

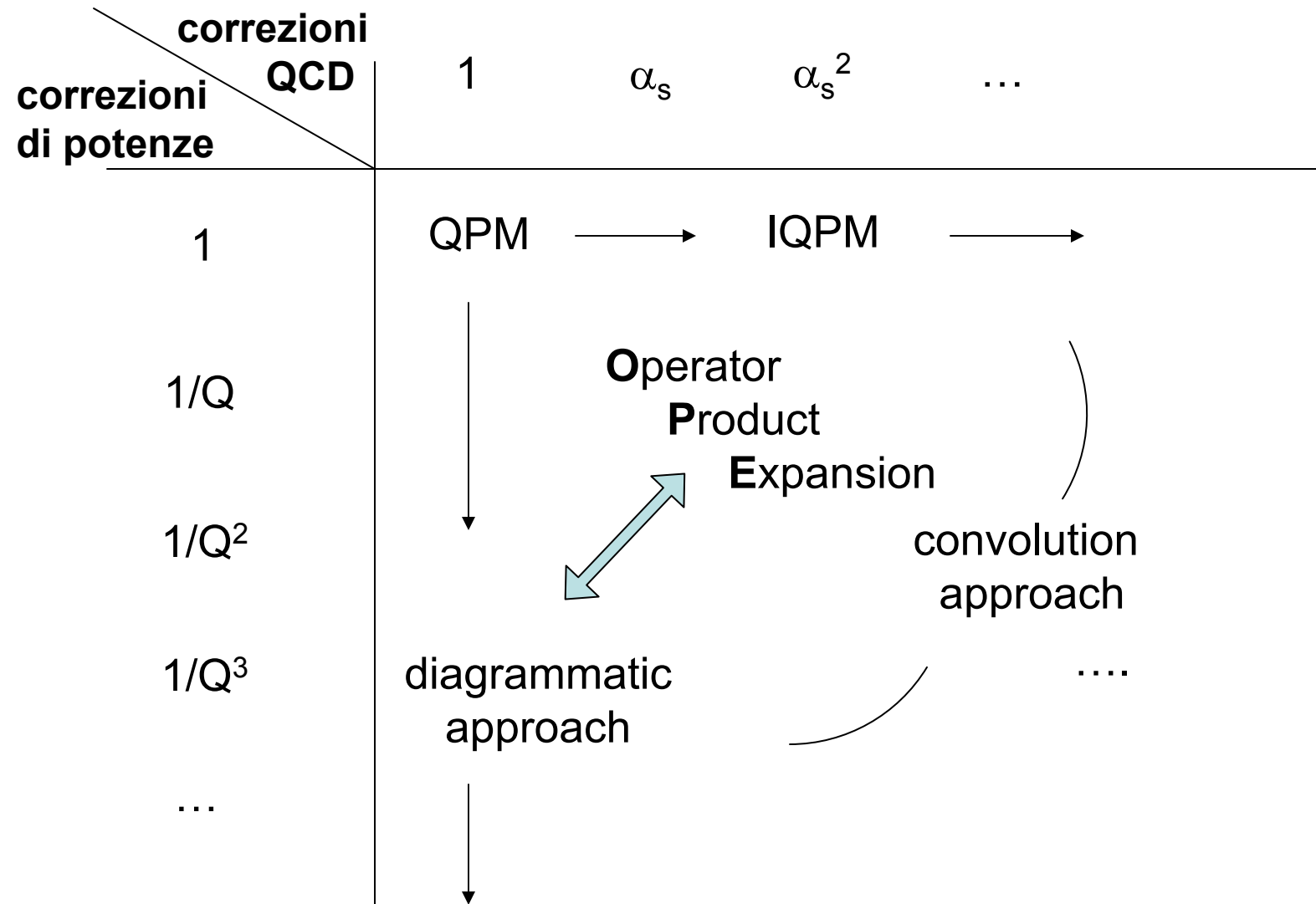
# Schema

- riassunto precedente lezione
- dal QPM all' Improved **QPM** (IQPM) : correzioni perturbative di QCD in potenze di  $\alpha_s (\log Q^2)$
- teoremi di fattorizzazione in  $e^+e^-$ , DIS e DY: generalizzazione del teorema KLN
- equazioni di evoluzione e dimensione anomala
- schemi di fattorizzazione; un esempio concreto: correzioni a one-loop nel DIS inclusivo

