

Riassunto della lezione precedente

- color-gauge invariance dei correlatori bilocali
 - operatore di gauge link
 - funzioni T-odd permesse anche nello stato iniziale
 - struttura piu` ricca al leading twist → diverse sorgenti di SSA
- effetto Sivers: distinguibilità da effetto Collins;
 - analisi in flavor di dati HERMES → segno di funzione di Sivers;
 - analisi sistematica di dati HERMES+BNL+COMPASS
 - parametrizzazione per $f_{1T}^{\perp q}$ $q=u,d$
 - teorema di Collins: $f_{1T}^{\perp}(\text{SIDIS}) = - f_{1T}^{\perp}(\text{Drell-Yan})$
 - legame tra f_{1T}^{\perp} e GPD E
- GPD: introduzione intuitiva “diagrammatica”
 - cinematica DVCS
 - correlatore non locale e non diagonale
 - analisi a twist=2 → 8 GPD

Analisi in twist del correlatore non diagonale

estrazione del contributo al leading twist procede come per PDF:

- proiezione delle componenti LC “good” con operatori γ^+ , $\gamma^+\gamma_5$, $i\sigma^{i+}\gamma_5$ integrando su direzione “-” soppressa

$$\begin{aligned}\Phi'[\gamma^+] &= \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ix\bar{P}^+z^-} \langle P'S' | \bar{\psi} \left(-\frac{z^-}{2} \right) \gamma^+ \psi \left(\frac{z^-}{2} \right) | PS \rangle \Big|_{z^+=z_\perp=0} \\ &= \frac{1}{\bar{P}^+} \bar{u}(P'S') \left\{ \gamma^+ H(x, \xi, t) + \frac{i\sigma^{+\nu}\Delta_\nu}{2M} E(x, \xi, t) \right\} u(PS)\end{aligned}$$

q non polarizzato
non helicity flip

$$\begin{aligned}\Phi'[\gamma^+\gamma_5] &= \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ix\bar{P}^+z^-} \langle P'S' | \bar{\psi} \left(-\frac{z^-}{2} \right) \gamma^+\gamma_5 \psi \left(\frac{z^-}{2} \right) | PS \rangle \Big|_{z^+=z_\perp=0} \\ &= \frac{1}{\bar{P}^+} \bar{u}(P'S') \left\{ \gamma^+\gamma_5 \tilde{H}(x, \xi, t) + \frac{\gamma_5\Delta^+}{2M} \tilde{E}(x, \xi, t) \right\} u(PS)\end{aligned}$$

q polarizzato long.
non helicity flip

$$\begin{aligned}\Phi'[i\sigma^{i+}\gamma_5] &= \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ix\bar{P}^+z^-} \langle P'S' | \bar{\psi} \left(-\frac{z^-}{2} \right) i\sigma^{i+}\gamma_5 \psi \left(\frac{z^-}{2} \right) | PS \rangle \Big|_{z^+=z_\perp=0} \\ &= \frac{i}{\bar{P}^+} \bar{u}(P'S') \left\{ \sigma^{i+}\gamma_5 H_T(x, \xi, t) + \frac{\epsilon^{i+\alpha\beta}\Delta_\alpha\bar{P}_\beta}{M^2} \tilde{H}_T(x, \xi, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon^{i+\alpha\beta}\Delta_\alpha\gamma_\beta}{2M} E_T(x, \xi, t) + \frac{\epsilon^{i+\alpha\beta}\bar{P}_\alpha\gamma_\beta}{M} \tilde{E}_T(x, \xi, t) \right\} u(PS)\end{aligned}$$

helicity flip

Osservazioni :

- $S' \neq S$: correlatore non diagonale nello spin \rightarrow helicity flip del N possibile
 $\lambda_N \rightarrow x^2 \rightarrow$ n. raddoppia (quadruplica) per GPD che conservano (cambiano)
 $\lambda_N \otimes \lambda_q \rightarrow x^4$ l'elicità del quark, rispetto al n. di PDF corrispondenti
- chiral-even E, \tilde{E} collegate a cambio di elicità nel N ma non nel quark
 \rightarrow possibile solo per effetto del momento angolare orbitale dei quark
 $H_T, \hat{H}_T, E_T, \tilde{E}_T$ sono chiral-odd
- correlatore non diagonale \rightarrow le GPD non sono densità di probabilità, ma ampiezze di interferenza tra due stati differenti \rightarrow non c'è immediata interpretazione probabilistica al leading twist
(ma è possibile se GPD sono overlap di funzioni d'onda light-cone \leftrightarrow vedi interpretazione intuitiva precedente)

- limite forward

$$H(x, 0, 0) = f_1(x)$$

$$\tilde{H}(x, 0, 0) = g_1(x)$$

$$H_T(x, 0, 0) = h_1(x)$$

- 1° momento di Mellin

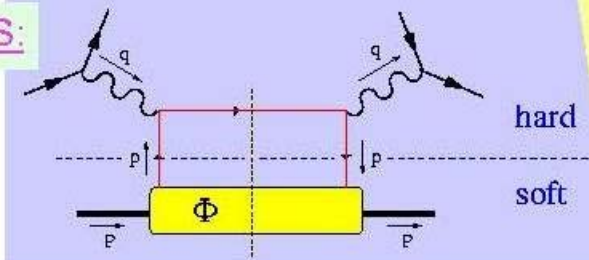
$$F_1(t) = \int dx H(x, \xi, t) \quad F_2(t) = \int dx E(x, \xi, t)$$

$$G_A(t) = \int dx \tilde{H}(x, \xi, t) \quad G_P(t) = \int dx \tilde{E}(x, \xi, t)$$

comportamento “ibrido” delle GPD

bilocale diagonale

DIS:

