operator Product Expansion

(Wilson, '69 prima congettura; Zimmermann, '73 dimostrazione in teoria perturbazioni;
Collins, '84 dimostrazione diagrammatica)

definizione (anche operativa) di operatore composito:

$$\hat{A}(x) \hat{B}(y) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x-y) \hat{O}_i\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

- gli operatori locali \hat{O}_i sono regolari nell' argomento per ogni $i=0,1,2,\dots$
- la divergenza per $x \rightarrow y$ è assorbita nei coefficienti C_i
- i termini sono ordinati per singolarità decrescenti in C_i , $i=0,1,2,\dots$
- di solito $\hat{O}_0 = \mathbf{I}$, ma espressione esplicita dell' espansione va trovata separatamente per ogni tipo di processo
- OPE è anche una definizione operativa perché può essere usata per definire un operatore composito regolare.

Esempio : teoria ϕ^4 , l' operatore composito $\phi(x)^2$ può essere costruito come

$$\phi(x)^2 \equiv \lim_{x \rightarrow y} \frac{\phi(x) \phi(y) - C_0(x-y)}{C_1(x-y)} = \hat{O}_1(x)$$

applicazione: e⁺e⁻ inclusivo

$$W^{\mu\nu} = \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle$$

$$J^\mu(x) = \sum_f e_f^2 \sum_c : \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu \psi_f(x) :$$

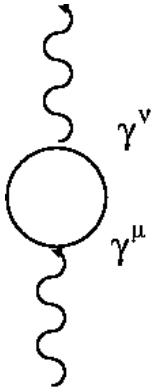
$$\begin{aligned} \epsilon(\xi^0) [J_\mu(\xi), J_\nu(0)] &= \frac{i(2\xi_\mu\xi_\nu - \xi^2 g_{\mu\nu})}{3\pi^3} \partial^3(\xi^2) + \frac{\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) \\ &+ \frac{i\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) + \hat{O}_{\mu\nu}(\xi, 0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0, \xi) \end{aligned}$$

- $\hat{O}_{V/A}^\mu(\xi, 0)$ e $\hat{O}^{\mu\nu}(\xi, 0)$ sono operatori bilocali regolari per $\xi \rightarrow 0$;
contengono informazioni sul comportamento a lunghe distanze
- i coefficienti sono singolari per $\xi \rightarrow 0$ (ordinati per singolarità decrescente);
contengono informazioni sul comportamento a corte distanze
- fattorizzazione tra corte e lunghe distanze rigorosa ad ogni ordine
- formula contiene il comportamento di quark liberi a corte distanze
→ portata generale per ritrovare i risultati di QPM



(continua)

contributo dominante :



$$W_{\mu\nu} = \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \frac{i}{3\pi^3} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \partial^3(x^2) | 0 \rangle$$
$$= \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \text{Tr} [S_F(x) \gamma^\mu S_F(-x) \gamma^\nu] | 0 \rangle$$

alla fine risulta $\longrightarrow \sigma_{tot} = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum_f e_f^2$

risultato di QPM !

Morale : OPE per quark liberi a corte distanze è equivalente a QPM

perchè QPM assume che a corte distanze i quark si comportino come fermioni liberi \rightarrow asymptotic freedom postulata in QPM si ritrova rigorosamente in OPE

