

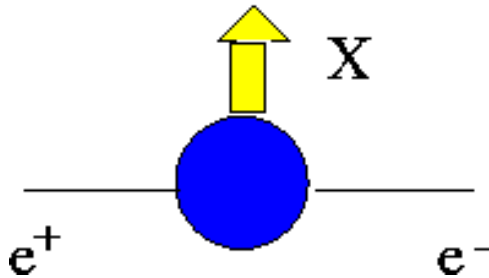
Schema

- riassunto precedente lezione
- OPE : singolarita` sul light-cone e classificazione dei diagrammi dominanti per DIS ed e^+e^- inclusivi ; definizione operativa di twist
- estensione del metodo di classificazione in twist a processi con evidente fattorizzazione \rightarrow approccio diagrammatico
- teoria di campo sul light-cone : “light-cone dominance”, proiettori di elicitita` e chiralita`
- Parton Distribution Functions (PDF) al leading twist (twist 2)

- DIS inclusivo : contributo dominante sul light-cone $x^2 \rightarrow 0$ (attraverso teorema ottico dominanza delle corte distanze $x \rightarrow 0$ per ampiezza Compton in avanti) ; e^+e^- inclusivo : contributo dominante a corte distanze $x \rightarrow 0$
- operatori composti in teoria di campo divergenti a corte distanze \rightarrow OPE = spostare divergenze, in ordine decrescente, in coefficienti calcolabili, lasciando operatori bilocali regolari (espandibili in serie infinita di operatori locali regolari)
- esempi : teorema di Wick ; applicazione a prodotto di correnti di fermioni liberi \rightarrow singolarita` dominante $\sim x^{-6} \rightarrow$ in DIS ed e^+e^- inclusivi si ritrova il risultato di QPM : a corte distanze i quark sono effettivamente liberi (prova rigorosa dell'asymptotic freedom)
- teoria di campo interagente : eq. del gruppo di rinormalizzazione introducono dimensione anomala che altera in modo non banale il conteggio delle singolarita` \rightarrow definizione di twist ; correzioni $\log Q^2$ ai coefficienti di Wilson
- relazioni di dispersione \rightarrow legame tra momenti di funzioni di struttura ed elementi di matrice adronici di operatori locali regolari

Ricorda : OPE dimostrabile solo per e^+e^- e DIS inclusivi

e^+e^- inclusivo

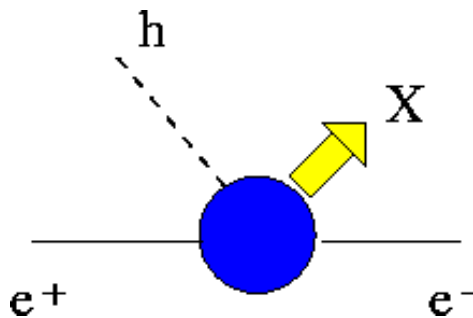


$$W^{\mu\nu} = \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle$$

$q^\mu \stackrel{c.m.}{=} (q^0, \mathbf{0})$ regime DIS: $Q^2 \rightarrow \infty \Rightarrow q^0 \rightarrow \infty$
 causalità \Rightarrow [...] definito su $\xi^2 \geq 0$
 contributo principale all'integrale da $q \cdot \xi$ finito
 $\Rightarrow \xi^0 \sim 0 \Rightarrow \xi \sim 0$

operatore composito a corte distanze \rightarrow OPE

e^+e^- semi-inclusivo



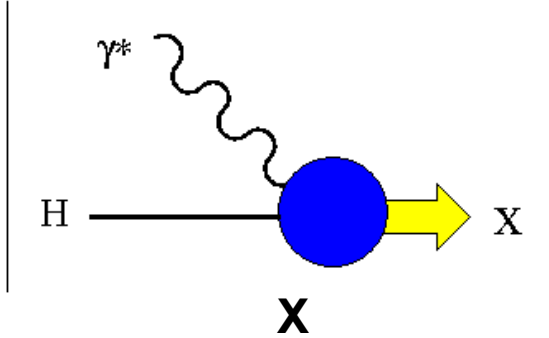
$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum_X \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | J^\mu(\xi) | P_h X \rangle \langle P_h X | J^\nu(0) | 0 \rangle$$

sistema dell'adrone a riposo $P_h^\mu = (M_h, \mathbf{0})$

$q \cdot \xi$ finito $\rightarrow W^{\mu\nu}$ dominato da $\xi^2 \sim 0$

ma stato $|P_h\rangle$ impedisce chiusura \sum_X
 \rightarrow OPE non puo` essere applicata

DIS inclusivo



$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | P \rangle$$

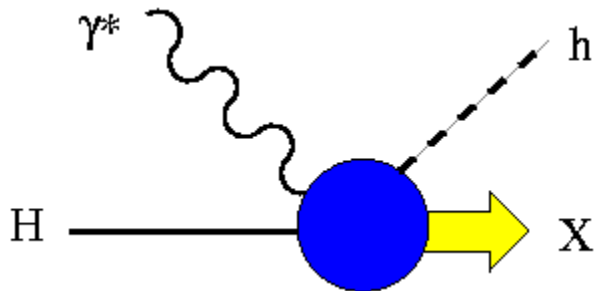
dominante per $\xi^2 \sim 0$

ma relazioni di dispersione per ampiezza Compton $T^{\mu\nu}$ in piano complesso $v = 1/x_B \rightarrow$ serie di potenze $(1/x_B)^n$ con raggio $\rightarrow 0$ in limite DIS

$$\Rightarrow (x_B \rightarrow \infty) \Leftrightarrow (\mathbf{q}=0 \text{ e } v \rightarrow i\infty)$$

$q\cdot\xi$ finito in limite DIS $\rightarrow \xi^0 \sim 0 \rightarrow \xi^\mu \sim 0$