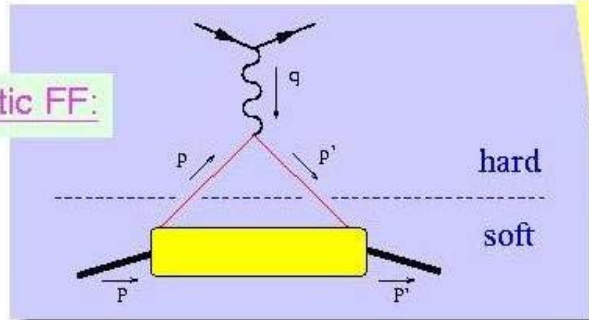


$$P^+ \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i p^+ z^-} \langle P, S | \bar{\psi}(\frac{-\bar{z}}{2}) \gamma^+ \psi(\frac{\bar{z}}{2}) | P, S \rangle$$

$$= \bar{u}(P, S) \gamma^+ u(P, S) q(x)$$

locale non diagonale

elastic FF:

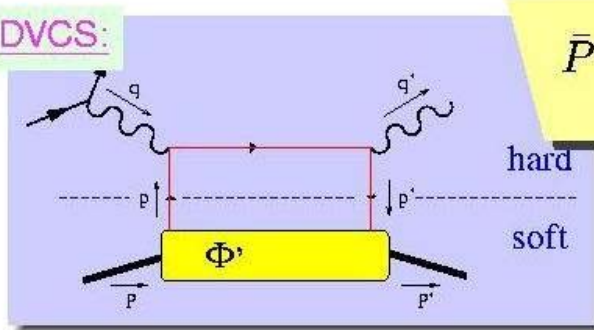


$$\langle P', S' | \bar{\psi}(0) \gamma^+ \psi(0) | P, S \rangle$$

$$= \bar{u}(P', S') \left\{ \gamma^+ F_1(t) + \frac{i \sigma^{+\nu} \Delta_\nu}{2M} F_2(t) \right\} u(P, S)$$

bilocale non diagonale

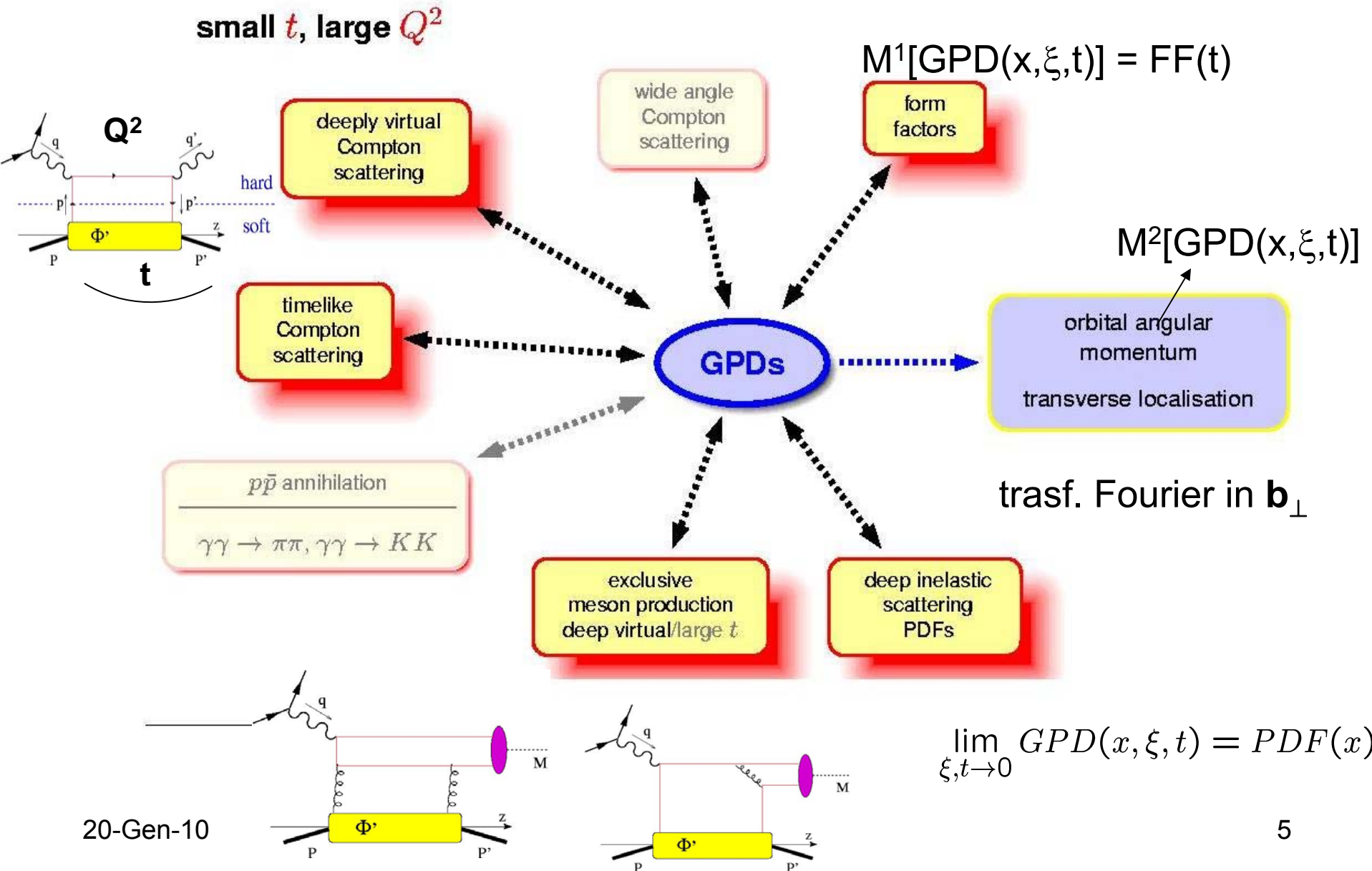
DVCS:



$$\bar{P}^+ \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{i p^+ z^-} \langle P', S' | \bar{\psi}(\frac{-\bar{z}}{2}) \gamma^+ \psi(\frac{\bar{z}}{2}) | P, S \rangle$$

$$= \bar{u}(P', S') \left\{ \gamma^+ H(x, \xi, t) + \frac{i \sigma^{+\nu} \Delta_\nu}{2M} E(x, \xi, t) \right\} u(P, S)$$

Mappa delle “interconnessioni” GPD in regime DVCS



Localizzazione dei partoni

- $P' \neq P : \Delta (e \Delta_{\perp}) \neq 0$ quindi accesso alla dislocazione dei quark nel parametro di impatto \mathbf{b}_{\perp} sul piano \perp al momento "longitudinale" x

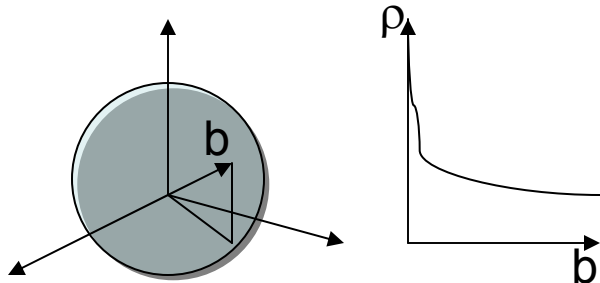
$$\Phi' = \int dz dz' e^{ip \cdot z - ip' \cdot z'} \dots \bar{\psi}(z') \dots \psi(z) \dots \rightarrow e^{i\bar{p} \cdot (z - z') + i\Delta \cdot \frac{z + z'}{2}} \dots$$

PDF, $\Delta=0$ per invarianza traslazionale

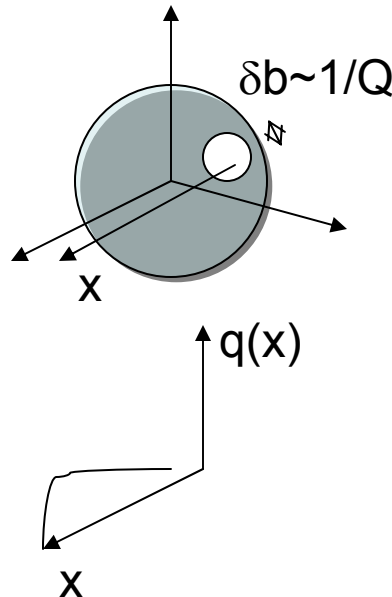
$\Delta \neq 0 \rightarrow b = (z + z')/2$ $\Delta_{\perp} \rightarrow \mathbf{b}_{\perp}$
localizzazione 2d

fattore di forma
 \rightarrow distrib. 1-dim spaziale

$$F(t = \Delta^2) = \int d\vec{b} e^{i\vec{b} \cdot \vec{\Delta}} \rho(b)$$

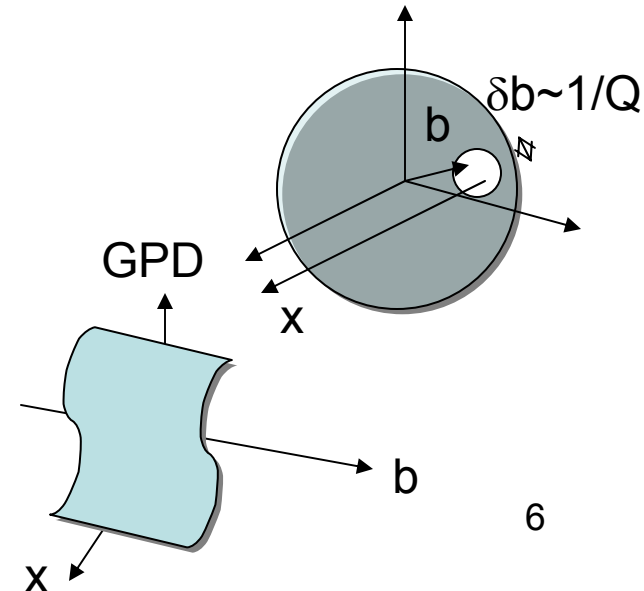


PDF \rightarrow
distrib. 1-dim in x



GPD \rightarrow distrib. 3-dim in x, \mathbf{b}_{\perp}

$$H(x, 0, t) = \int d\mathbf{b}_{\perp} e^{-i\Delta_{\perp} \cdot \mathbf{b}_{\perp}} f_1(x, \mathbf{b}_{\perp})$$