applicazione: DIS inclusivo

$$2MW_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | P \rangle$$

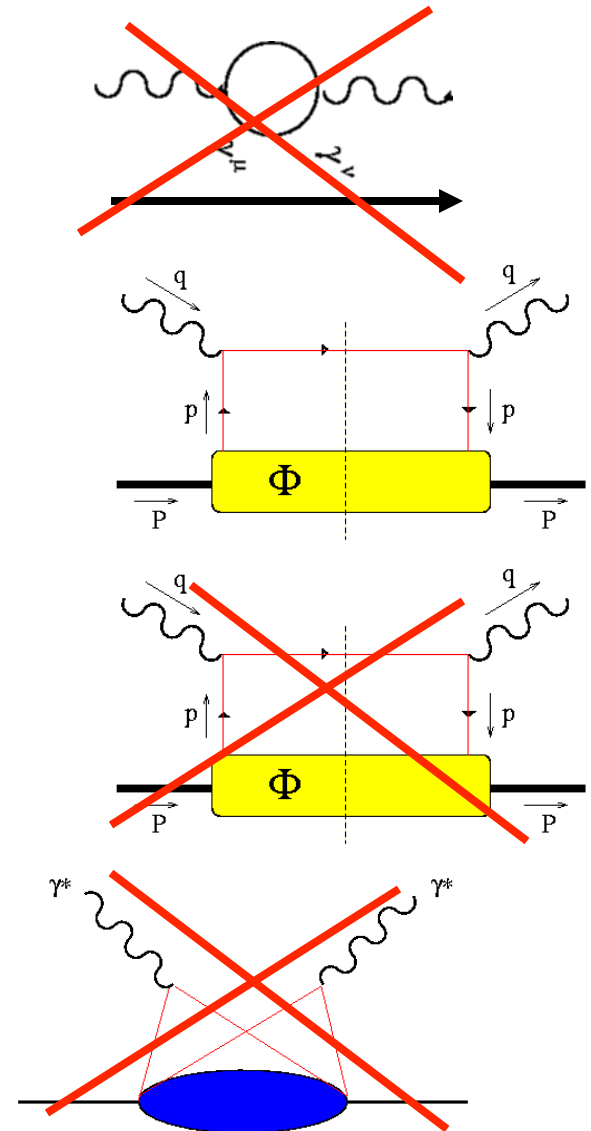
$$= \frac{i}{6\pi^4} \int d^4x e^{iq \cdot x} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \partial^3(x^2) \langle P | P \rangle$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \epsilon(x^0) \partial^1(x^2) \langle P | \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(x, 0) | P \rangle$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \epsilon(x^0) \partial^1(x^2) \langle P | i\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(x, 0) | P \rangle$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon(x^0) \langle P | \hat{O}_{\mu\nu}(x, 0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0, x) | P \rangle$$

no polarizzazione $\rightarrow W_S^{\mu\nu}$



Riassunto

procedura per il calcolo di $W^{\mu\nu}$:

- espansione OPE per operatore bilocale in serie di operatori locali
- trasformata di Fourier di ciascun termine
- somma dei termini ottenuti

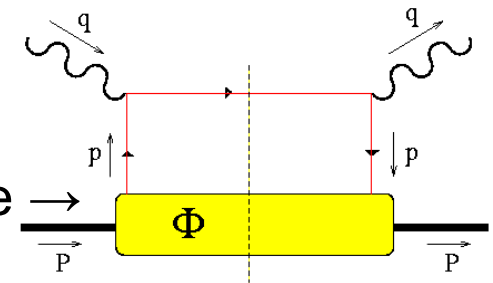
- risultato finale esprimibile in serie di potenze di M/Q attraverso il **twist $t (\geq 2) = d$** (dimensione canonica dell'operatore) **- spin**

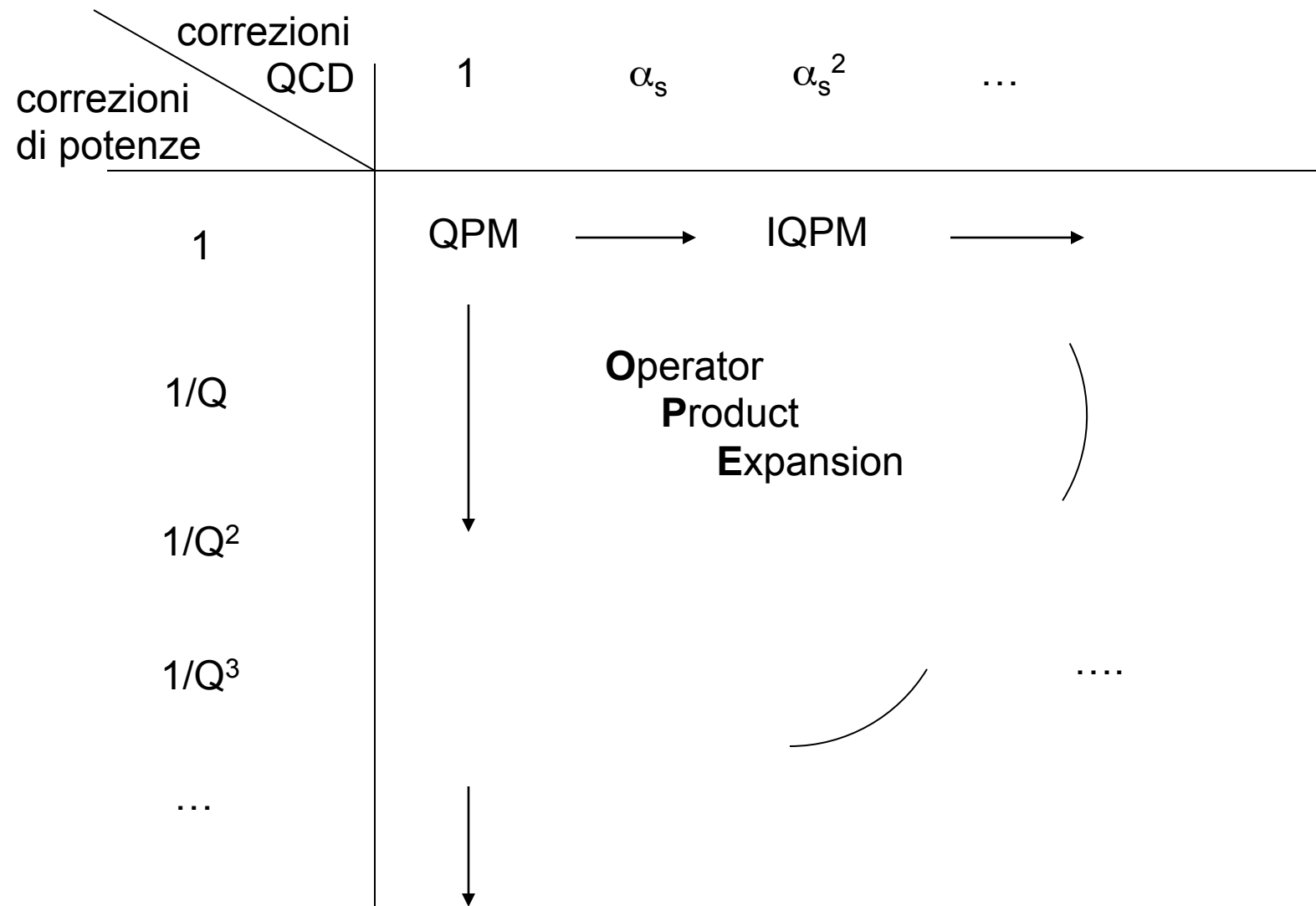
↓
dimensioni di $\langle P |$ operatore $| P \rangle - 2$