DIS semi-inclusivo

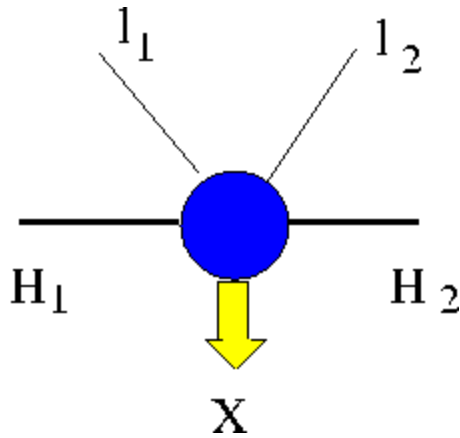


$$2MW^{\mu\nu} \propto \sum_X \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | J^\mu(\xi) | P_h X \rangle \langle P_h X | J^\nu(0) | P \rangle$$

stato $|P_h\rangle$ impedisce chiusura \sum_X

\rightarrow OPE non puo` essere applicata

Drell-Yan



$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2} s \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P_1 P_2 | J^\mu(\xi) J^\nu(0) | P_1 P_2 \rangle$$

$q\cdot\xi$ finito \rightarrow dominanza per $\xi^2 \sim 0$

ma $\langle .. \rangle$ non e' limitato in nessun sistema perche' $s=(P_1+P_2)^2 \sim 2P_1 \cdot P_2 \geq Q^2$ e nel limite $Q^2 \rightarrow \infty$ entrambe P_1, P_2 non limitati $W^{\mu\nu}$ riceve contributi fuori dal light-cone!

Quali sono i diagrammi dominanti per i processi in cui non si puo` applicare l'OPE ?

E' possibile applicare il concetto dell'OPE (fattorizzazione) anche a processi semi-inclusivi?

Classificazione dei contributi dominanti ai vari processi hard

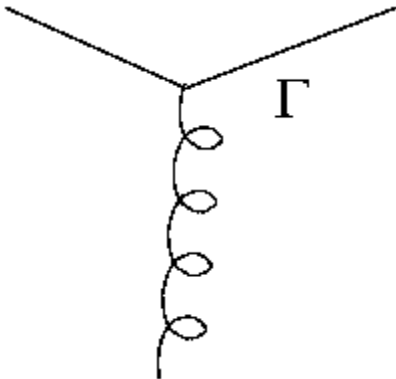
Premessa :

- propagatore di quark libero a corte distanze $S_F(x)$

$$S_F(x) = (i\gamma \cdot \partial + m) \Delta(x) \sim (i\gamma \cdot \partial + m) \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{x^2 - i\epsilon} + \dots$$

$$= \frac{-2\gamma \cdot x}{(x^2 - i\epsilon)^2} \frac{i}{4\pi^2 i} + \dots \sim \frac{1}{x^3} + \text{termini meno singolari}$$

- interazione con gluone non incrementa la singolarita`



$$\sim \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} S_F(x - y) \Gamma S_F(x) \sim \frac{1}{x^2}$$

e^+e^- inclusivo



contributo dominante a corte distanze $\rightarrow \sigma_{\text{tot}}$ del QPM

correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$

e^+e^- semi-inclusivo

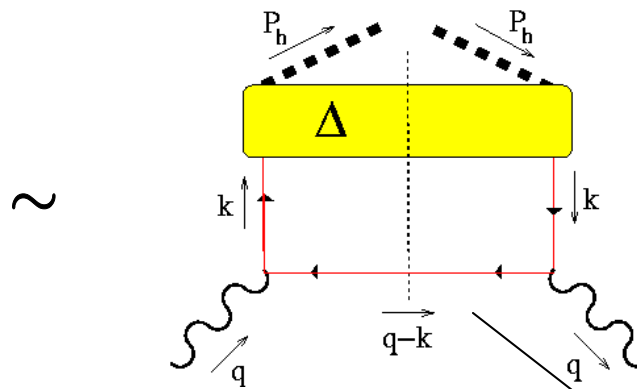
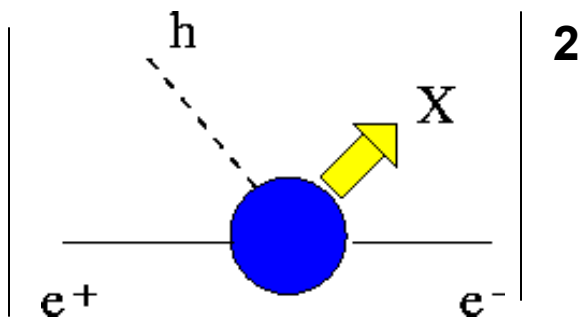


diagramma dominante a corte distanze perche' $\sim S_F(x) \sim 1/x^3$

correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$ quindi fattorizzazione tra vertice hard e frammentazione soft funziona

DIS inclusivo

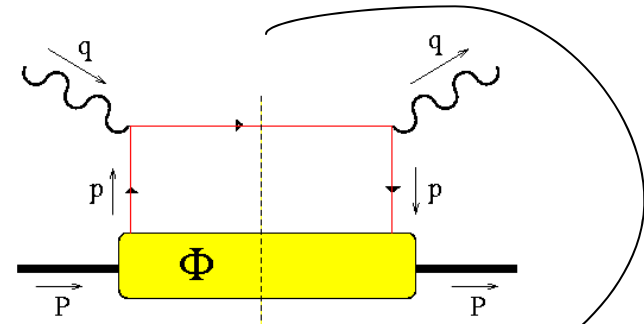
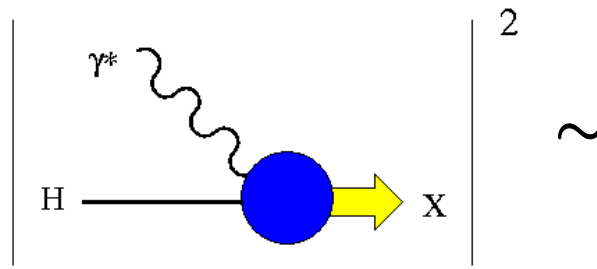
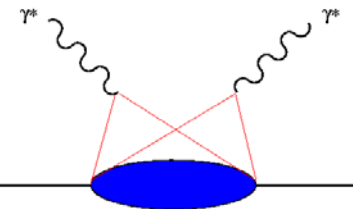
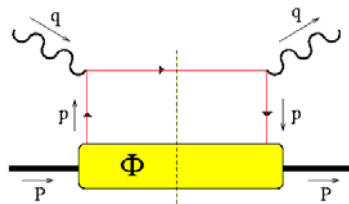
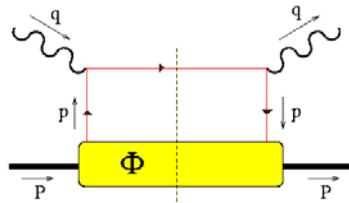
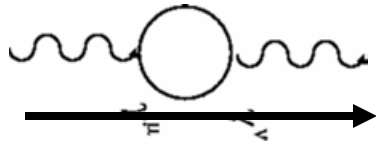