Localizzazione trasversa 2d dei partoni

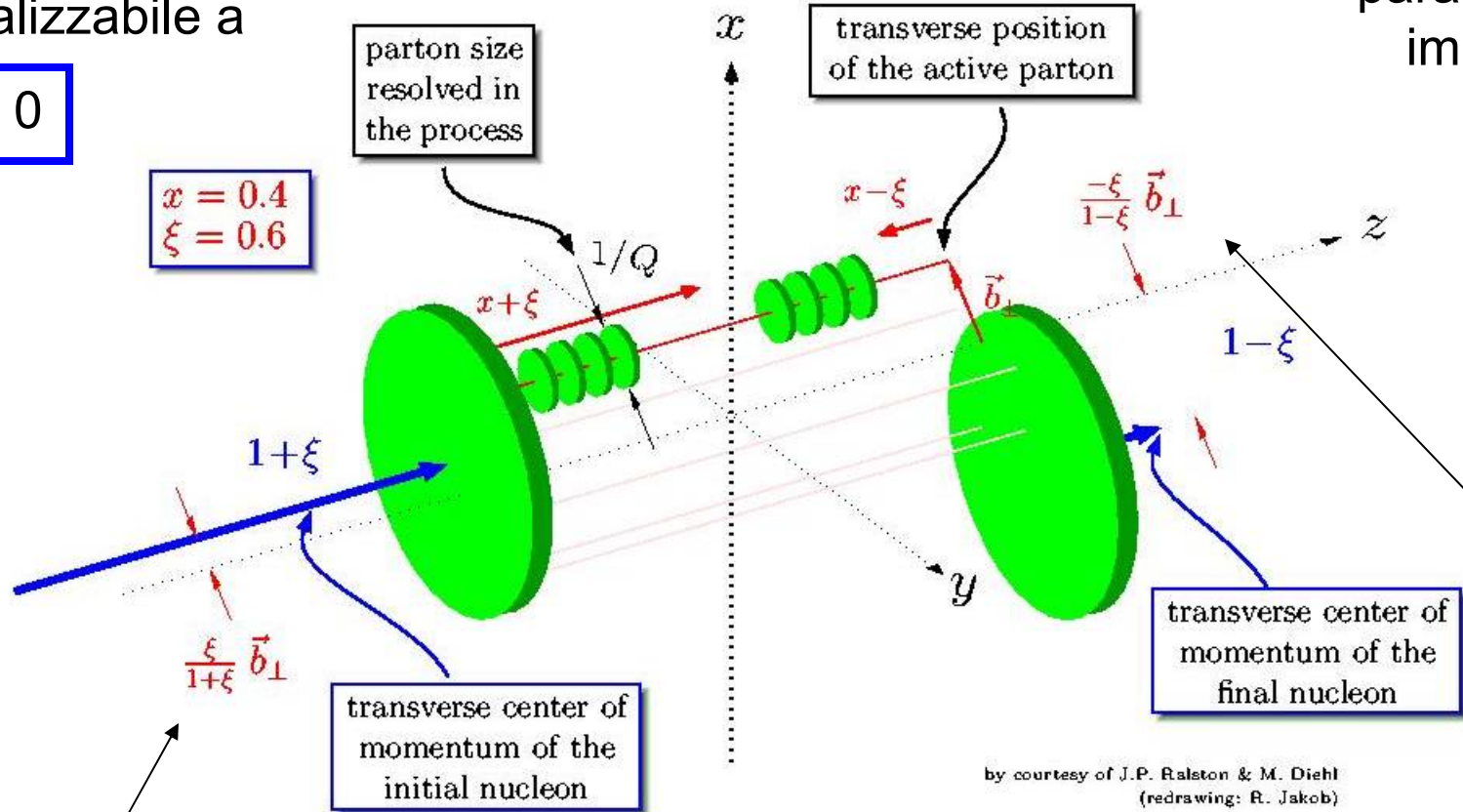
densita` di
probabilita` nello
spazio del
parametro di
impatto \mathbf{b}_\perp

$$\xi = 0$$

$$H(x, \xi = 0, t = -\Delta_\perp^2) = \int d\mathbf{b}_\perp e^{-i\Delta_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp} f_1(x, \mathbf{b}_\perp)$$

generalizzabile a

$$\xi \neq 0$$



boost da "average frame"
a sistema del N iniziale

boost da "average frame"
a sistema del N finale

Momentum sum rule per operatore locale twist=2 generico

$$\begin{aligned}
 \langle P' | \bar{q}(0) \gamma \cdot n q(0) | P \rangle &= \bar{u}_{P'} \gamma \cdot n u_P F_1(t) + \bar{u}_{P'} \frac{i\sigma^{\mu\nu} n_\mu \Delta_\nu}{2M} u_P F_2(t) \\
 &= \int dx \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda \cdot x} \langle P' | \bar{q}(-\lambda n/2) \gamma \cdot n U_{[-\lambda/2, \lambda/2]} q(\lambda n/2) | P \rangle \equiv M^1[\Phi'[\gamma^+]] \\
 &\equiv \bar{u}_{P'} \gamma \cdot n u_P \int dx H(x, \xi, t) + \bar{u}_{P'} \frac{i\sigma^{\mu\nu} n_\mu \Delta_\nu}{2M} u_P \int dx E(x, \xi, t) + \dots
 \end{aligned}$$

$$t = \Delta^2 = (P' - P)^2$$

Momento di Mellin (m+1)-esimo



$$n^\mu = (0, 1, 0_T)$$

$$\begin{aligned}
 M^{m+1}[\Phi'[\gamma^+]] &= \int dx x^m \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda \cdot x} \langle P' | \bar{q}(-\lambda n/2) \gamma \cdot n U_{[-\lambda/2, \lambda/2]} q(\lambda n/2) | P \rangle \\
 &= \underbrace{\langle P' | \bar{q}(0) \gamma \cdot n (-i\overleftrightarrow{D} \cdot n)^m q(0) | P \rangle}_{\text{}} \quad \begin{aligned} \overleftrightarrow{D} &= \frac{\vec{D} - \overleftarrow{D}}{2} \\ D &= \partial - ig A \end{aligned}
 \end{aligned}$$