↓
 \sim n. indici dell'operatore

$$\left(\frac{M}{Q}\right)^{t-2}, \left(\frac{M}{Q}\right)^{t+2-2}, \dots, \quad t \geq 2$$

la serie di potenze è contenuta nell'operatore bilocale

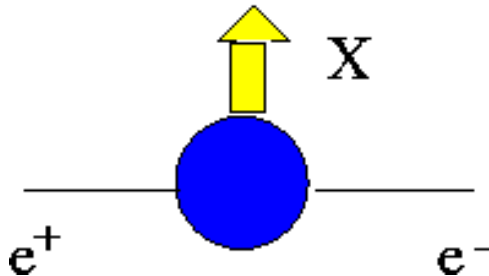




N.B. per il momento solo
per e^+e^- e DIS inclusivo

OPE dimostrabile solo per e^+e^- e DIS inclusivi

e^+e^- inclusivo

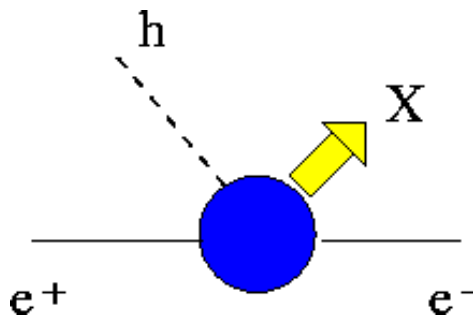


$$W^{\mu\nu} = \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle$$

$q^\mu \stackrel{c.m.}{=} (q^0, \mathbf{0})$ regime DIS: $Q^2 \rightarrow \infty \Rightarrow q^0 \rightarrow \infty$
 causalità \Rightarrow [...] definito su $\xi^2 \geq 0$
 contributo principale all'integrale da $q \cdot \xi$ finito
 $\Rightarrow \xi^0 \sim 0 \Rightarrow \xi \sim 0$

operatore composito a corte distanze \rightarrow OPE

e^+e^- semi-inclusivo



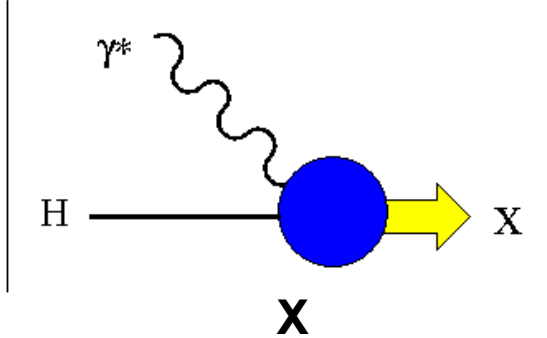
$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum_X \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | J^\mu(\xi) | P_h X \rangle \langle P_h X | J^\nu(0) | 0 \rangle$$

sistema dell'adrone a riposo $P_h^\mu = (M_h, \mathbf{0})$

$q \cdot \xi$ finito $\rightarrow W^{\mu\nu}$ dominato da $\xi^2 \sim 0$

ma stato $|P_h\rangle$ impedisce chiusura \sum_X
 \rightarrow OPE non può essere applicata