diagramma dominante a corte distanze perche' $\sim S_F(x) \sim 1/x^3$

correzioni radiative $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$ quindi si ritrova risultato di OPE

$$\epsilon(\xi^0) [J_\mu(\xi), J_\nu(0)] =$$



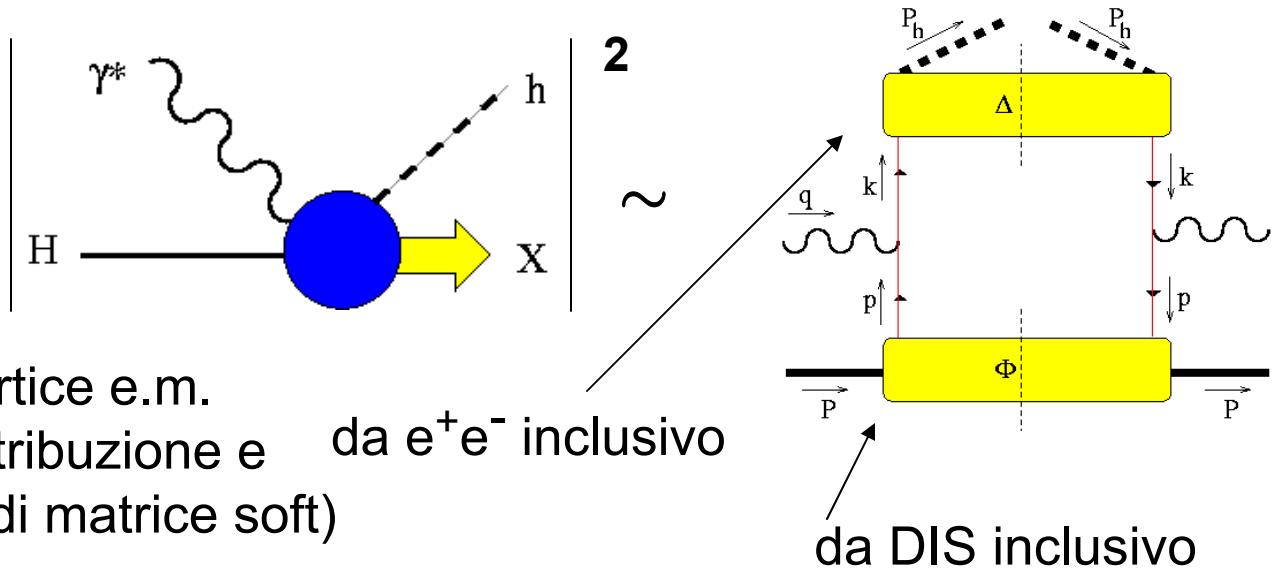
$$\frac{i(2\xi_\mu \xi_\nu - \xi^2 g_{\mu\nu})}{3\pi^3} \partial^3(\xi^2)$$

$$+ \frac{\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0)$$

$$+ \frac{i\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0)$$

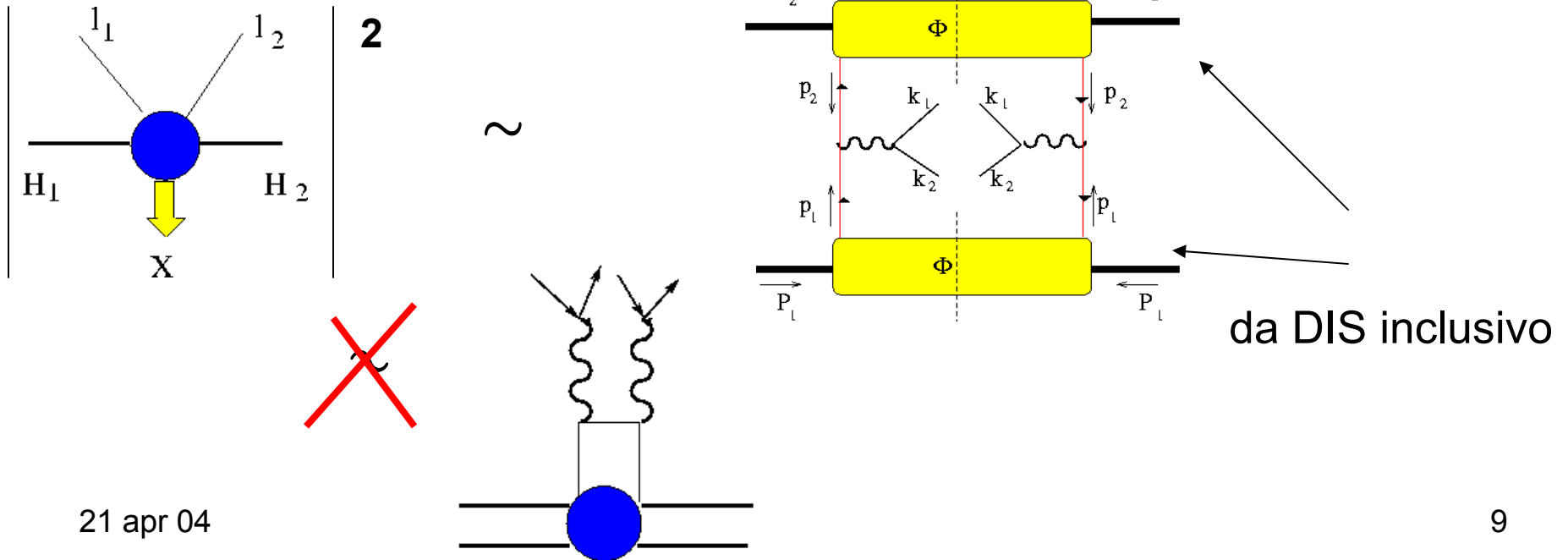
$$+ \hat{O}_{\mu\nu}(\xi, 0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0, \xi)$$