prototipo di operatore più generale $\hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_m}^\mu = \bar{q}(0) \gamma^\mu i\overleftrightarrow{D}^{\mu_1} \dots i\overleftrightarrow{D}^{\mu_m} q(0)$

similmente per $\hat{A}_{\mu_1 \dots \mu_m}^\mu = \bar{q}(0) \gamma^\mu \gamma_5 i\overleftrightarrow{D}^{\mu_1} \dots i\overleftrightarrow{D}^{\mu_m} q(0)$
etc ...

(continua)

decomposizione in fattori di forma generalizzati
(invarianza per trasf. di Lorentz, parità e time-reversal)

$$\begin{aligned}\langle P' | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_m}^\mu | P \rangle &= \bar{u}(P') \gamma^\mu u(P) \sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m \textcolor{red}{A}_{m+1,i}(t) \Delta^{\mu_1} \dots \Delta^{\mu_i} \bar{P}^{\mu_{i+1}} \dots \bar{P}^{\mu_m} \\ &+ \bar{u}(P') \frac{i\sigma^{\mu\nu} \Delta_\nu}{2M} u(P) \sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m \textcolor{red}{B}_{m+1,i}(t) \Delta^{\mu_1} \dots \Delta^{\mu_i} \bar{P}^{\mu_{i+1}} \dots \bar{P}^{\mu_m} \\ &+ \bar{u}(P') u(P) \frac{\bar{P}^\mu}{M} \text{mod}(m, 2) \textcolor{red}{C}_{m+1}(t) \Delta^{\mu_1} \dots \Delta^{\mu_m} \Delta^{\mu_{m+1}}\end{aligned}$$

N.B. potenze pari di Δ per invarianza time-reversal ($P \leftrightarrow P' \Rightarrow \Delta \rightarrow -\Delta$)

si sceglie vettore light-like n^μ tale che $n \cdot \bar{P} = 1$; $n \cdot \Delta = -2\xi$

e si contraggono tutti gli indici

(continua)



$$n_\mu n_{\mu_1} \dots n_{\mu_m} \langle P' | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_m}^\mu | P \rangle =$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}(P') \gamma \cdot n u(P) \left[\sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m A_{m+1,i}(t) (2\xi)^i + \text{mod}(m, 2) C_{m+1}(t) (2\xi)^{m+1} \right] \\ & + \bar{u}(P') \frac{i\sigma^{\mu\nu} n_\mu \Delta_\nu}{2M} u(P) \left[\sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m B_{m+1,i}(t) (2\xi)^i - \text{mod}(m, 2) C_{m+1}(t) (2\xi)^{m+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{m+1}[\Phi'[\gamma^+]] &= \int dx x^m \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda \cdot x} \langle P' | \bar{q}(-\lambda n/2) \gamma \cdot n U_{[-\lambda/2, \lambda/2]} q(\lambda n/2) | P \rangle \\ &= \bar{u}_{P'} \gamma \cdot n u_P \int dx x^m H(x, \xi, t) + \bar{u}_{P'} \frac{i\sigma^{\mu\nu} n_\mu \Delta_\nu}{2M} u_P \int dx x^m E(x, \xi, t) \end{aligned}$$

N.B. per gluoni si ottiene $M^m \rightarrow M^{m-1}$ perché q & gluoni si mischiano nell'evoluzione

Polinomialità delle GPD

$$M_H^{m+1}(\xi, t) = \sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m A_{m+1,i}(t) (2\xi)^i + \text{mod}(m, 2) C(t) (2\xi)^{m+1}$$

$$M_E^{m+1}(\xi, t) = \sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^m B_{m+1,i}(t) (2\xi)^i - \text{mod}(m, 2) C(t) (2\xi)^{m+1}$$

condizione stringente per i modelli, perché ottenuta da principi generali di invarianza

“D-term” con supporto in
 $-\xi \leq x \leq \xi$
cioè non accessibile a PDF

polinomialità di GPD offre soluzione a problema della “spin crisis”

Regola di somma per momento angolare

elicità (PDF) definite in IFM (o su LC) \neq spin dei partoni di valenza

punto di partenza: definizione gauge invariante degli operatori in gioco

R.L. Jaffe e A. Manohar, N.P. **B337** (90) 509

X. Ji, J. Tang e P. Hoodboy, P.R.L. **76** (96) 740

densità d'energia-impulso
(operatore locale)

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{QCD}}{\partial \partial_\mu q} \partial_\nu q - \delta^{\mu\nu} \mathcal{L}_{QCD} \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\
 &= \sum_q \bar{q} \gamma^\mu i D^\nu q + G^{\mu\alpha} G_\alpha^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} \\
 &= T_q^{\mu\nu} + T_G^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow P^\nu = \int d\mathbf{x} T^{0\nu} \quad \text{conservato}$$

densità momento angolare

$$M^{\lambda\mu\nu} = x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu} \quad \text{non locale}$$

operatore momento angolare

$$J^i = \epsilon^{ijk} \int d\mathbf{x} M^{0jk}$$

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\lambda} = 0 \Rightarrow J_q^i, J_G^i \quad \text{conservato}$$

spin del protone \rightarrow elemento di matrice della componente lungo z (o "+")
 di operatore momento angolare su stati di protone
 con 3^a componente dello spin = 1/2 lungo z (o "+")