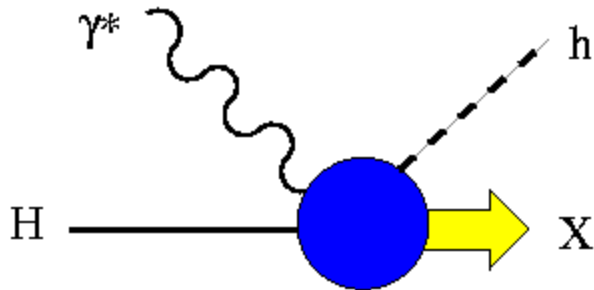
DIS inclusivo



$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | P \rangle$$

in limite DIS $\Rightarrow (x_B = -q^2/2P\cdot q \text{ finito}) \Leftrightarrow (v \rightarrow \infty)$
 $q\cdot\xi \text{ finito in limite DIS} \rightarrow \xi^0 \sim 0 \rightarrow \xi^\mu \sim 0$

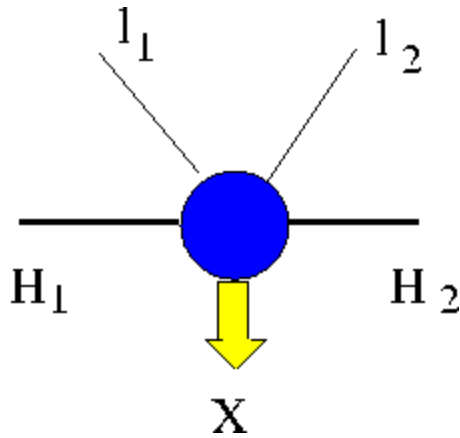
DIS semi-inclusivo



$$2MW^{\mu\nu} \propto \sum_X \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | J^\mu(\xi) | P_h X \rangle \langle P_h X | J^\nu(0) | P \rangle$$

stato $|P_h\rangle$ impedisce chiusura \sum_X
 \rightarrow OPE non può essere applicata

Drell-Yan



$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2} s \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P_1 P_2 | J^\mu(\xi) J^\nu(0) | P_1 P_2 \rangle$$

$q\cdot\xi$ finito \rightarrow dominanza per $\xi^2 \sim 0$

ma $\langle .. \rangle$ non è limitato in nessun sistema perché $s = (P_1 + P_2)^2 \sim 2P_1 \cdot P_2 \geq Q^2$ e nel limite $Q^2 \rightarrow \infty$ entrambe P_1, P_2 non limitati $W^{\mu\nu}$ riceve contributi fuori dal light-cone!

Quali sono i diagrammi dominanti per i processi in cui non si può applicare l'OPE ?

E' possibile applicare il concetto dell'OPE (fattorizzazione) anche a processi semi-inclusivi?

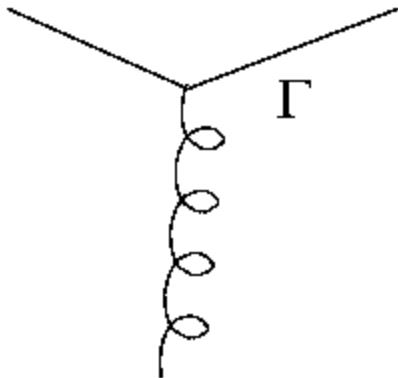
Classificazione dei contributi dominanti ai vari processi hard

Premessa :

- propagatore di quark libero a corte distanze $S_F(x)$

$$\begin{aligned} S_F(x) &= (i\gamma \cdot \partial + m) \Delta(x) \sim (i\gamma \cdot \partial + m) \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{x^2 - i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{-2\gamma \cdot x}{(x^2 - i\epsilon)^2} \frac{i}{4\pi^2 i} + \dots \sim \frac{1}{x^3} + \text{termini meno singolari} \end{aligned}$$

- interazione con gluone non incrementa la singolarità



$$\sim \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} S_F(x - y) \Gamma S_F(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

