

# Riassunto della lezione precedente

- QPM picture del DIS polarizzato
  - distribuzione di elicità
  - distribuzione di spin trasverso, soppressa  $\sim p_T$
- misura sperimentale di asimmetria di elicità → distribuzione di elicità
  - 1° momento di Mellin → contributo dei vari flavor all'elicità
- Ellis-Jaffe sum rule e l'esperimento EMC : la spin crisis
- GDH sum rule

# Regole di somma

## Gerasimov-Drell-Hearn sum rule

test di  $g_1(x)$  attraverso assorbimento di  $\gamma$  pol. su N pol.

ampiezza Compton per  $\theta=0$  
$$T(\nu) = 4\pi \left[ \underbrace{\vec{\epsilon}_f^* \cdot \vec{\epsilon}_i}_{\text{polarizzazione del } \gamma} f(\nu) + i \underbrace{(\vec{\epsilon}_f^* \times \vec{\epsilon}_i)}_{\text{no spin flip}} \underbrace{g(\nu)}_{\text{spin flip}} \right]$$

simmetria di crossing  $T(-\nu, i \leftrightarrow f) = T(\nu) \rightarrow f^*(-\nu^*) = f(\nu)$ ,  $g^*(-\nu^*) = -g(\nu)$

causalita'  $T(t) = 0$  per  $t < 0 \Leftrightarrow$  relazione di dispersione tra  $Re [T]$  e  $Im [T]$

unitarieta' teorema ottico

$$4\pi Im[f(\nu)] = \nu \sigma_{tot} = \frac{\nu}{2} (\sigma_{1/2} + \sigma_{3/2})$$

$$4\pi Im[g(\nu)] = \nu \Delta\sigma_{tot} = \frac{\nu}{2} (\sigma_{1/2} - \sigma_{3/2})$$



$$4\pi f(\nu) = \frac{2}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \frac{\nu'^2 \sigma_{tot}(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2}$$

$$4\pi g(\nu) = \frac{2\nu}{\pi} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu' \frac{\nu' \Delta\sigma_{tot}(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2}$$



(GDH continua)

Lorentz + gauge invariance  
(Low-Energy Theorems)

$$f(\nu) = -\frac{\alpha}{M} + (\alpha_E + \beta_M) \nu^2 + o(\nu^4)$$

$$g(\nu) = -\frac{\alpha \kappa^2}{2M^2} \nu + \gamma \nu^3 + o(\nu^5)$$

Thompson scatt.

polarizz. elettrica e magnetica

momento magnetico anomalo

$$\int_{\nu_0}^{\infty} d\nu \frac{\sigma_{1/2} - \sigma_{3/2}}{\nu} = -\frac{2\pi^2 \alpha}{M^2} \kappa^2$$



momento magnetico anomalo legato a specifica struttura di spin  
nell'assorbimento del fotone

Ellis-Jaffe sum rule contenuta in GDH sum rule :

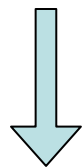
$$\Gamma_1^p(Q^2) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow 0} \frac{M\nu_0}{8\pi^2 \alpha} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu \frac{\sigma_{1/2}^T - \sigma_{3/2}^T}{\nu} = -\frac{\nu_0}{M} \frac{\kappa^2}{4} \equiv \frac{\nu_0}{M} I(0)$$



$\nu_0$  = soglia di produzione di  $\pi$

(GDH continua)

$$I(0) = \frac{M^2}{8\pi^2\alpha} \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \left( \sigma_{1/2}^T - \sigma_{3/2}^T \right)$$