DIS semi-inclusivo



fattorizzazione tra vertice e.m.
 hard e funzioni di distribuzione e frammentazione (el. di matrice soft)

Drell-Yan



parametro di espansione per classificare i contributi dominanti :
il twist

$$\int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | \mathcal{T} [J_\mu(x) J_\nu(0)] | P \rangle$$

$$\propto \sum_n \frac{C_{\mu\nu n}(\log Q^2, \mu_F^2)}{(Q^2)^{t-2}} a_n(\mu_F^2) \left(\frac{1}{2x_B} \right)^n + \dots \quad t = d[a_n] - n$$

definizione non troppo agevole :

- espandere operatore bilocale in serie di operatori locali regolari
- trasformata di Fourier
- twist = (dimensione canonica dell'operatore di spin n – il suo spin n)

in pratica twist serve per identificare la potenza in $1/Q^2$ (a meno di correzioni $\sim \log Q^2$ perturbative) a cui interviene un certo effetto : se $\sim (1/Q^2)^p$ si dice che è di twist $t=2+2p$

è utile cercare di applicare la classificazione direttamente ad operatori bilocali, senza espandere in serie tutte le volte... ma ...

Esempio : $\mathcal{T} [J^\mu(x) J^\nu(0)] \implies \dots \hat{O}_V^\mu \dots \implies \dots \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(x) \dots$

corrispondente operatore locale $\bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(0)$

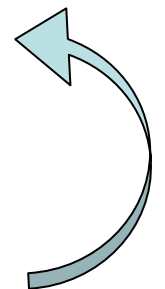
$$t = d[\bar{\psi} + \psi] - \text{spin}(\gamma^\mu) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 2$$

operatore bilocale

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(x) &= \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(0) + x_\nu \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \partial^\nu \psi(0) + \dots \\ &= \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(0) + x_\nu \theta^{\mu\nu}(0) + \dots \\ &\quad \quad \quad t=2 \quad + \quad t=4 \quad + \dots \end{aligned}$$

$$\theta^{\mu\nu} = \underbrace{\left\{ \theta^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \theta^\lambda_\lambda \right\}}_{\text{operatore a traccia nulla}} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \theta^\lambda_\lambda$$

$t = d[\bar{\psi} + \partial + \psi] - \text{spin}(\text{scalare}) = 4$



operatore a traccia nulla

$$t = d[\bar{\psi} + \partial + \psi] - \text{spin}(\gamma^\mu \partial^\nu) = 4 - 2 = 2$$

Morale : se operatore locale ha twist t , il corrispondente operatore bilocale ha twist minimo t , cioè $t, t+2, t+4, \text{etc...}$
(cioè lo stesso termine dominante più contributi più piccoli)

Definizione operativa (Jaffe, '95)

twist di un operatore bilocale è l'ordine leading in M/Q (M =massa dell'adrone) a cui un certo elemento di matrice dell'operatore interviene in un processo DIS (a meno di correzioni perturbative $\sim \log Q^2$)