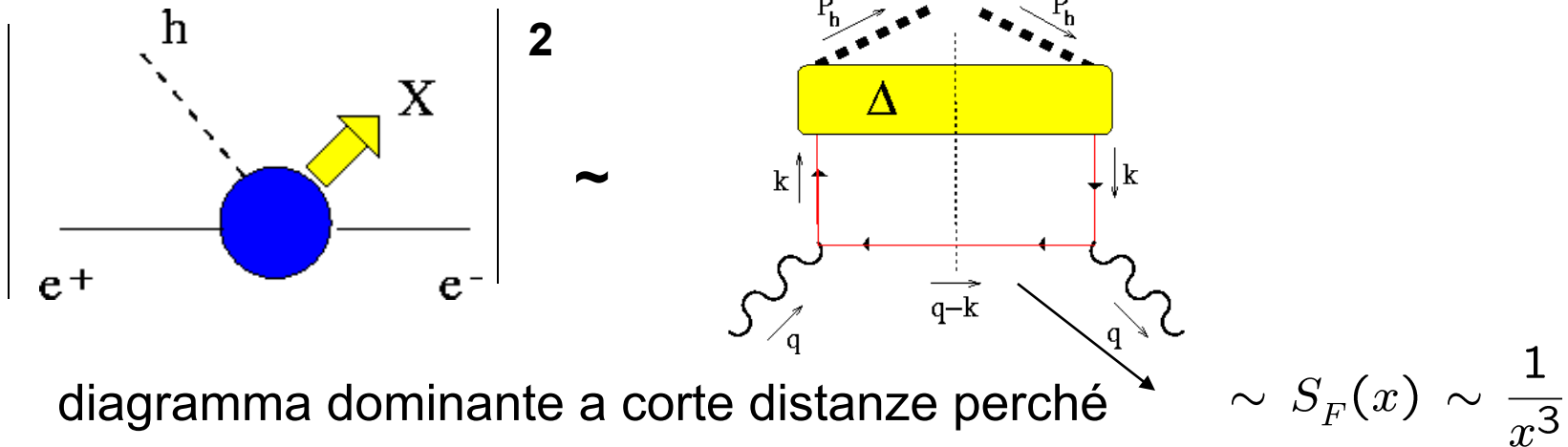
e^+e^- inclusivo



contributo dominante a corte distanze $\rightarrow \sigma_{\text{tot}}$ del QPM

correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n \rightarrow$ si ritrova risultato OPE

e^+e^- semi-inclusivo



correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$

fattorizzazione tra vertice hard e frammentazione soft

(continua)

DIS inclusivo

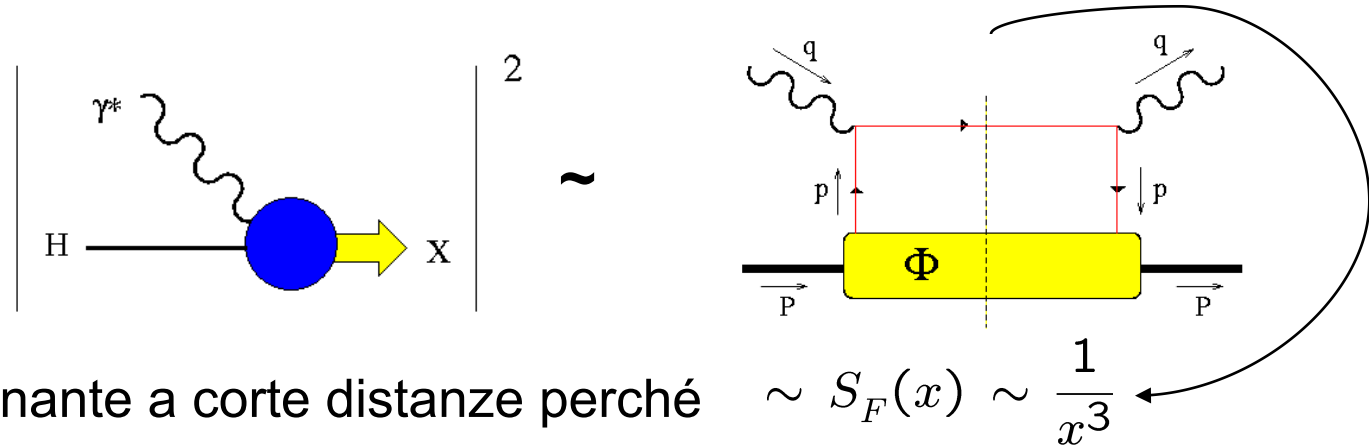
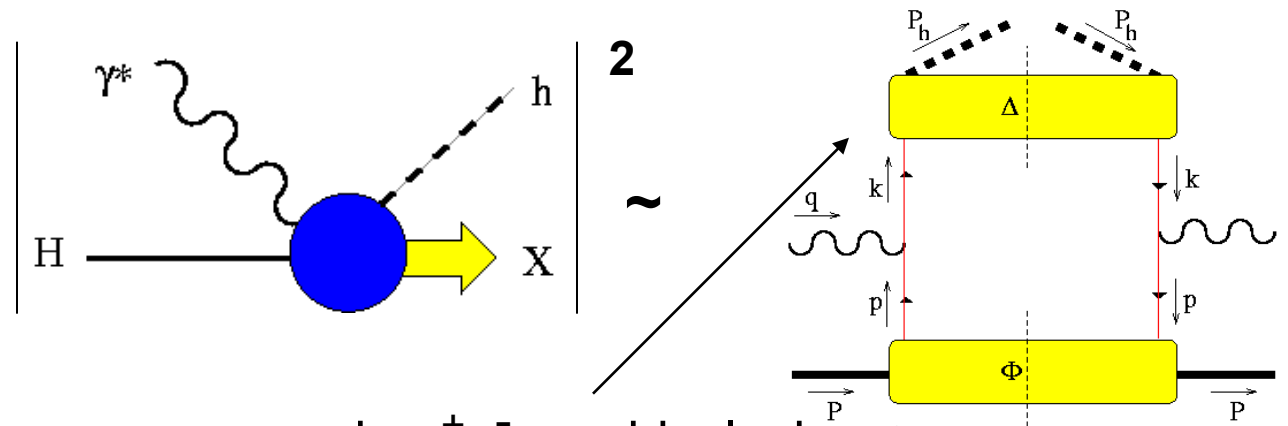