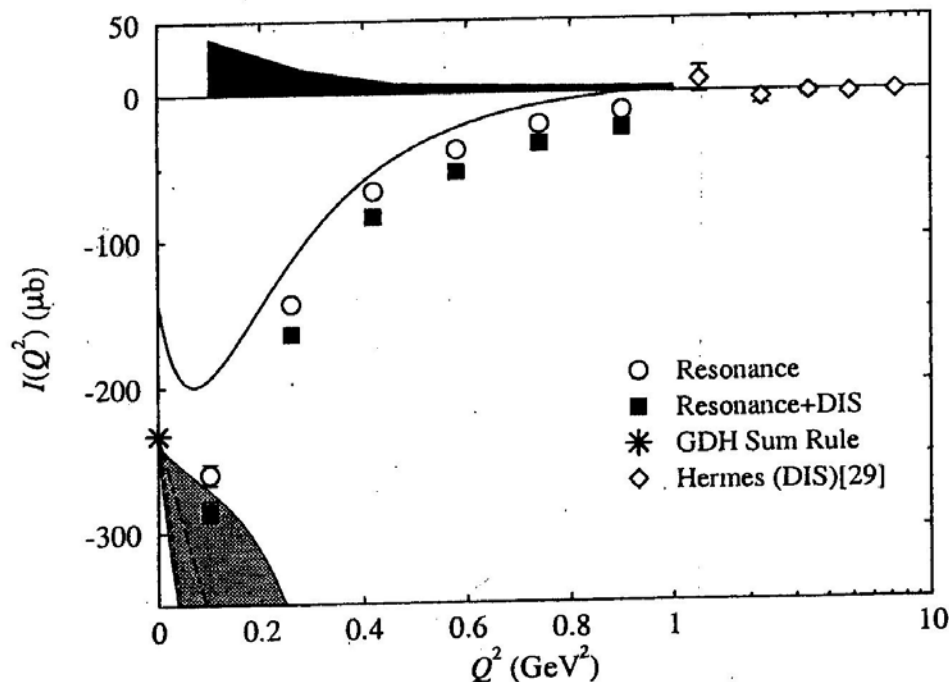
generalizzazione  $\forall Q^2$   
(non univoca)

$$I(Q^2) = \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu \frac{1 - x_B}{\nu} \left( \sigma_{1/2}^T - \sigma_{3/2}^T \right)$$



$$-\frac{2\pi^2\alpha\kappa^2}{M^2} \quad Q^2 \xrightarrow{\leftarrow} 0$$

$$Q^2 \xrightarrow{\rightarrow} \infty \quad \frac{16\pi^2\alpha}{Q^2} \Gamma_1^p(Q^2)$$



## Bjorken sum rule polarizzata

da accoppiamenti deboli  
in decadimento  $\beta$  del N

$$\int_0^1 dx [g_1^p(x) - g_1^n(x)] = \frac{1}{6} \frac{G_A}{G_V} \left( 1 - \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} + \dots \right)$$

← assiale
← vettoriale

correzioni pQCD

QPM : funz. d'onda del q in P secondo  $SU_f(3) \otimes SU(2) = SU(6)$

$$A_1^p = \frac{\sum_f e_f^2 (q_f^\uparrow - q_f^\downarrow)}{\sum_f e_f^2 (q_f^\uparrow + q_f^\downarrow)} = \frac{5}{9}$$

$$A_1^n = \text{stesso con } u \leftrightarrow d = 0$$



$$\int_0^1 dx (g_1^p - g_1^n)$$



$$= \int_0^1 dx (A_1^p F_1^p - A_1^n F_1^n) = \frac{5}{18}$$



$$\frac{G_A}{G_V} \stackrel{\text{QPM}}{=} \frac{5}{3} \leftrightarrow 1.257 \pm 0.003$$

Sum rule :

QPM	+ pQCD	exp.
0.27778	$0.191 \pm 0.002$	$0.209 \pm 0.003$

nella rassegna sui risultati del QPM, diverse volte si è dedotta dal confronto con i dati sperimentali l'importanza delle correzioni di QCD :