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \langle P_{\frac{1}{2}} | \hat{J}_z | P_{\frac{1}{2}} \rangle \equiv \langle P_{\frac{1}{2}} | \hat{J}_3 | P_{\frac{1}{2}} \rangle = \int d\mathbf{x} \langle P_{\frac{1}{2}} | M^{012}(x) | P_{\frac{1}{2}} \rangle \\ &= \int d\mathbf{x} \langle P_{\frac{1}{2}} | x_1 T^{02}(x) - x_2 T^{01}(x) | P_{\frac{1}{2}} \rangle \\ &= \int d\mathbf{x} \left[x_1 \langle P_{\frac{1}{2}} | T^{02}(0) | P_{\frac{1}{2}} \rangle - x_2 \langle P_{\frac{1}{2}} | T^{01}(0) | P_{\frac{1}{2}} \rangle \right]\end{aligned}$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

invarianza traslazionale

$T^{\mu\nu}$ operatore locale a twist=2 \rightarrow decomposizione per m=1



$$\begin{aligned}\langle P' | T^{\mu\nu} | P \rangle &= \bar{u}(P') \gamma^\mu u(P) A_{2,0}(t) \bar{P}^\nu + \bar{u}(P') \frac{i\sigma^{\mu\alpha} \Delta_\alpha}{2M} u(P) B_{2,0}(t) \bar{P}^\nu \\ &\quad + \bar{u}_{P'} u_P \frac{\bar{P}^\mu}{M} C_2(t) \Delta^\nu\end{aligned}$$

sia per q che G

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \langle P_{\frac{1}{2}} | \hat{J}_z | P_{\frac{1}{2}} \rangle = \frac{1}{2} [A_{20}(0) + B_{20}(0)] \equiv \frac{1}{2} [A(0) + B(0)] \\ &= \sum_q \frac{1}{2} [A_q(0) + B_q(0)] + \frac{1}{2} [A_G(0) + B_G(0)] \\ &= \sum_q \langle \hat{J}_z^q \rangle + \langle \hat{J}_z^G \rangle\end{aligned}$$



Commenti



$$\begin{aligned}\langle P | \hat{P}^+ | P \rangle &= \int d\mathbf{x} \langle P | T^{0+} | P \rangle \propto A(0) P^+ \\ &= M^2 [\Phi[\gamma^+]] \propto P^+ \int_{-1}^1 dx x f_1(x)\end{aligned}$$

sia per q che G, cioè

$$\begin{aligned}\sum_q \int_{-1}^1 dx x f_1^q(x) + \int_0^1 dx G(x) &= \sum_q A_q(0) + A_G(0) \\ &= \sum_q \langle P_q^+ \rangle + \langle P_G^+ \rangle = 1\end{aligned}$$

frazione di momento portata
da quark & gluoni
A(0) generalizza $F_1(0)$

$$\frac{1}{2} = \langle P_{\frac{1}{2}} | \hat{J}_z | P_{\frac{1}{2}} \rangle = \frac{1}{2} [A(0) + B(0)]$$

analogamente B(0)
generalizza $F_2(0)$

- analogamente $T^{\mu\nu}$ fornisce la frazione di spin del protone portata da quark & gluoni
- ma non esiste esperimento per “rivelare” $T^{\mu\nu}$ (tensore sensibile a sonda tensoriale: il gravitone?)
- come misurare spin dei costituenti? Soluzione: polinomialità delle GPD

(continua)

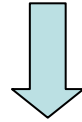
• per m=1

11

$$M_H^2(\xi, t) = \int_{-1}^1 dx x H(x, \xi, t) = A_{2,0}(t) + C_2(t) (2\xi)^2$$

$$M_E^2(\xi, t) = \int_{-1}^1 dx x E(x, \xi, t) = B_{2,0}(t) - C_2(t) (2\xi)^2$$

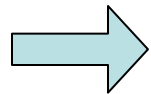
M² per q ;
M¹ per G



$$\sum_q \int_{-1}^1 dx x [H^q(x, 0, 0) + E^q(x, 0, 0)] + \int_0^1 dx [H^G(x, 0, 0) + E^G(x, 0, 0)]$$

$$\equiv \sum_q \int_{-1}^1 dx x [f_1^q(x) + E^q(x, 0, 0)] + \int_0^1 dx [f_1^G(x) + E^G(x, 0, 0)]$$

$$= \sum_{i=q,G} A_i(0) + B_i(0) = 2 \left[\sum_q \langle \hat{J}_z^q \rangle + \langle \hat{J}_z^G \rangle \right] = A(0) + B(0) = 2 \langle P_{\frac{1}{2}} | \hat{J}_z | P_{\frac{1}{2}} \rangle$$



DIS non polarizzato $ep \rightarrow e'X$ ($\rightarrow f_1$) +

DVCS “ “ $ep \rightarrow e' \gamma p'$ ($\rightarrow E$ ma convoluzione più difficile)

permettono in linea di principio di decomporre lo spin $\frac{1}{2}$ del p
in termini di momento angolare totale dei partoni



si deduce anche $\sum_{i=q,G} B_i(0) = 0$

Come varia il peso relativo di J_q e J_G ?