- fattorizzazione e universalita` nel QPM : dal DIS al DY
- scaling della sezione d'urto con l'energia del c.m. , s, e dipendenza angolare “universale”,  $\sim (1+\cos^2\theta)$ , dei prodotti leptonici ; conferma dell'ipotesi di QPM sul meccanismo elementare di annichilazione derivato dalla QED
- deviazioni dallo scaling e dalla dipendenza  $(1+\cos^2\theta)$  ; nuovi meccanismi al crescere della massa invariante finale: risonanze mesoniche vettoriali ( $J/\psi$  ,  $\psi'$  ,  $Y, \dots$ ) ; il problema del sistema di riferimento: c.m. frame o Collins-Soper frame ; correzioni di QCD perturbativa  $\rightarrow K$  factor
- DIS inclusivo polarizzato ; parte antisimmetrica del tensore adronico ; 2 nuove funzioni di struttura di spin ; Bjorken scaling ; la distribuzione di elicit`  $g_1$  dei partoni nel QPM
- asimmetrie di elicit` in regime di scaling ; estrazione di  $g_1$  dai dati ; la regola di somma di Ellis-Jaffe e la “spin crisis”
- la regola di somma di Bjorken ; correzioni di QCD al valore del QPM

nella rassegna sui risultati del QPM, diverse volte si è dedotta dal confronto con i dati sperimentali l'importanza delle correzioni di QCD :

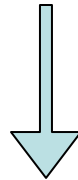
- profilo asimmetrico delle distribuzioni partoniche per  $x_B \rightarrow 0$  , dovuto al contributo di gluoni e quark del “mare di Dirac”
- deviazioni dallo scaling predetto dal QPM per  $F_2$  e  $F_3$  , sia per DIS con fasci di elettroni che di neutrini
- deviazioni dalle corrispondenti regole di somma :  
del momento (50% è portato dai gluoni) ,  
Gross-Llewellyn Smith , Gottfried , Bjorken , ...
- deviazioni dallo scaling in  $s$  sia per processi  $e^+e^-$  che DY
- deviazioni dalla distribuzione angolare e in  $p_T$  della coppia leptonica in processi di DY
- deviazioni dalla regola di somma di Ellis-Jaffe : solo meno del 30% dello spin del N è portato dai quark di valenza



## Attenzione :

correzioni perturbative di QCD sono derivabili direttamente dalla  $\mathcal{L}$  di QCD  $\rightarrow$  predizioni di una teoria di campo rinormalizzabile

in questo contesto, tentativo di giustificare il QPM in una teoria di campo  
 $\rightarrow$  procedura sistematica per correggere i risultati



teoremi di fattorizzazione = generalizzazione delle sezioni d'urto  
per  $e^+e^-$ , DIS, DY

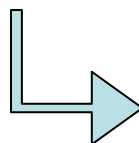
N.B. tutti i discorsi presuppongono come primo passo la rinormalizzazione della teoria → cancellazione delle divergenze ultraviolette (UV) :

- ad una certa scala  $\mu_R$  si definiscono le quantità fisiche come massa, coupling e intensità del campo attraverso la procedura di rinormalizzazione :

campo  $\phi_0 \rightarrow \phi = Z^{-1} \phi_0$  ; si bilancia la quantità infinita  $Z^{-1}$  con controtermini nella  $\mathcal{L}$  ; ridefinizione della massa e del coupling per riassorbire gli infiniti

- invarianza della fisica dalla scala  $\mu_R \rightarrow$  equazioni di Callan-Symanzik

$$\mu_R \frac{d}{d\mu_R} G = 0 \quad G = \text{funzione di Green a } n \text{ punti}$$



$$\left[ \mu_R \frac{\partial}{\partial \mu_R} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] G = 0$$

$$\frac{g^2}{4\pi} = \alpha_s(\mu_R)$$

$$\beta(g) = \mu_R \frac{d}{d\mu_R} g$$

$$\frac{d}{d \log Q^2} \alpha_s(Q^2) = \beta(\alpha_s) \rightarrow \text{running } \alpha_s$$