- profilo asimmetrico delle distribuzioni partoniche per  $x_B \rightarrow 0$  , dovuto al contributo di gluoni e quark del “mare di Dirac”
- deviazioni dallo scaling predetto dal QPM per  $F_2$  e  $F_3$  , sia per DIS con fasci di elettroni che di neutrini
- deviazioni dalle corrispondenti regole di somma :  
del momento (50% è portato dai gluoni) ,  
Gross-Lewellin Smith , Gottfried , Bjorken , ...
- deviazioni dallo scaling in  $s$  sia per processi  $e^+e^-$  che DY
- deviazioni dalla distribuzione angolare e in  $p_T$  della coppia leptonica in processi di DY
- spin crisis: deviazioni dalla regola di somma di Ellis-Jaffe (solo meno del 30% dello spin del N è portato dai quark di valenza)

correzioni QCD		1	$\alpha_s$	$\alpha_s^2$	...
correzioni di potenze	1	QPM	→	IQPM	→
		Improved <b>Q</b> uark <b>P</b> arton <b>M</b> odel			
	1/Q				
	1/Q <sup>2</sup>				
	1/Q <sup>3</sup>				
	...				

## Breve riassunto

1° passo : rinormalizzazione della teoria → cancellazione delle divergenze ultraviolette (UV) :

- ad una certa scala  $\mu_R$  si definiscono le quantità fisiche come massa, coupling e intensità del campo attraverso la procedura di rinormalizzazione → controtermini nella  $\mathcal{L}$
- invarianza della fisica dalla scala  $\mu_R$  → equazioni di Callan-Symanzik

$$\mu_R \frac{d}{d\mu_R} G = 0 \quad \xrightarrow{\text{G = funzione di Green a n punti}} \left[ \mu_R \frac{\partial}{\partial \mu_R} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] G = 0$$
$$\frac{d}{d \log Q^2} \alpha_s(Q^2) = \beta(\alpha_s) \rightarrow \text{running } \alpha_s$$

$\gamma$  dimensione anomala dei campi

2° passo : teoremi di fattorizzazione → inglobare le divergenze infrarosse (IR) in funzioni incognite che generalizzano le distribuzioni partoniche



## Esempio: DIS inclusivo

Teorema (Collins, Soper, Sterman, '89)

$$F_{1/2/3}(x_B, Q^2) = \sum_{i=f, \bar{f}, a} \int_0^1 \frac{dx}{x} C_{1/2/3} \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F^2}{\mu_R^2}, \alpha_s(\mu_R^2) \right) \phi_i(x, \mu_F, \mu_R)$$

somma su quark, antiquark e gluoni

$\phi(x, \mu_F, \mu_R)$   
generalizzazione delle  
distribuzioni partoniche in QPM

$$C \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F}{\mu_R}, \alpha_s(\mu_R) \right)$$