N.B. potenze di Q intervengono come rapporto M/Q per questioni dimensionali

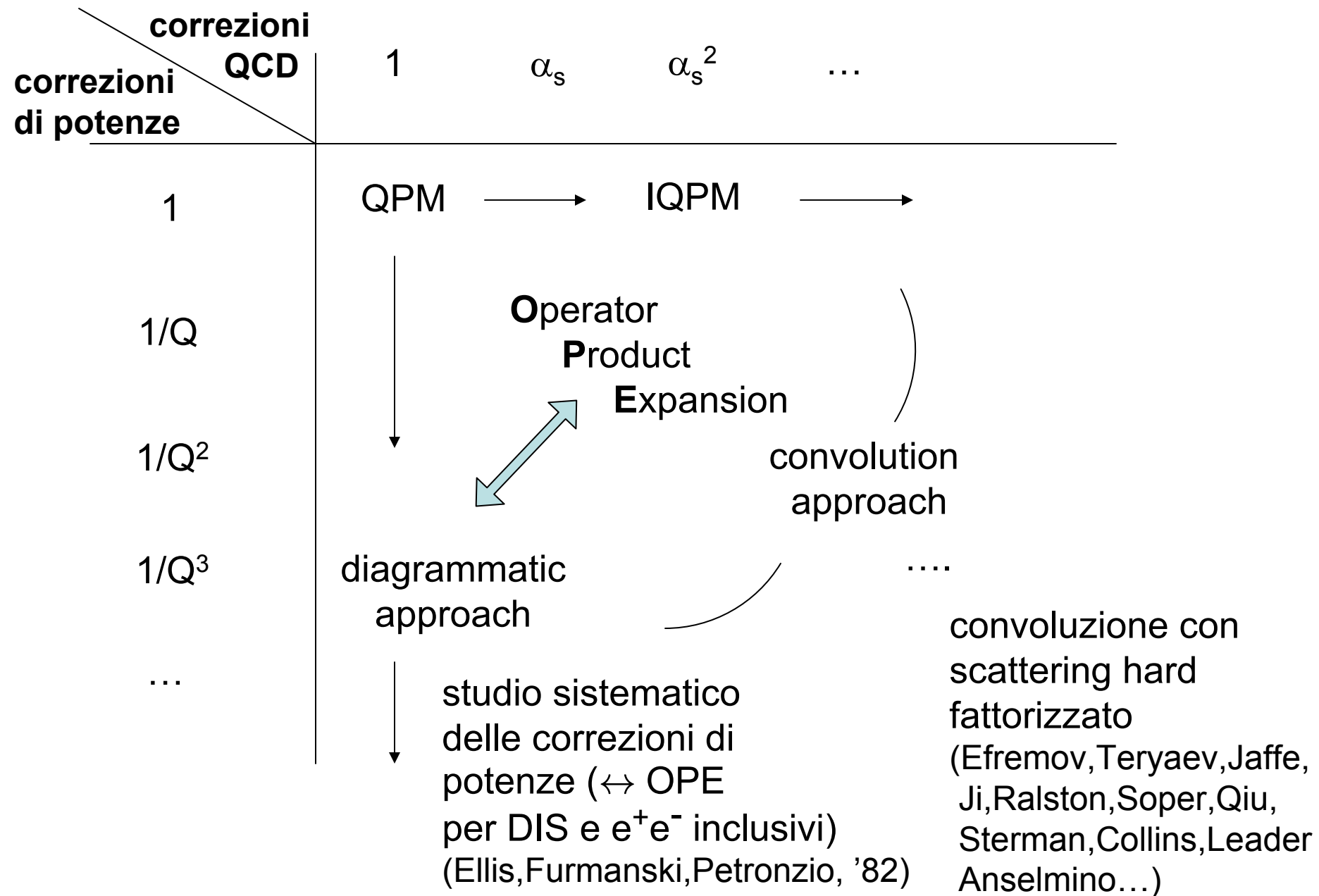
Criterio operativo

nella decomposizione dell'elemento di matrice dell'operatore bilocale in tutti i possibili tensori indipendenti di Lorentz, contare le potenze di M ; ad ognuna è associato un fattore di riduzione $1/Q$

$M^0=1 \rightarrow$ nessuna riduzione \rightarrow twist 2 (leading twist)

$M \rightarrow 1/Q \rightarrow$ twist 3 (subleading twist)

.....



Per tutti i processi di tipo DIS o e^+e^- (sia inclusivi che semi-inclusivi) il contributo dominante al tensore adronico viene dalla cinematica light-cone



- definizione e proprietà delle variabili light-cone
- teoria di campo quantizzata sul light-cone
- algebra di Dirac sul light-cone

variabili light-cone

dato 4-vettore a^μ $a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^0 \pm a^3)$, $\mathbf{a}_\perp = (a^1, a^2)$

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^+, a^-, \mathbf{a}_\perp)$$

prodotto scalare $a \cdot b = a^+ b^- + a^- b^+ - \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp$

$$a^2 = 2a^+ a^- - \mathbf{a}_\perp^2$$

metrica $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(0,1,2,3)} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$

“base” light-cone :

$$n_+^\mu = (1, 0, \mathbf{0}_\perp) \quad , \quad n_-^\mu = (0, 1, \mathbf{0}_\perp) \quad ; \quad n_\pm^2 = 0, \quad n_+ \cdot n_- = 1$$

$$a^\pm = a \cdot n_\mp \longrightarrow a^\mu = (a \cdot n_-) n_+^\mu + (a \cdot n_+) n_-^\mu + \mathbf{a}_\perp$$

metrica “trasversa” $g_\perp^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n_+^\mu n_-^\nu - n_+^\nu n_-^\mu = g^{\mu\nu} - n_+^{\{\mu} n_-^{\nu\}}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$$

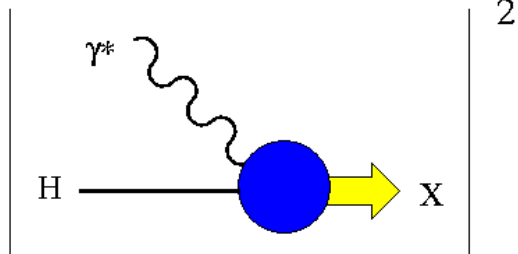
adrone-bersaglio a riposo $P^\mu \stackrel{rest\ frame}{=} (M, 0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (M, M, \mathbf{0}_\perp)$

DIS inclusivo

bersaglio assorbe momento trasverso di γ^* ; ad esempio se $\mathbf{q} \parallel z$ $P_z=0 \rightarrow P'_z=q \gg M$ in regime DIS

$$P^\mu = (\sqrt{M^2 + P_z^2}, 0, 0, P_z) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} (P_z, 0, 0, P_z) = (\sqrt{2} P_z, 0, 0, \mathbf{0}_\perp)$$

regime DIS \Rightarrow direzione + dominante
 direzione - soppressa



boost di 4-vettore $a^\mu \rightarrow a'^\mu$ lungo asse z

$$a'^0 = \frac{a^0 + \beta a^3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad a'^3 = \frac{\beta a^0 + a^3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad a'_\perp = a_\perp$$

$$a'^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1 + \beta)(a^0 + a^3)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = a^+ \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = a^+ e^\psi$$

$$a'^- = a^- \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = a^- e^{-\psi}$$

N.B. rapidity

$$\psi = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \Rightarrow \beta = \tanh \psi$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (M, M, \mathbf{0}_\perp)$$

boost lungo asse z

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

$A = M \rightarrow$ rest frame dell'adrone

$A = Q \rightarrow$ Infinite **M**omentum **F**rame (IFM)

definizioni :

$$q^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-x_N A, \frac{Q^2}{x_N A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

invariante di Nachtmann $x_N = -\frac{q^+}{P^+}$

$$q^2 = 2q^+q^- - \mathbf{q}_\perp^2 = -Q^2$$

$$2P \cdot q = \frac{Q^2}{x_N} - x_N M^2 \implies \frac{1}{x_B} = \frac{1}{x_N} - x_N \frac{M^2}{Q^2} \implies x_N x_B^2(\dots) = x_N x_B^2(\dots)$$

$$x_B^2 - x_N x_B + \frac{x_N^2}{4} = \frac{x_N^2}{4} \left(1 + \frac{4x_B^2 M^2}{Q^2} \right) \implies x_N = \frac{2x_B}{1 + \sqrt{1 + \frac{4x_B^2 M^2}{Q^2}}} \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} x_B$$