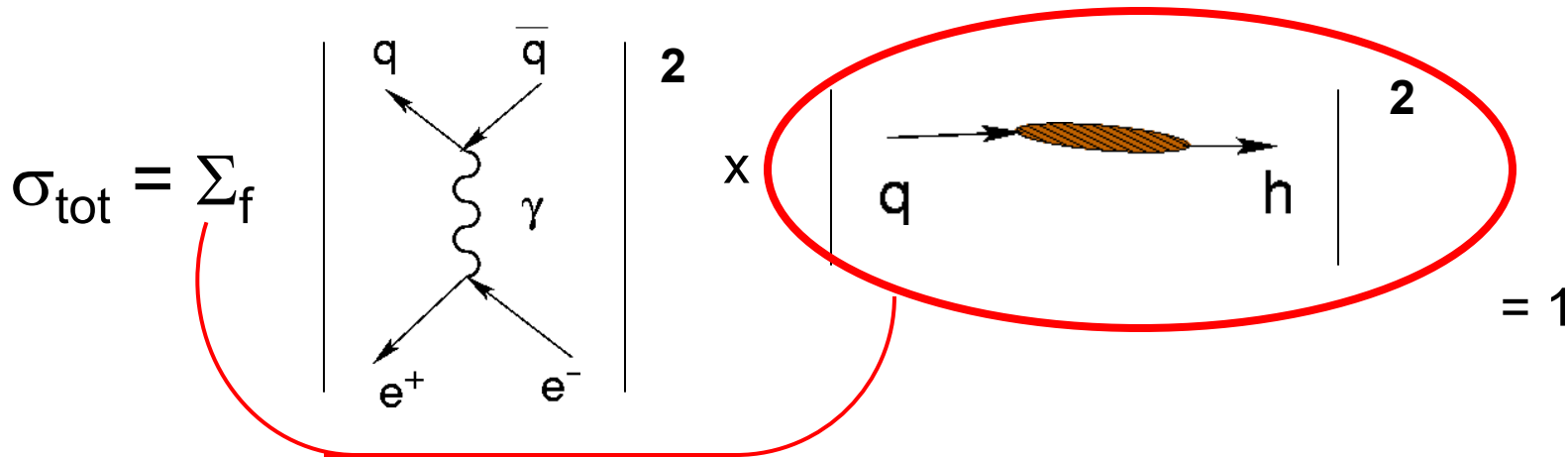
eq. del gruppo di rinormalizzazione

# $e^+e^-$ inclusivo

Teorema : la sezione d'urto totale è finita nel limite di particelle senza massa, cioè è libera da divergenze "infrarosse" (IR) cioè, nello spazio delle configurazioni, dipende solo dalla fisica a corte distanze e non da fenomeni a lunghe distanze legati al confinamento

(Sternman, '76, '78)

non c'è interferenza tra meccanismi a corte e lunghe distanze



$$= N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \sum_f e_f^2 + \text{correzioni pQCD al diagramma Born}$$

Commenti:

generalizzazione del teorema di Kinoshita-Lee-Nauenberg (KLN):  
*Probabilità di transizione inclusive sono finite nel limite di particelle senza massa.*

(Kinoshita, '62; Lee & Nauenberg, '64)

la  $\sigma_{tot}$ , a meno di fattori del tipo  $m/Q^2$ , non dipende dalla massa  $m$  dei partoni; poiché non dipende per costruzione dalla scala  $\mu_R$ , dipende da  $Q^2$  solo attraverso il coupling  $\alpha_s(Q^2)$  (a parte lo spazio fasi)

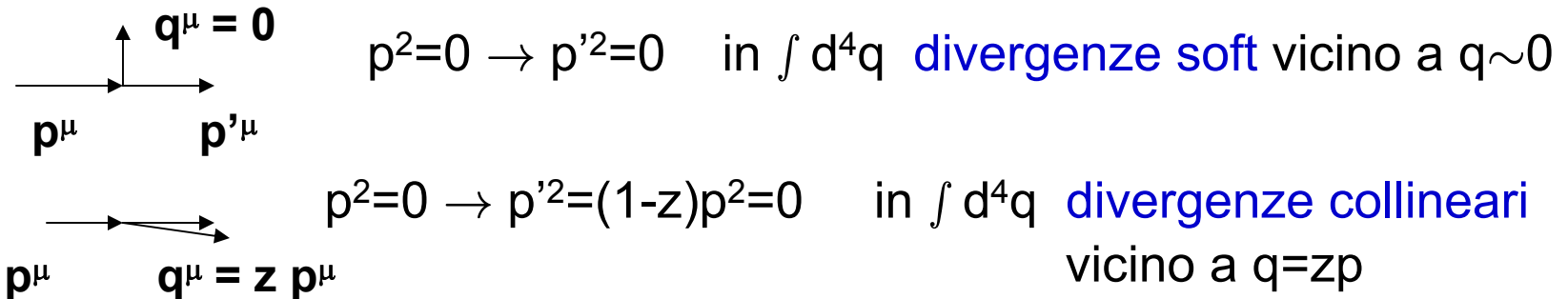
mettendo in evidenza il risultato di QPM, si avrà quindi

$$\sigma_{tot} = \underbrace{N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \sum_f e_f^2}_{\text{QPM}} \underbrace{\sum_n s_n \alpha_s^n(Q^2)}_{\text{correzioni di pQCD}} \quad s_0 = 1$$



## $e^+e^-$ semi-inclusivo (inclusi i jet)

Premessa : per identificare le divergenze IR , calcolare le correzioni pQCD nel limite di partoni senza massa  $\rightarrow$  2 tipi di divergenze



per processi semi-inclusivi con  $n$  particelle nello stato finale, la fattorizzazione tra meccanismi a corte e lunghe distanze si puo` formulare come

$$\sigma_{tot} = \sum_f \sigma_{QPM} \mathcal{S}_f(p_1^\mu, p_2^\mu, \dots, p_n^\mu)$$

se

$$\mathcal{S}(p_1^\mu, \dots, p_{n-1}^\mu = (1-z)p_n^\mu, zp_n^\mu) \equiv \mathcal{S}(p_1^\mu, \dots, p_{n-2}^\mu, p_n^\mu)$$

$$\mathcal{S}(p_1^\mu, \dots, p_{n-1}^\mu = 0, p_n^\mu) \equiv \mathcal{S}(p_1^\mu, \dots, p_{n-2}^\mu, p_n^\mu)$$