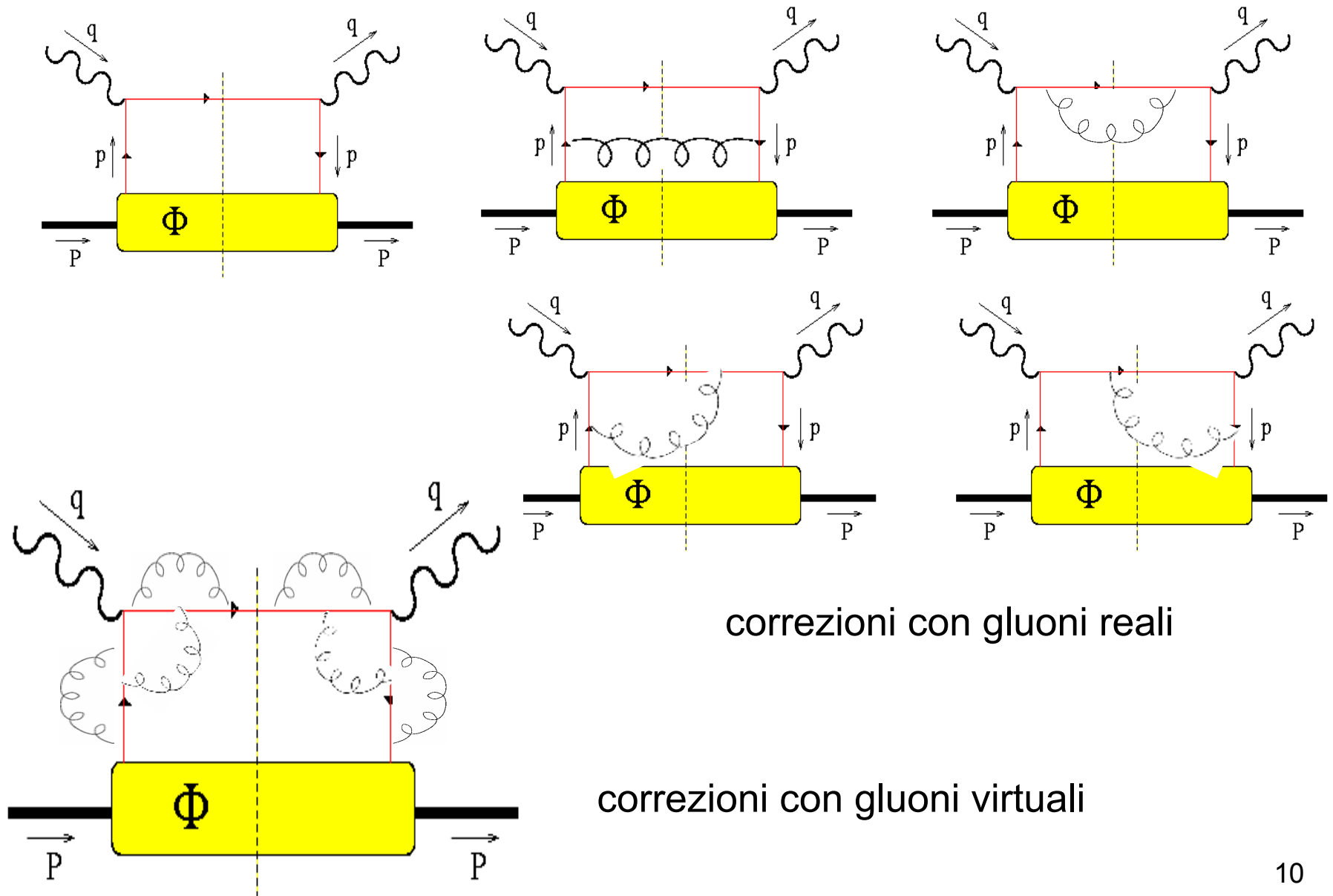
coeff. di Wilson  
generalizzazione delle  $F^{\text{el}}$   
di scatt. elastico in QPM

$\mu_R$  scala di rinormalizzazione

$\mu_F$  scala di fattorizzazione : definisce  
cio' che e' a brevi distanze  $\rightarrow C$   
da cio' che e' a lunghe distanze  $\rightarrow \phi$

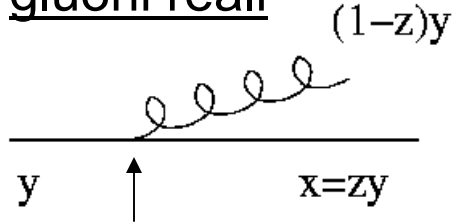
**N.B. puo' essere  $\mu_F = \mu_R (=Q)$**

(DIS inclusivo continua)



## Calcolo di C

gluoni reali



quark con momento  $y$  può irraggiare un gluone e riscaldare il momento ad  $x$

**divergenze collineari** per  $z \rightarrow 1$

**da riassorbire in  $\phi$**  perché connesse all'evoluzione del singolo  $q$ , indipendenti dall'interazione

determina l'evoluzione in  $Q^2$  di  $\phi$ , determina cioè il suo contenuto partonico

$$s = (p + q)^2 \sim 2p \cdot q - Q^2 = Q^2 \frac{1 - x_B}{x_B} \quad \text{divergenze soft per } x_B \rightarrow 1 \text{ (} s \rightarrow 0 \text{)}$$