- tutte le definizioni precedenti dipendono da scala di rinormalizzazione μ
- operatori \hat{O} ed el. matrice $\langle \hat{O} \rangle$ dallo stesso $T^{\mu\nu} \rightarrow$ stessa evoluzione
- $\int dx$ non cambia comportamento a corto raggio (QCD) \rightarrow evoluzione DGLAP

Equazioni di evoluzione (al LO)

$$\frac{\partial}{\partial \log \mu^2} \begin{pmatrix} J_q(\mu) \\ J_G(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{qq} & \gamma_{qG} \\ \gamma_{Gq} & \gamma_{GG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_q(\mu) \\ J_G(\mu) \end{pmatrix}$$

matrice delle dimensioni
anomale; al LO

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -16 & 3n_f \\ 16 & -3n_f \end{pmatrix}$$

soluzione per $\mu \rightarrow \infty$ $\left\{ \begin{array}{l} J_q^\infty = \frac{1}{2} \frac{3n_f}{16+3n_f} \\ J_G^\infty = \frac{1}{2} \frac{16}{16+3n_f} \end{array} \right.$ cioè $J_q \sim J_G$ per $n_f=5$

altri risultati : $\mu=1$ GeV $J_G \sim 0.25$ da QCD sum rules
 $\mu=0.5$ GeV $J_G \sim 0.24$ da quark models

Come isolare contributo di momento angolare orbitale?

si dimostra la seguente decomposizione gauge invariante: Ji, P.R.L. **78** ('97) 610

$$\hat{J}_z = \int d\mathbf{x} M^{012} = \epsilon^{ij3} \int d\mathbf{x} [x_i T_q^{0j} + x_i T_G^{0j}] = \hat{J}_z^q + \hat{J}_z^G$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_z^q &= \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma_0 \gamma_3 \gamma_5 \psi + \epsilon^{ij3} \psi^\dagger x_i \times (-iD_j) \psi \right] \\ &= \int d\mathbf{x} \left[\psi^\dagger \frac{\Sigma_3}{2} \psi + \epsilon^{ij3} \psi^\dagger x_i \times (-iD_j) \psi \right] \equiv \hat{S}_z^q + \hat{L}_z^q \end{aligned}$$

$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$
operatore elicità

$$\hat{J}_z^G = \epsilon^{ij3} \int d\mathbf{x} x_i \times \underbrace{(\mathbf{E} \times \mathbf{B})_j}_{\substack{\text{vettore di Poynting del campo di colore} \\ \text{= densità di momento della radiazione}}}$$

$E^i = F^{i0}$
 $B^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ilm} F_{lm}$
 $\mathbf{D} = \nabla + ig\mathbf{A}$

densità di momento angolare della radiazione

Prendendo elementi di matrice degli operatori sopra su stati $|P^{1/2}\rangle$ di protone con $P_z=P$ e $S_z=1/2$ alla scala di rinormalizzazione μ^2 abbiamo

$$\frac{1}{2} = \langle \hat{J}_z \rangle \big|_{\mu^2} = \sum_q \langle \hat{J}_z^q \rangle \big|_{\mu^2} + \langle \hat{J}_z^G \rangle \big|_{\mu^2} = \frac{1}{2} \Delta \Sigma(\mu^2) + \sum_q L_z^q(\mu^2) + J_z^G(\mu^2)$$

Regola di somma di spin?

$$\frac{1}{2} = \langle \hat{J}_z \rangle \Big|_{\mu^2} = \sum_q \langle \hat{J}_z^q \rangle \Big|_{\mu^2} + \langle \hat{J}_z^G \rangle \Big|_{\mu^2} = \frac{1}{2} \Delta\Sigma(\mu^2) + \sum_q L_z^q(\mu^2) + J_z^G(\mu^2)$$

- anomalia $U_A(1)$ mischia elicità dei q ($\Delta\Sigma$) con quella dei G a NLO
→ separazione dipendente da schema oltre che da μ^2
- la relazione operatoriale (da cui scende la regola di cui sopra) è una regola di somma se gli elementi di matrice di operatori locali su stati $|P^{1/2}\rangle$ possono essere rappresentati come momenti di Mellin di distribuzioni misurate in processi anelastici sugli stessi stati $|P^{1/2}\rangle$ e con gli stessi operatori di corrente

Verifica: $q \quad \Delta\Sigma(\mu^2) = \sum_q \int_{-1}^1 dx g_1^q(x, \mu^2) = \sum_q \langle PS | \bar{q} \gamma^+ \gamma_5 q | PS \rangle \Big|_{\mu^2}$

\searrow \nearrow
 $\rightarrow \int dx \int dz^- e^{ixP^+z^-} \langle PS | \bar{\psi}(0) \gamma^+ \gamma_5 \psi(z^-) | PS \rangle \Big|_{\mu^2}$
 $\rightarrow \int dx x \int dz^- e^{ixP^+z^-} \langle PS | \bar{\psi}(0) \gamma^+ \psi(z^-) | PS \rangle \Big|_{\mu^2}$

$$\sum_q J_z^q(\mu^2) = \frac{1}{2} \sum_q [A_q(0) + B_q(0)]_{\mu^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx x \left[f_1^q(x, \mu^2) + E^q(x, 0, 0, \mu^2) \right]$$

$$\int dx x \int \frac{dz^-}{2\pi} e^{ix\bar{P}^+z^-} \langle P'S' | \bar{\psi} \left(-\frac{z^-}{2} \right) \gamma^+ \psi \left(\frac{z^-}{2} \right) | PS \rangle \Big|_{z^+=z_\perp=0}$$