$\Sigma_f \rightarrow$  cancellazione delle divergenze collineari soft

$\rightarrow \sigma_{tot}$  libera da divergenze IR ;  $\Sigma_f \mathcal{S}_f = 1$  per unitarieta`

se cioè la misura dello stato finale,  $\mathcal{S}(p_1, \dots, p_n)$ , non distingue tra due particelle collineari  $p_{n-1} = (1-z)p$ ,  $p_n = zp$  e la particella con la somma dei loro momenti,  $p_n = p$ ; ed inoltre se non distingue tra una particella soft  $p_{n-1} = 0$  e la sua assenza nello spazio fasi

⇒ i singoli termini con divergenze IR soft o collineari si elidono a vicenda nella  $\Sigma_f$  e per unitarietà si ha  $\Sigma_f \mathcal{S}_f = 1$

⇒ la sezione d'urto è libera da divergenze IR e dipende solo dal comportamento dei quark off-shell creati nel processo elementare descritto dal QPM; la probabilità che tali quark off-shell adronizzino negli adroni osservati nel processo semi-inclusivo è 1

Esempio di funzione  $\mathcal{S}(p_1, \dots, p_n)$ : il “thrust” di un jet di  $n$  particelle

$$\mathcal{T}(p_1, \dots, p_n) = \frac{\sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i \cdot \hat{u}|}{\sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_i|} \quad \mathcal{T} = \max_{\hat{u}} \mathcal{T}(p_1, \dots, p_n)$$

Il thrust  $\mathcal{T}$  individua l'asse di un jet di  $n$  particelle

# DIS inclusivo

Teorema : generalizzazione della fattorizzazione tra fenomeni a brevi e lunghe distanze nel QPM

(Collins, Soper, Sterman, '89)

$$F_{1/2/3}(x_B, Q^2) = \sum_{i=f, \bar{f}, a} \int_0^1 \frac{dx}{x} C_{1/2/3} \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F^2}{\mu_R^2}, \alpha_s(\mu_R^2) \right) \phi_i(x, \mu_F, \mu_R)$$

somma su quark,  
antiquark e gluoni

$\mu_R$  scala di rinormalizzazione

$\mu_F$  scala di fattorizzazione : definisce  
cio' che e' a brevi distanze  $\rightarrow C$

da cio' che e' a lunghe distanze  $\rightarrow \phi$

$$C = \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F}{\mu_R}, \alpha_s(\mu_R) \right)$$

**N.B. puo' essere  $\mu_F = \mu_R (=Q)$**

dipende dal processo elementare rinormalizzato

$\rightarrow$  partone, bosone di gauge,  $\mu_R$ ,  $\alpha_s$

non dipende dal tipo di adrone e dai processi di confinamento che lo formano

$\rightarrow$  libera da divergenze IR, pertiene a scala  $Q^2 > \mu_F^2$

$\phi(x, \mu_F, \mu_R)$  non dipende dal processo  $\rightarrow$  universale ; dipende dal tipo di adrone  $\rightarrow$  contiene divergenze IR, pertiene a scala  $Q^2 < \mu_F^2$

## Strategia

$\phi(x, \mu_F, \mu_R)$  generalizzazione delle distribuzioni partoniche in QPM

$C\left(\frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F}{\mu_R}, \alpha_s(\mu_R)\right)$  generalizzazione delle  $F^{\text{el}}$  di scattering elastico in approssimazione di Born del QPM

- calcolare  $C$  dalla pQCD per un dato processo all'ordine voluto ed alla scala  $\mu_F$  scelta
- confrontare il risultato con dati sperimentali  $\rightarrow$  dedurre info su  $\phi$
- universalita` di  $\phi \rightarrow$  utilizzarle per fare predizioni di altre sezioni d'urto per processi diversi di cui si sanno calcolare i relativi  $C$ , ma sempre alla stessa scala  $\mu_F$
  
- come calcolare i  $C$  dalla pQCD ?
- come calcolare la dipendenza dalla scala  $\mu_F$  ?

## Equazioni di evoluzione

$C \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F}{\mu_R}, \alpha_s(\mu_R) \right)$ 
indipendenti dal tipo di adrone  $\rightarrow$  si calcola la sez. d'urto per un ipotetico bersaglio partonico

- si calcola la “distribuzione  $\varphi$  di un partone in un partone”; si calcola  $F^{el}$  per il processo considerato
- si definisce schema di fattorizzazione alla scala  $\mu_F$  per costruire  $C$ , separando i contributi che vanno in  $C$  da quelli assorbiti in  $\varphi$
- si trascura  $\varphi$  (contiene tutte le divergenze IR nel limite di  $m \rightarrow 0$ ) e rimane il contributo di scattering hard perturbativo, che è libero da divergenze IR per teorema di fattorizzazione