non riassorbibili in  $\phi$  perché riguardano gluone in stato finale

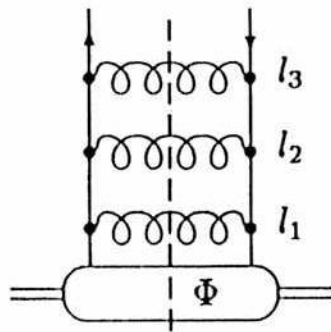
non riassorbibili in  $C$  perché  $(x_B/x - 1)^{-1}$  romperebbe fattorizzazione

gluoni virtuali quark on-shell nel taglio  $\rightarrow \delta((p+q)^2) \approx x_B/Q^2 \delta(x_B - 1)$

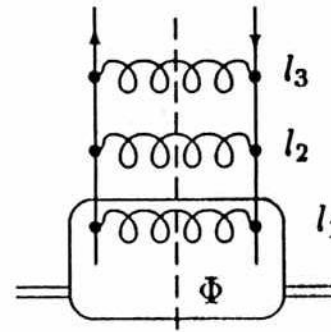
**in approssimazione collineare, cancellazione sistematica delle divergenze soft con gluoni reali = “fattorizzazione collineare”**

# Evoluzione

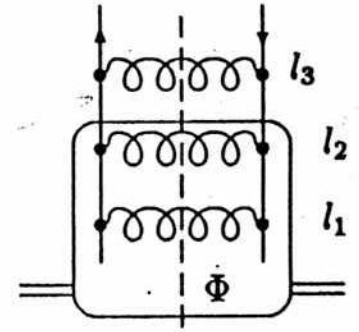
scala  $Q^2 = \mu_F \rightarrow$  al variare di  $\mu_F$  la funzione di splitting determina il contenuto partonico della distribuzione  $\phi$ , discrimina cioè cio' che va inglobato in  $\phi$  (essendo off-shell  $< \mu_F$ ) da cio' che va inglobato in  $C$  (essendo off-shell  $> \mu_F$ )



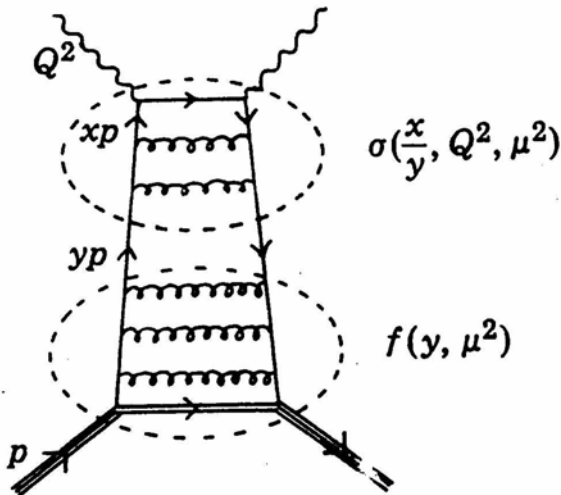
$$|\mu_F^2| \leq \bar{l}_{1T}^2 \leq \bar{l}_{2T}^2 \leq \bar{l}_{3T}^2$$



$$\bar{l}_{1T}^2 \leq |\mu_F^2| \leq \bar{l}_{2T}^2 \leq \bar{l}_{3T}^2$$



$$\bar{l}_{1T}^2 \leq \bar{l}_{2T}^2 \leq |\mu_F^2| \leq \bar{l}_{3T}^2$$



al variare di  $\mu_F$  la situazione cambia  
 $\rightarrow$  evoluzione

assorbiti in  $\phi < \mu_F <$  assorbiti in  $C$

al in

equazioni di evoluzione (**D**okshitzer-**G**ribov-**L**ipatov-**A**ltarelli-**P**arisi : DGLAP) determinano il modificarsi del contenuto delle distribuzioni partoniche al variare della scala di fattorizzazione  $\mu_F (=Q^2)$

ma la scala di partenza (ad es.  $Q_0^2$ ) e' arbitraria

→ assegnare contributi a  $\phi$  o a  $C$  e' arbitrario

→ necessita' di definire uno schema in cui calcolare l'evoluzione e confrontarsi con i dati consistentemente

diverse scelte : **schema DIS** (Altarelli, Ellis, Martinelli, '79) QPM esatto a  $Q_0^2$   
**schema  $\overline{MS}$**  (Bardeen *et al.*, '78 ; Furmanski & Petronzio, '82 ; Collins & Soper, '82)

potere predittivo di DGLAP:

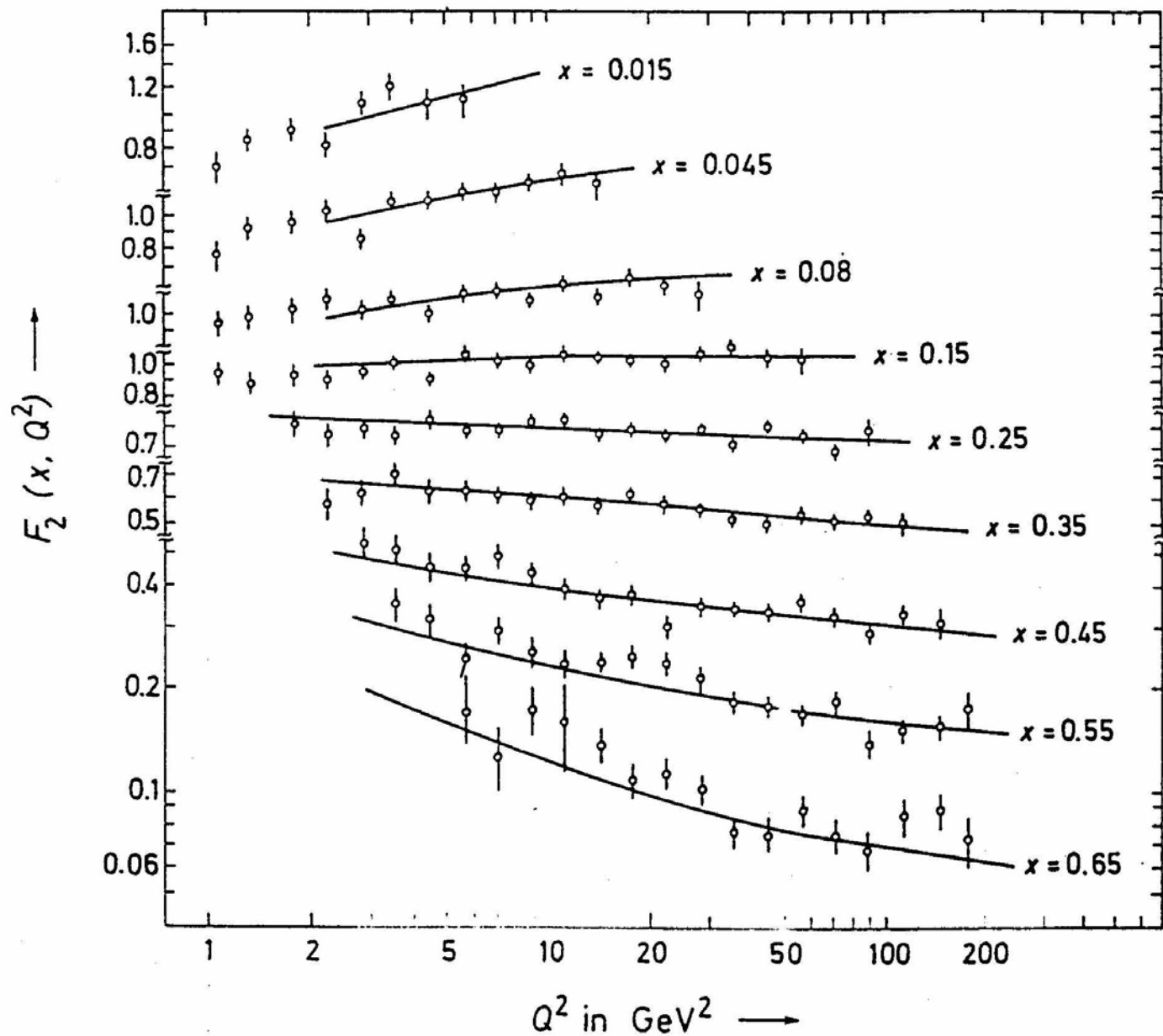
noto il risultato alla scala  $Q_0^2 \rightarrow$  DGLAP danno risultato alla scala  $Q^2 \neq Q_0^2$