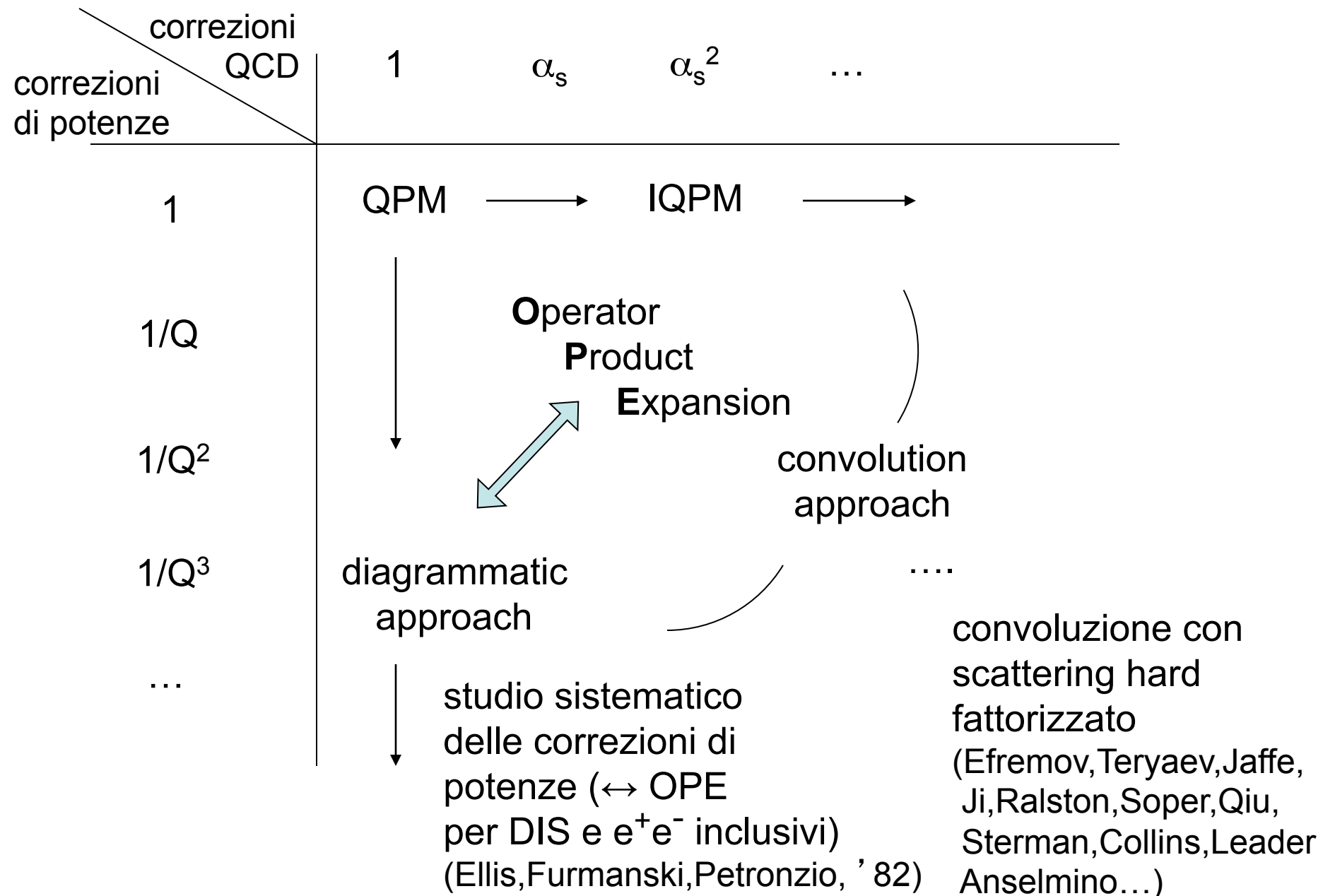
diagramma dominante a corte distanze perché

correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$ quindi si ritrova risultato di OPE