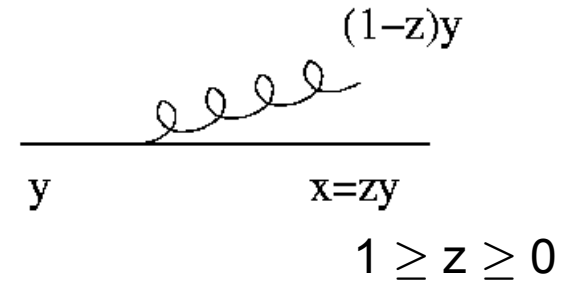
distribuzione  $\varphi$  di un partone in un partone di massa  $m$

ordine 0 :  $\varphi^{(0)}(x, m^2) = \delta(1 - x)$

quindi da  $F_{1/2/3} = \sum_{i=f,\bar{f},a} \int_0^1 \frac{dx}{x} C_{1/2/3} \varphi_i$  si deduce

$$C_{1/2/3}^{(0)} \equiv F_{1/2/3}^{el(0)}$$

ma un quark puo` irraggiare un gluone in QCD  
 → correzione perturbativa al primo ordine di  $\varphi^{(0)}(x)$



quark con momento  $y$  puo` irraggiare un gluone  
 collineare e riscaldare il momento ad  $x \rightarrow \varphi^{(1)}(x, Q^2)$

$$\varphi^{(1)}(x, Q^2) = \delta(1-x) + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \log \frac{Q^2}{m^2} P_{qq}^{(1)}(x) + o(\alpha_s)$$

$\uparrow$   $\varphi^{(0)}(x)$       **divergenza IR per  $m \rightarrow 0$**        $\searrow$  **funzione di splitting (o vertice di Altarelli-Parisi)**

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P_{qq}^{(1)}(x)$$

$P_{qq}$  determina l'evoluzione in  $Q^2$  di  $\varphi$ , determina cioe` il suo contenuto partonico a seconda della scala

**4/3 per  $N_c=3$**

$$P_{qq}^{(1)}(x) = C_F \left[ (1+x^2) \left( \frac{1}{1-x} \right)_+ + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right]$$

**per evitare double counting di  $\varphi^{(0)}$**

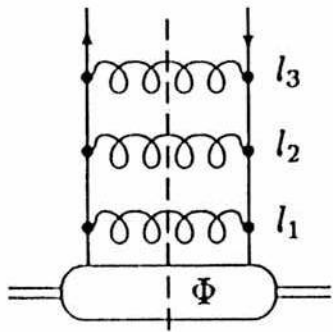
**distribuzione regolarizzata: per ogni  $f(x)$  smooth**

$$\int_0^1 dx \frac{f(x)}{1-x} = \int_0^1 dx \frac{f(x) - f(1)}{1-x} + f(1) \int_0^1 dx \frac{1}{1-x} \equiv \int_0^1 dx \frac{f(x)}{(1-x)_+} + f(1) \int_0^1 dx \frac{1}{1-x}$$

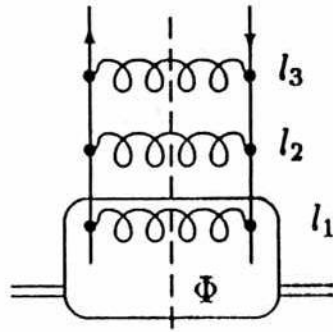
2-apr-04

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)_+} = \frac{1}{1-x} - \delta(1-x) \int_0^1 \frac{dz}{1-z}$$

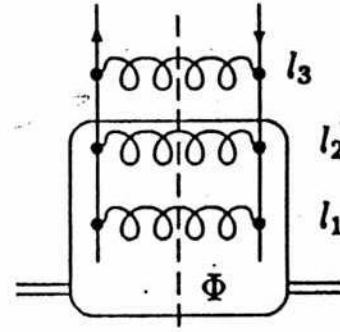
se la scala e'  $\mu_F$  di fattorizzazione, al variare di  $\mu_F$  la funzione di splitting determina il contenuto partonico della distribuzione  $\phi$ , discrimina cioe' cio' che va inglobato nella distribuzione (essendo off-shell al di sotto di  $\mu_F$ ) da cio' che va inglobato nei coefficienti perturbativi (essendo off-shell per piu' di  $\mu_F$ )



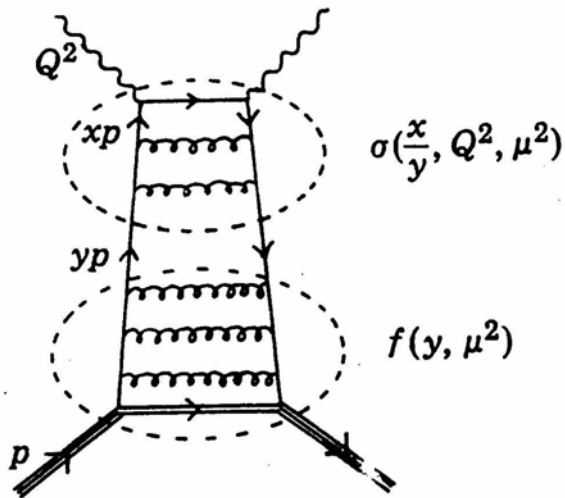
$$\boxed{\mu_F^2} \leq \bar{l}_{1T}^{-2} \leq \bar{l}_{2T}^{-2} \leq \bar{l}_{3T}^{-2}$$