miglior scaling in x_N quando $Q \gtrsim M$

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_A, \frac{p^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{x_A}, \mathbf{p}_\perp \right)$$

frazione light-cone (longitudinale)
di momento partonico

$$p^2 = 2p^+p^- - \mathbf{p}_\perp^2$$

$$x = \frac{p^+}{P^+}$$

Quantizzazione di teoria di campo sul light-cone

regole di commutazione al tempo $x^0=t=0$ evoluzione in x^0 → regole di commutazione al tempo "light-cone" $x^+=0$ evoluzione in x^+

variabili cinematiche \mathbf{x} → x^- , \mathbf{x}_\perp

momenti coniugati \mathbf{k} → k^+ , \mathbf{k}_\perp

Hamiltoniana k^0 → k^-

quanto di campo →

$$\psi(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} b_\alpha(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}$$

$$\psi_+(x) = \int \frac{dk^+ d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^3 k^+} b_\alpha(\mathbf{k}) u_+(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) v_+(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}$$

$$[b_\alpha(\mathbf{k}), b_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2k^0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\alpha'}$$

.....

$$[b_\alpha(\mathbf{k}), b_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 k^+ \delta(k^+ - k'^+) \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta_{\alpha\alpha'}$$

spazio di Fock

$$b^\dagger|0\rangle \rightarrow q \quad d^\dagger|0\rangle \rightarrow \bar{q}$$

.....

Algebra di Dirac sul light-cone

rappresentazione usuale delle matrici di Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

↖ così (anti-)particelle hanno solo componenti upper (lower) nello spinore di Dirac

nuova rappresentazione per teoria di campo light-cone

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_{\perp} = \begin{pmatrix} i\sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & i\sigma_{\perp} \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad \gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad \text{ok}$$

definizioni : $\gamma^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0 \pm \gamma^3)$ $P_{\pm} = \frac{1}{2}\gamma^{\mp}\gamma^{\pm}$

proiettori $(P_{\pm})^2 = P_{\pm}$; $P_+ P_- = P_- P_+$, $P_+ + P_- = \mathbf{1}$

$$P_+ = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad |\psi\rangle = \begin{vmatrix} \phi \\ \chi \end{vmatrix} , \quad P_+ |\psi\rangle = \phi , P_- |\psi\rangle = \chi$$

Proiettare eq. di Dirac

$$P_{\pm} (i\gamma \cdot D + m) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad D_{\pm} = \partial_{\pm} - igA^{\mp}$$

$$\begin{cases} i\gamma^{-} D_{-} \chi = -\gamma_{\perp} \mathbf{D}_{\perp} \phi + m\phi \\ i\gamma^{+} D_{+} \phi = -\gamma_{\perp} \mathbf{D}_{\perp} \chi + m\chi \end{cases} \leftarrow \text{non contiene "tempo" } x^{+} : \chi \text{ dipende da } \phi \text{ e } \mathbf{A}_{\perp} \text{ a } x^{+} \text{ fissato}$$

ϕ, \mathbf{A}_{\perp} gradi di liberta` indipendenti

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{"good"} \\ \leftarrow \text{"bad"} \end{matrix} \text{ componenti light-cone } \begin{matrix} P_{+} |\psi\rangle \\ P_{-} |\psi\rangle \end{matrix}$$

generatore delle rotazioni di spin lungo z se momento $\parallel z$, misura l'elicit`

$$\Sigma^3 = \frac{i}{2} [\gamma^1, \gamma^2] = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$\gamma^1, \gamma^2, \gamma_5$ e P_{\pm} commutano \rightarrow 2 possibili scelte :

- diagonalizzare γ_5 e $\Sigma^3 \rightarrow$ base di elicit`
- diagonalizzare γ^1 (o γ^2) \rightarrow base di trasversita`

N.B. in base di elicit` $\gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \quad \Sigma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$

21 apr 04 hanno stesso autovalore per ϕ , ma opposto per χ

Tensore adronico in DIS inclusivo

$$W_{\mu\nu} \propto \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \langle P | \hat{O}_V^\rho | P \rangle \rightarrow \dots \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(x) | P \rangle \dots$$

sul light-cone

$$\bar{\psi} \gamma^+ \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^+ \psi = \sqrt{2} \psi^\dagger P_+ \psi = \sqrt{2} (P_+ \psi)^\dagger (P_+ \psi) = \sqrt{2} \phi^\dagger \phi$$

$$P_\pm = \frac{1}{2} \gamma^\mp \gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma^0 \gamma^\pm \quad (P_\pm)^\dagger = P_\pm$$

contano solo
le componenti
"good"

regime DIS \rightarrow direzione + dominante in spazio momenti

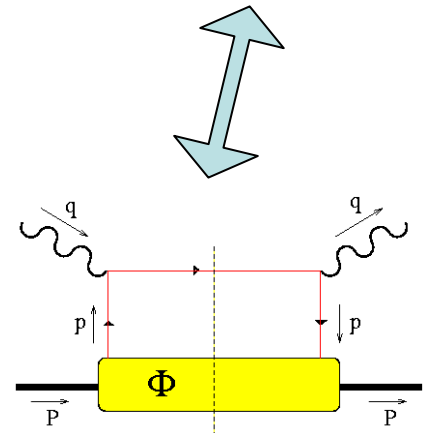
$$\int dP^- d\mathbf{P}_\perp e^{iP \cdot x} \rightarrow \dots \delta(x^+) \delta(\mathbf{x}_\perp)$$

$$\int d^4x e^{ix_N P^+ x^-} \langle P | \bar{\psi}(0) \gamma^+ \psi(x^-) | P \rangle \Big|_{x^+, \mathbf{x}_\perp = 0}$$

$$= \sqrt{2} \sum_n \int dx^- e^{ix_N P^+ x^-} \langle P | \phi^\dagger(0) | n \rangle \langle n | \phi(x^-) | P \rangle$$