DIS semi-inclusivo

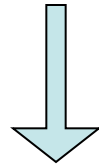


fattorizzazione tra vertice e.m.
hard e funzioni di distribuzione e
frammentazione (el. di matrice soft)



(continua)

Per tutti i processi di tipo DIS o e^+e^- (sia inclusivi che semi-inclusivi) il contributo dominante al tensore adronico viene dalla cinematica light-cone



- definizione e proprietà delle variabili light-cone
- teoria di campo quantizzata sul light-cone
- algebra di Dirac sul light-cone

Variabili light-cone

dato 4-vettore a^μ $a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^0 \pm a^3)$, $\mathbf{a}_\perp = (a^1, a^2)$

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^+, a^-, \mathbf{a}_\perp)$$

prodotto scalare $a \cdot b = a^+ b^- + a^- b^+ - \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp$

$$a^2 = 2a^+ a^- - \mathbf{a}_\perp^2$$

metrica $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(0,1,2,3)} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$

“base” light-cone :

$$n_+^\mu = (1, 0, \mathbf{0}_\perp) \quad , \quad n_-^\mu = (0, 1, \mathbf{0}_\perp) \quad ; \quad n_\pm^2 = 0, \quad n_+ \cdot n_- = 1$$

$$a^\pm = a \cdot n_\mp \longrightarrow a^\mu = (a \cdot n_-) n_+^\mu + (a \cdot n_+) n_-^\mu + \mathbf{a}_\perp$$

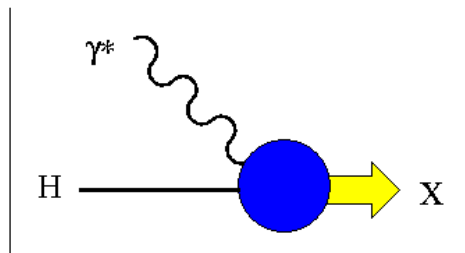
metrica “trasversa” $g_\perp^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n_+^\mu n_-^\nu - n_-^\mu n_+^\nu = g^{\mu\nu} - n_+^{\{\mu} n_-^{\nu\}}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$$

adrone-bersaglio a riposo $P^\mu \stackrel{rest\ frame}{=} (M, 0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (M, M, \mathbf{0}_\perp)$

DIS inclusivo

bersaglio assorbe momento trasferito di γ^* ; ad



2 esempio se $\mathbf{q} \parallel z$ $P_z=0 \rightarrow P'_z = q \gg M$ in regime DIS

$$P'^\mu = (\sqrt{M^2 + P_z'^2}, 0, 0, P_z') \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} (P_z', 0, 0, P_z') = (\sqrt{2} P_z', 0, 0, \mathbf{0}_\perp)$$

regime DIS \Rightarrow direzione “+” dominante
 direzione “-” soppressa

boost di 4-vettore $a^\mu \rightarrow a'^\mu$ lungo asse z

$$a'^0 = \frac{a^0 + \beta a^3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad a'^3 = \frac{\beta a^0 + a^3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad a'_\perp = a_\perp$$

$$a'^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1 + \beta)(a^0 + a^3)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = a^+ \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = a^+ e^\psi$$

$$a'^- = a^- \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = a^- e^{-\psi}$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (M, M, \mathbf{0}_\perp)$$

boost lungo asse z

$$P'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

N.B. rapidity

$$\psi = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \Rightarrow \beta = \tanh \psi$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

$A = M \rightarrow$ rest frame dell' adrone

$A = Q \rightarrow$ Infinite **M**omentum **F**rame (IFM)

cinematica light-cone \Leftrightarrow boost all'IFM

definizioni :

$$q^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-x_N A, \frac{Q^2}{x_N A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

invariante di Nachtmann $x_N = -\frac{q^+}{P^+}$

$$q^2 = 2q^+q^- - \mathbf{q}_\perp^2 = -Q^2$$



$$2P \cdot q = \frac{Q^2}{x_N} - x_N M^2 \implies \frac{1}{x_B} = \frac{1}{x_N} - x_N \frac{M^2}{Q^2} \implies x_N x_B^2(\dots) = x_N x_B^2(\dots)$$

$$x_B^2 - x_N x_B + \frac{x_N^2}{4} = \frac{x_N^2}{4} \left(1 + \frac{4x_B^2 M^2}{Q^2} \right) \implies x_N = \frac{2x_B}{1 + \sqrt{1 + \frac{4x_B^2 M^2}{Q^2}}} \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} x_B$$