$$\bar{l}_{1T}^{-2} \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \bar{l}_{2T}^{-2} \leq \bar{l}_{3T}^{-2}$$



$$\bar{l}_{1T}^{-2} \leq \bar{l}_{2T}^{-2} \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \bar{l}_{3T}^{-2}$$



assorbiti in  $\phi < \mu_F < \text{assorbiti in } C$

al variare di  $\mu_F$  la situazione cambia  
 $\rightarrow$  evoluzione



risposta alle due  
domande iniziali

## Schemi di fattorizzazione

equazioni di evoluzione determinano il modificarsi del contenuto delle distribuzioni partoniche al variare della scala di fattorizzazione  $\mu_F (=Q^2)$

ma la scala di partenza (ad es.  $Q_0^2$ ) e' arbitraria  $\rightarrow$  assegnare contributi a  $\phi$  o a  $C$  e' arbitrario  $\rightarrow$  necessita' di definire uno schema in cui calcolare l'evoluzione e confrontarsi con i dati consistentemente

diverse scelte; le piu' popolari sono

**schema DIS** (Altarelli, Ellis, Martinelli, '79):  $C_2^{(n)} \equiv F_2^{\text{el}(0)}$  del QPM  $\forall n$

$\rightarrow$  tutte le correzioni a  $F_2$  assorbite in  $\phi$ ; il QPM e' esatto alla scala  $Q_0^2$

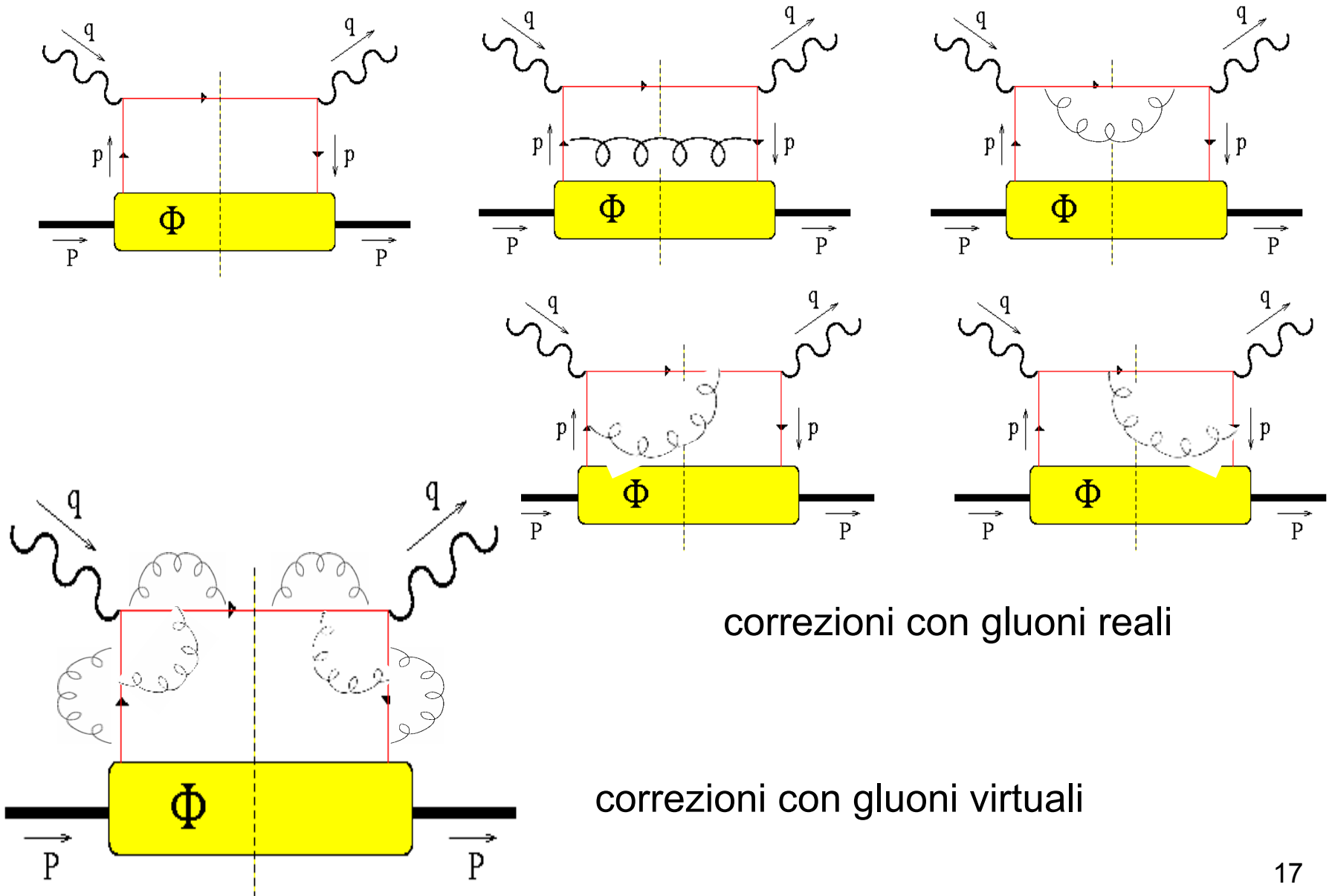
$\rightarrow$  non vale per  $C_{1/3}$ ; distribuzione di gluone non definita