$$= 2\pi\sqrt{2} \sum_n |\langle n | \phi(0) | P \rangle|^2 \delta(P^+ + q^+ - P_n^+)$$

densita` di probabilita` di annichilare in $|P\rangle$
un quark con momento $x_N P^+$



risultato di QPM

Teoria di campo “standard” – DIS inclusivo

adrone-bersaglio → boost lungo l’asse z ; **Infinite Momentum Frame (IFM)**

$$\left\{ \begin{array}{l} P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right) \xrightarrow{A=Q} P^\mu \sim \left(Q, \frac{1}{Q}, \mathbf{0}_\perp \right) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} (Q, 0, \mathbf{0}_\perp) \\ q^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-x_N A, \frac{Q^2}{x_N A}, \mathbf{0}_\perp \right) \xrightarrow{A=Q} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-x_N Q, \frac{Q}{x_N}, \mathbf{0}_\perp \right) \\ p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(xA, \frac{p^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{xA}, \mathbf{p}_\perp \right) \xrightarrow{A=Q} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(xQ, \frac{p^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{xQ}, \mathbf{p}_\perp \right) \sim (Q, 0, \mathbf{0}_\perp) \end{array} \right.$$

tensore adronico

quark liberi

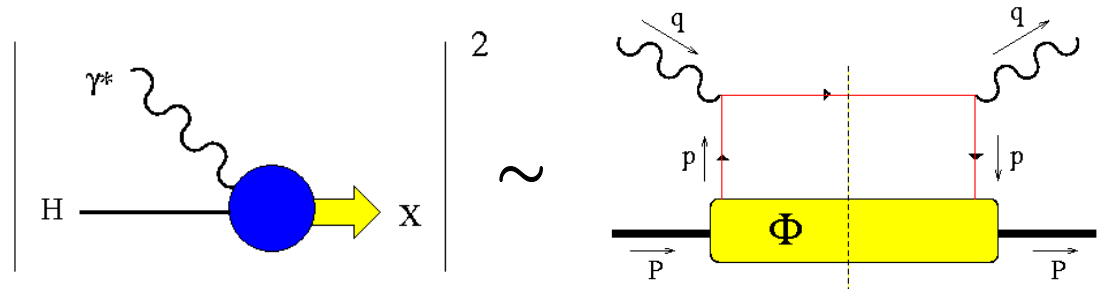
$$J^\mu \sim \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$\begin{aligned} 2MW^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle P | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | P \rangle \\ &\sim \frac{(2\pi)^4}{2\pi} \sum_f e_f^2 \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2 2k^0} \delta(P + q - k - P_X) \left\{ \langle P | J^\mu(0) | P_X, k \rangle \langle P_X, k | J^\nu(0) | P \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle P | J^\nu(0) | P_X, k \rangle \langle P_X, k | J^\mu(0) | P \rangle \right\} \\ &= \frac{(2\pi)^4}{2\pi} \sum_f e_f^2 \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2 2k^0} \delta(P + q - k - P_X) \left\{ \langle P | \bar{\psi} \gamma^\mu (\not{k} + m) | P_X \rangle \langle P_X | \gamma^\nu \psi | P \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle P | \psi \gamma^\nu (\not{k} - m) | P_X \rangle \langle P_X | \gamma^\mu \bar{\psi} | P \rangle \right\} \end{aligned}$$

continua

$$\begin{aligned}
 2MW^{\mu\nu} &\sim \sum_f e_f^2 \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0 - m) \delta(P + q - k - P_X) \\
 &\quad \left\{ \langle P | \bar{\psi} \gamma^\mu (\not{k} + m) | P_X \rangle \langle P_X | \gamma^\nu \psi | P \rangle + \langle P | \psi \gamma^\nu (\not{k} - m) | P_X \rangle \langle P_X | \gamma^\mu \psi | P \rangle \right\} \\
 &= \sum_f e_f^2 \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \int d^4p \delta((p+q)^2 - m^2) \theta(p^0 + q^0 - m) \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} e^{i(P-p-P_X)\cdot\xi} \\
 &\quad \left\{ \langle P | \bar{\psi} \gamma^\mu (\not{p} + \not{q} + m) | P_X \rangle \langle P_X | \gamma^\nu \psi | P \rangle + \langle P | \psi \gamma^\nu (\not{p} + \not{q} - m) | P_X \rangle \langle P_X | \gamma^\mu \bar{\psi} | P \rangle \right\} \\
 &= \sum_f e_f^2 \int d^4p \delta((p+q)^2 - m^2) \theta(p^0 + q^0 - m) \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot\xi} \\
 &\quad \left\{ \langle P | \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu (\not{p} + \not{q} + m) \gamma^\nu \psi(0) | P \rangle + \langle P | \psi(\xi) \gamma^\nu (\not{p} + \not{q} - m) \gamma^\mu \bar{\psi}(0) | P \rangle \right\} \\
 &\equiv \sum_f e_f^2 \int d^4p \delta((p+q)^2 - m^2) \theta(p^0 + q^0 - m) \\
 &\quad \text{Tr} [\Phi(p, P) \gamma^\mu (\not{p} + \not{q} + m) \gamma^\nu + \bar{\Phi}(p, P) \gamma^\nu (\not{p} + \not{q} - m) \gamma^\mu]
 \end{aligned}$$

approccio diagrammatico



operatore bilocale (correlatore quark-quark)

$$\Phi(p, P) = \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot\xi} \langle P | \bar{\psi}(\xi) \psi(0) | P \rangle \quad \text{twist } t=2, 4, 6, \dots$$

regime DIS : $Q^2 \rightarrow \infty$; IFM \rightarrow isolare contributo leading in $1/Q$

$$2MW^{\mu\nu} = \sum_f e_f^2 \int d^4p \delta((p+q)^2 - m^2) \theta(p^0 + q^0 - m)$$

$$\delta((p+q)^2 - m^2) \sim \delta(2p^+q^- + 2q^+q^-) = \frac{1}{2q^-} \delta(p^+ + q^+) \quad \text{Tr} [\Phi(p, P) \gamma^\mu (\gamma \cdot p + \gamma \cdot q + m) \gamma^\nu]$$

$$\delta(p^+ + q^+) = \delta(xP^+ - x_N P^+) \rightarrow x \sim x_N \sim x_B$$

$$\gamma \cdot (p+q) \sim \gamma^-(p^+ + q^+) + \gamma^+ q^- \sim \gamma^+ q^-$$

$$= \sum_f e_f^2 \frac{1}{2} \int dp^- d\mathbf{p}_\perp \text{Tr} [\Phi(p, P) \gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu] \Big|_{p^+ = xP^+}$$