DGLAP + fattorizzazione

→ universalita' delle distribuzioni partoniche

(definite ad una stessa scala  $\mu_F$  e nello stesso schema )

→ ampio potere predittivo della pQCD !



**Figure 19.9** The structure function  $F_2$  of neutrino–iron scattering. The curves are fits made on the basis of first-order perturbation theory in QCD (after Abramowicz 1983).

## DIS semi-inclusivo

vale un teorema di fattorizzazione analogo a DIS inclusivo purché non si osservi  $\mathbf{p}_T$  dei partoni

## $e^+e^-$ inclusivo

Teorema : la sezione d'urto totale è finita nel limite di particelle senza massa, cioè è libera da divergenze “infrarosse” (IR) (Sternman, '76, '78)  
[generalizzazione del teorema KLN (Kinoshita-Lee-Nauenberg)]

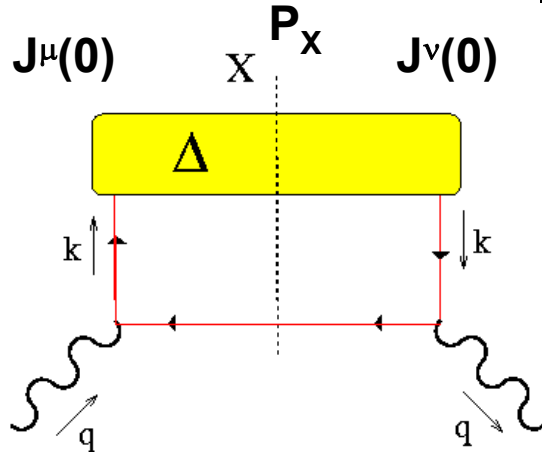
$$\sigma_{tot} = \underbrace{N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2}}_{\text{QPM}} \sum_f e_f^2 \underbrace{\sum_n s_n \alpha_s^n(Q^2)}_{\text{correzioni di pQCD}} \quad s_0 = 1$$

## Drell-Yan

Teorema di fattorizzazione

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dy d\Omega} = \sum_{f_1, f_2} \int_{x_1}^1 d\xi_1 \int_{x_2}^1 d\xi_2 \phi_{f_1}(\xi_1, \mu_F) \frac{d\sigma^{el}}{dQ^2 dy d\Omega} \left( \frac{x_1}{\xi_1}, \frac{x_2}{\xi_2}, \Omega, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(\mu_F) \right) \\ \phi_{f_2}(\xi_2, \mu_F) + o\left(\frac{1}{Q^2}\right)$$

## $e^+e^-$ inclusivo



$$\begin{aligned}
 W^{\mu\nu} &= \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(q - P_X) \\
 &\quad \langle 0 | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | 0 \rangle \\
 &= \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

Teorema: contributo dominante nel limite di Bjorken viene da corte distanze



$$\xi \rightarrow 0$$

ma prodotto di operatori nello stesso punto spazio-temporale non e' sempre ben definito in teoria di campo ! Esempio:

campo scalare neutro libero  $\phi(x)$

operatore composito = propagatore libero  $\Delta(x-y)$

$$\langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle = -i\Delta(x-y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m}{4\pi^2} \frac{K_1 \left( m \sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon} \right)}{\sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon}} - \frac{i}{4\pi} \delta((x-y)^2) \xrightarrow{x \rightarrow y} \infty !
 \end{aligned}$$