**schema  $\overline{\text{MS}}$**  (Bardeen *et al.*, '78; Furmanski & Petronzio, '82; Collins & Soper, '82):

$$\begin{aligned}\phi_f(x, \mu_R) &= \int \frac{d\mathbf{p}_T}{(2\pi)^2} \langle P | a_f^\dagger(xP, \mathbf{p}_T) a_f(xP, \mathbf{p}_T) | P \rangle \\ &= \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{ixP \cdot y} \langle P | \bar{\psi}(y) \gamma^+ \psi(0) | P \rangle \Big|_{y^+ = y_T = 0} \quad a^+ = \frac{a^0 + a^3}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$



# Esempio: calcolo delle correzioni al primo ordine in DIS inclusivo



ordine 0 (QPM) :  $\varphi^{(0)} = \delta(1 - x) \longrightarrow C_{1/2}^{(0)} \equiv F_{1/2}^{el(0)}$

ordine 1 :  $F_{1/2}^{el}(x, Q^2) = \varphi^{(1)}(x, Q^2) + C_{1/2}^{(1)} \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_F}, \alpha_s(\mu_F) \right) \quad \mu_F \equiv \mu_R$

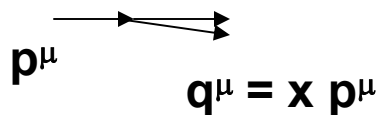
da eq. di evoluzione

- calcolo di  $F^{el}$  in teoria rinormalizzata; classificazione delle divergenze restanti
- scelta dello schema di fattorizzazione: quali contributi sono assorbiti in  $\varphi$  e quali in  $C$

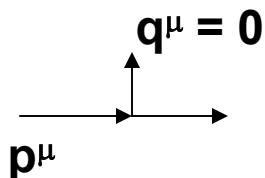
calcolo di  $F^{el}$  : processo elementare e` sempre del tipo  $\gamma^* + q_f \rightarrow q_f + g$   
 piu` crossing  
 energia nel c.m.

$$s = (p + q)^2 \sim 2p \cdot q - Q^2 = Q^2 \frac{1 - x_B}{x_B}$$

## gluoni reali



**divergenze collineari** per  $x \rightarrow 1$  in  $\int d^4q$   
**da riassorbire in  $\varphi^{(1)}$**  perche` connesse all'evoluzione del singolo  $q$ , prima dell'interazione eliminabili con massa  $m$  del  $q$  (cut-off nella radiazione di  $g$  emessa), oppure con cut-off sull'angolo di emissione, o con regolarizzazione dimensionale in  $\int d^4q \rightarrow$  prescrizione sulla sensibilita` IR di  $\varphi^{(1)}$   
 $\rightarrow$  non e` importante, perche`  $\varphi$  verra` scartata



**divergenze soft** per  $x_B \rightarrow 1$  ( $s \rightarrow 0$ ) in  $\int d^4q$   
non riassorbibili in  $\varphi^{(1)}$  perche` riguardano lo stato finale con emissione di un gluone soft ( $q \sim 0$ ) o collineare  
non riassorbibili in  $C^{(1)}$  perche` altrimenti il polo per  $x_B = x$  romperebbe il teorema di fattorizzazione  
 $\rightarrow$  **si devono cancellare !**

## gluoni virtuali

contributo solo per  $x_B = 1$ , in quanto la condizione di on-shell implica  $\delta((p+q)^2) \sim Q^2/x_B \delta(1-x_B)$

**cancellazione sistematica delle divergenze IR soft**

risultato finale:

**N.B. si riscrive la divergenza collineare in termini di momento trasverso del quark**

$$p_T^2 = Q^2 \frac{1 - x_B}{x_B} (1 - x^2)$$

$$F_2^{el(1)}\left(\frac{x_B}{x}, Q^2\right) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left\{ \int_0^{Q^2} \frac{dp_T^2}{p_T^2} P_{qq}^{(1)}\left(\frac{x_B}{x}\right) + C_F \left[ \left(1 + \left(\frac{x_B}{x}\right)^2\right) \left(\frac{\log\left(1 - \frac{x_B}{x}\right)}{1 - \frac{x_B}{x}}\right) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{x_B}{x}}\right) + \dots \right] \right\}$$

$$2x_B F_1^{el(1)}\left(\frac{x_B}{x}, Q^2\right) = F_2^{el(1)}\left(\frac{x_B}{x}, Q^2\right) - C_F \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \left(\frac{x_B}{x}\right)^2$$