Hermiticity + invarianza per parita' e time-reversal

$$\rightarrow \Phi(p, P) = A_1 M + A_2 \not{P} + A_3 \not{p} \sim (A_2 P^+ + A_3 p^+) \gamma^- \equiv \frac{1}{4} \text{Tr} [\Phi \gamma^+] \gamma^- \quad \text{Tr} [\gamma^- \gamma^\mu \gamma^+ \gamma^\nu] = -4g_\perp^{\mu\nu}$$

$$= -g_\perp^{\mu\nu} \sum_f e_f^2 \frac{1}{2} \int dp^- d\mathbf{p}_\perp \text{Tr} [\Phi(p, P) \gamma^+] \Big|_{p^+ = xP^+}$$

analogamente per antiquark

continua

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int dp^- d\mathbf{p}_\perp \text{Tr} [\Phi(p, P) \gamma^+] \Big|_{p^+ = xP^+} \\
 &= \frac{1}{2} \int dp^- d\mathbf{p}_\perp \int \frac{d^4\xi}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot \xi} \langle P | \bar{\psi}(\xi) \gamma^+ \psi(0) | P \rangle \Big|_{p^+ = xP^+} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int d^4\xi e^{-ixP^+ \xi^-} \langle P | \bar{\psi}(\xi^-) \gamma^+ \psi(0) | P \rangle \Big|_{\xi^+, \xi_\perp = 0} \\
 &= \dots \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |\langle n | \phi(0) | P \rangle|^2 \delta(P^+ + q^+ - P_n^+) \quad \begin{array}{l} \text{densita` di probabilita`} \\ \text{di annichilare in } |P\rangle \\ \text{un quark con momento } xP^+ \end{array} \\
 &\equiv q_f(x) \quad \text{componenti light-cone "good"}
 \end{aligned}$$

includendo anche l'antiquark

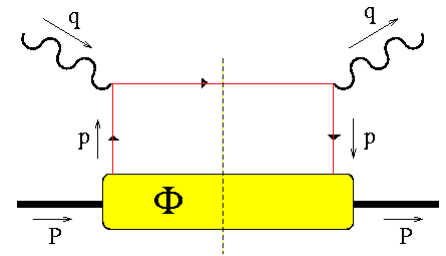
$$2MW^{\mu\nu} \sim -g_\perp^{\mu\nu} \underbrace{\sum_f e_f^2 [q_f(x) + \bar{q}_f(x)]}_{\text{risultato di QPM}} + o\left(\frac{1}{Q}\right)$$

$x \sim x_B$ $F_1(x_B) \leftarrow$ risultato di QPM

$$W^{\mu\nu} = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) W_1 + \frac{\tilde{P}^\mu \tilde{P}^\nu}{M^2} W_2 = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} + \frac{\tilde{P}^\mu \tilde{P}^\nu}{\tilde{P}^2}\right) W_T + \frac{\tilde{P}^\mu \tilde{P}^\nu}{\tilde{P}^2} W_L - g_\perp^{\mu\nu}$$

Morale :

DIS inclusivo
teoria di campo “standard”



approccio diagrammatico → contributo dominante
(quindi $e^- \Leftrightarrow$ OPE)

operatore bilocale Φ ha twist ≥ 2 ; il contributo a leading twist si ottiene
nell'IFM ($Q^2 \rightarrow \infty$)

$$\Phi[\gamma^+] (x) = \frac{1}{2} \int dp^- d\mathbf{p}_\perp \text{Tr} [\Phi(p, P) \gamma^+] \Big|_{p^+ = xP^+} = q_f(x)$$

= probabilita` di trovare un quark con flavor f e frazione x del momento
longitudinale (light-cone) P^+ dell'adrone

al leading twist (t=2) si ritrova risultato di QPM per $W^{\mu\nu}$

il risultato e` lo stesso di quello che si ottiene per teoria di campo “light-cone”
→ boost all'IFM e quantizzazione sul light-cone sono equivalenti

$$(\mathbf{x} \sim \mathbf{x}_N)$$

Ma quanti sono i contributi al leading twist ? Ricordiamo la strategia :

- decomposizione della matrice di Dirac $\Phi(p, P)$ sulla base delle strutture di Dirac e dei 4-vettori p, P , compatibili con Hermiticity e invarianza per parita` e time-reversal

$$\Phi(p, P) = A_1 M + A_2 \not{P} + A_3 \not{p}$$

$$\Phi(p, P) = \gamma^0 \Phi^\dagger(p, P) \gamma^0$$

$$\Phi(p, P) = \gamma^0 \Phi(\tilde{p}, \tilde{P}) \gamma^0$$

$$\Phi^*(p, P) = i\gamma^1 \gamma^3 \Phi(\tilde{p}, \tilde{P}) i\gamma^1 \gamma^3$$

$$\tilde{a}^\mu = \delta^{\mu\nu} a_\nu$$

$$Q^2 \rightarrow \infty \quad (A_2 P^+ + A_3 p^+) \gamma^- \equiv \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\underbrace{\Phi \gamma^+}_{q_f(x)} \right] \gamma^-$$

$q_f(x)$ e coinvolge $\mathcal{P}_+ |\psi\rangle = \phi$

quanti sono i proiettori Γ di Dirac in $\Phi^{[\Gamma]}$ al leading twist ?

Il resto alla prossima lezione...