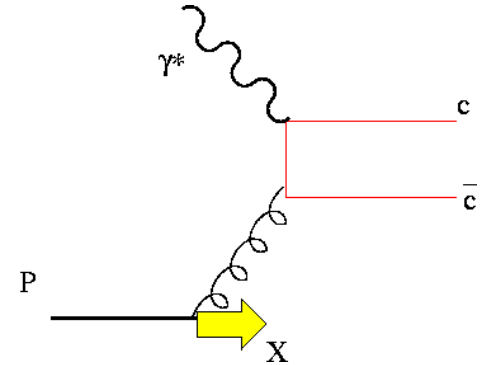
Momento angolare orbitale

si definisce per differenza

$$\begin{aligned}
 \sum_q L_z^q(\mu^2) &= \sum_q J_z^q(\mu^2) - \frac{1}{2} \Delta\Sigma(\mu^2) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_q \int_{-1}^1 dx \left[x f_1^q(x, \mu^2) + x E^q(x, 0, 0, \mu^2) - g_1^q(x, \mu^2) \right] \\
 &\equiv \int_{-1}^1 dx L_z^q(x, \mu^2)
 \end{aligned}$$

È possibile estrarre l'elicità del gluone $\Delta G(x)$ da
 $e+p \rightarrow D+X$ attraverso meccanismo di γ -G fusion
 (COMPASS); quindi alla scala μ^2

$$J_z^G \Big|_{\mu^2} = \Delta G(\mu^2) + L_z^G(\mu^2)$$



$$\Delta G(\mu^2) = \int_0^1 dx \Delta G(x, \mu^2) \quad \text{è una regola di somma, perché}$$

$$J_z^G(\mu^2) = \frac{1}{2} [A_G(0) + B_G(0)] = \frac{1}{2} \int_0^1 dx [G(x, \mu^2) + E^G(x, 0, 0, \mu^2)]$$

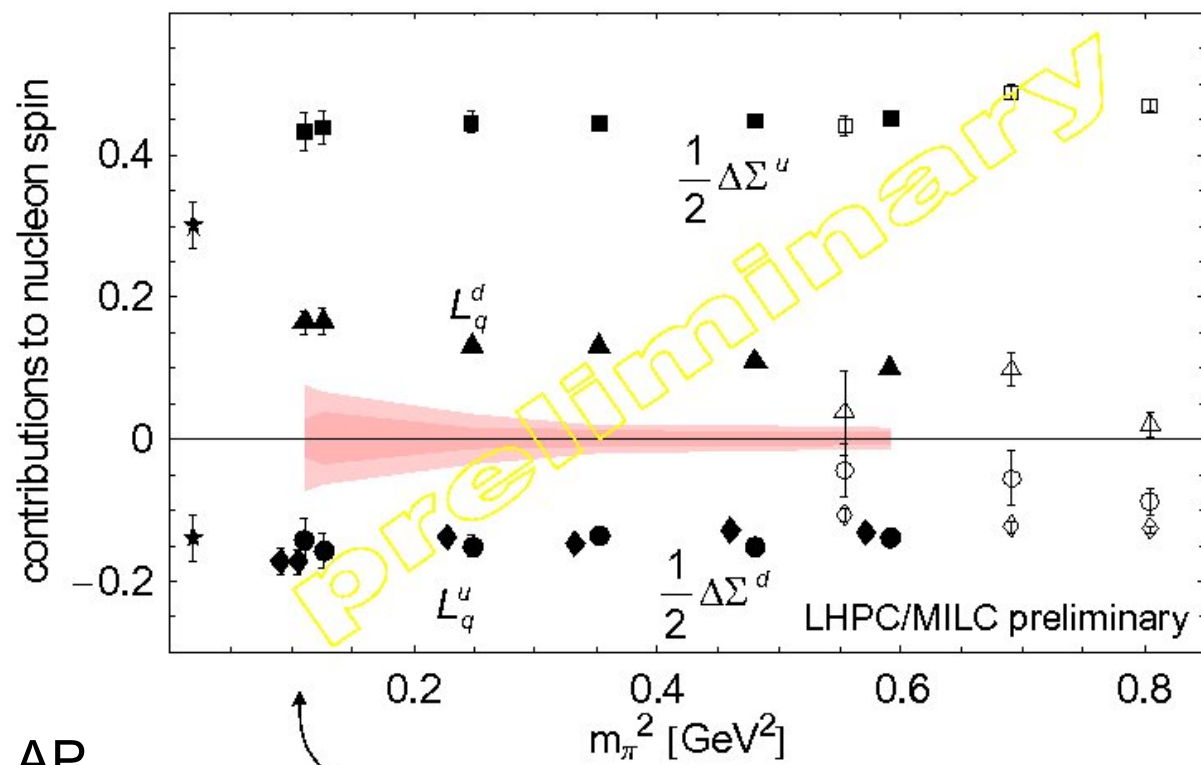
quindi, analogamente

$$L_z^G(\mu^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx [G(x, \mu^2) + E^G(x, 0, 0, \mu^2) - \Delta G(x, \mu^2)] \equiv \int_0^1 dx L_z^G(x, \mu^2)$$

(continua)

in sintesi la regola di decomposizione dello spin del protone si può scrivere in modo gauge invariante alla scala di rinormalizzazione μ^2 come

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Delta\Sigma(\mu^2) + L_q(\mu^2) + \Delta G(\mu^2) + L_g(\mu^2)$$



P. Haegler
QCD N '06

l'evoluzione DGLAP
mischia le varie componenti



20-Gen-10

at $m_\pi \approx 350 \text{ MeV}$

quenched

$$L_q^d \approx -L_q^u \approx 30\% \text{ of } \frac{1}{2}$$