miglior scaling in x_N quando $Q \sim M$

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_A, \frac{p^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{x_A}, \mathbf{p}_\perp \right)$$

frazione light-cone (longitudinale)
di momento partonico

$$p^2 = 2p^+p^- - \mathbf{p}_\perp^2$$

$$x = \frac{p^+}{P^+}$$

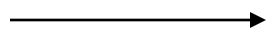
Quantizzazione di teoria di campo sul light-cone

regole di commutazione
al tempo $x^0=t=0$
evoluzione in x^0



regole di commutazione
al tempo “light-cone” $x^+=0$
evoluzione in x^+

variabili cinematiche \mathbf{x}



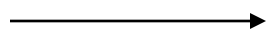
x^- , \mathbf{x}_\perp

momenti coniugati \mathbf{k}



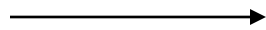
k^+ , \mathbf{k}_\perp

Hamiltoniana k^0



k^-

quanto di campo



$$\psi(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} b_\alpha(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}$$

$$\psi_+(x) = \int \frac{dk^+ d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^3 k^+} b_\alpha(\mathbf{k}) u_+(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) v_+(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}$$

$$[b_\alpha(\mathbf{k}), b_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2k^0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\alpha'}$$

$$[b_\alpha(\mathbf{k}), b_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 k^- \delta(k^+ - k'^+) \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta_{\alpha\alpha'}$$

.....

spazio di Fock

.....

Algebra di Dirac sul light-cone

rappresentazione usuale delle matrici di Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

↙ così (anti-)particelle hanno solo componenti upper (lower) nello spinore di Dirac

nuova rappresentazione per teoria di campo light-cone

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_{\perp} = \begin{pmatrix} i\sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & i\sigma_{\perp} \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad \gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad \text{ok}$$

definizioni : $\gamma^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0 \pm \gamma^3)$ $P_{\pm} = \frac{1}{2}\gamma^{\mp}\gamma^{\pm}$



proiettori $(P_{\pm})^2 = P_{\pm}$; $P_+ P_- = P_- P_+$, $P_+ + P_- = \mathbf{1}$

$$P_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad |\psi\rangle = \begin{vmatrix} \phi \\ \chi \end{vmatrix} , \quad P_+ |\psi\rangle = \phi , P_- |\psi\rangle = \chi$$

Proiettare eq. di Dirac

$$P_{\pm} (i\gamma \cdot D + m) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0$$

$$D_{\pm} = \partial_{\pm} - igA^{\mp}$$



$$\begin{cases} i\gamma^{-} D_{-} \chi = -i\gamma_{\perp} \mathbf{D}_{\perp} \phi - m\phi \\ i\gamma^{+} D_{+} \phi = -i\gamma_{\perp} \mathbf{D}_{\perp} \chi - m\chi \end{cases}$$

← non contiene “tempo” x^{+} :
 χ dipende da ϕ e \mathbf{A}_{\perp} a x^{+} fissato
 ϕ, \mathbf{A}_{\perp} gradi di libertà indipendenti

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{“good”} \\ \leftarrow \text{“bad”} \end{matrix} \quad \text{componenti light-cone} \quad \begin{matrix} P_{+} |\psi\rangle \\ P_{-} |\psi\rangle \end{matrix}$$

componenti “good” → componenti indipendenti e leading
 componenti “bad” → dipendenti dall’ interazione (quark-gluone)
 e pertanto di ordine superiore

Stati di spin per quark

generatore delle rotazioni di spin intorno a z $\Sigma^3 = \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^2] = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

se momento $k \parallel z$, misura l'elicità

$\gamma^1, \gamma^2, \gamma_5$ commutano con $P_{\pm} \rightarrow 2$ possibili scelte :

- diagonalizzare γ_5 e $\Sigma^3 \rightarrow$ base di elicità
- diagonalizzare γ^1 (o γ^2) \rightarrow base di "trasversità"

N.B. in base di elicità $\gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$ $\Sigma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$



elicità = chiralità per componente "good" ϕ

elicità = - chiralità per componente "bad" χ

N.B. proiettore di polarizzazione trasversa $P_{\uparrow/\downarrow} = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5 \gamma^1)$ $[P_{\uparrow/\downarrow}, P_{\pm}] = 0$

definiamo $P_{\uparrow/\downarrow} \phi = \phi_{\perp/\top} = f(\phi_{\pm})$

$\phi_{\perp/\top}$ non sono autostati dell'operatore di spin trasverso !



$$\Sigma^1 = \gamma_5 \gamma_0 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_1 \\ -i\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}$$