**F<sub>1</sub> e F<sub>2</sub> differiscono di funzione senza divergenze IR → test fattorizzazione**

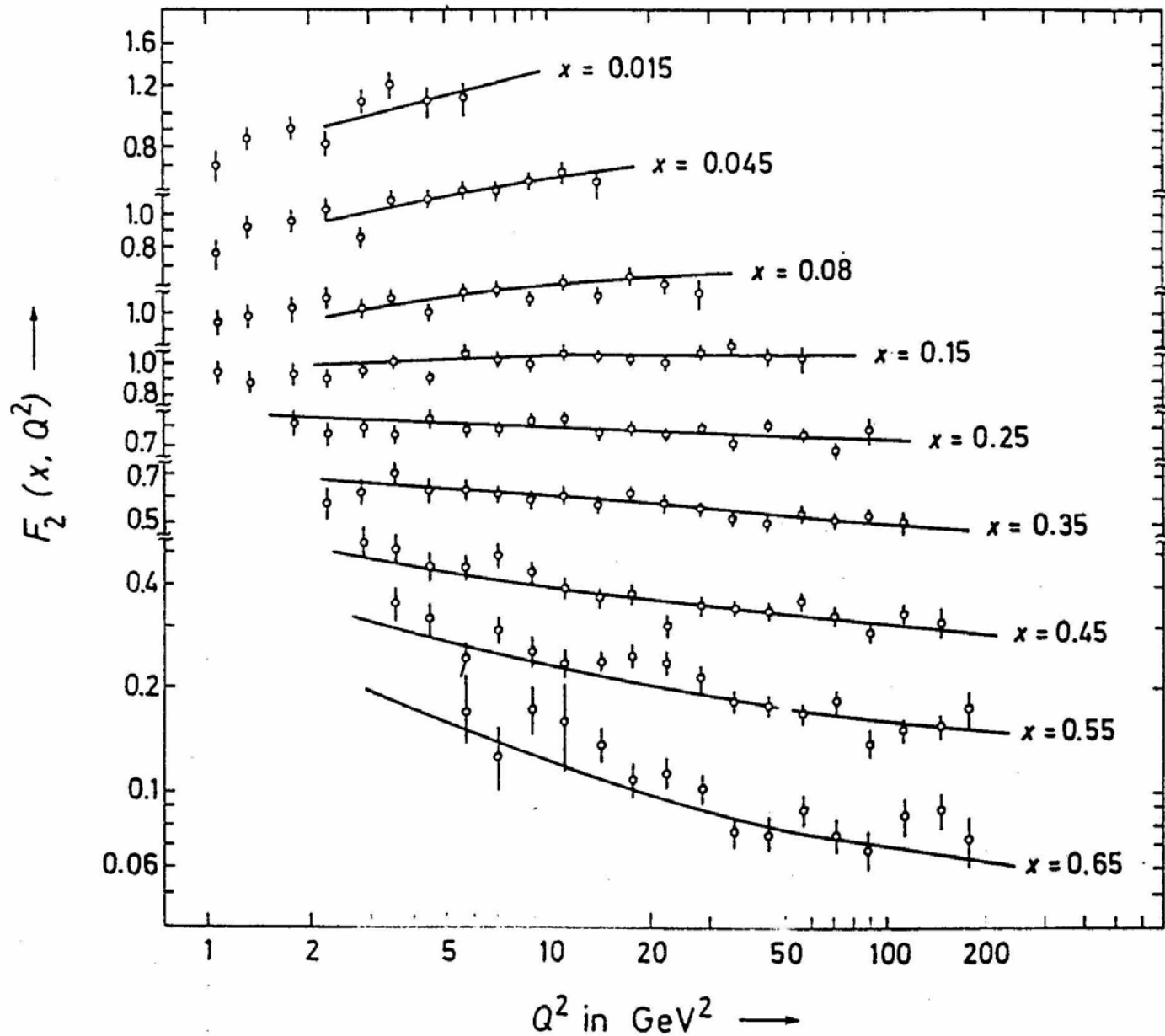
schema  $\overline{\text{MS}}$

$\varphi^{(1)}$  calcolabile con regolarizz. dimensionale

$$C_2^{(1)} + C_2^{(0)} (\equiv F_2^{el(0)}) \rightarrow C_2(x_B/x, Q^2) \rightarrow F_2(x_B, Q^2)$$

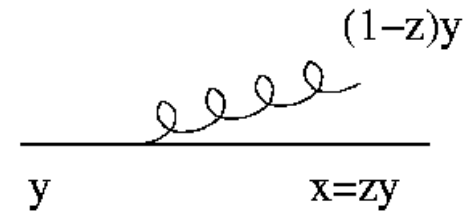
schema DIS

$$\varphi^{(1)} = F_2^{el(1)} \quad \text{e} \quad C_2 = C_2^{(0)}$$



**Figure 19.9** The structure function  $F_2$  of neutrino-iron scattering. The curves are fits made on the basis of first-order perturbation theory in QCD (after Abramowicz 1983).

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} P_{qq}^{(1)}(x)$$



$$\begin{aligned} P_{qq}^{(1)} &= \int_0^1 dy \int_0^1 dz P_{qq}^{(1)}(z) \delta(1-y) \delta(x-yz) \\ &= \int_0^1 \frac{dy}{y} \int_0^1 dz P_{qq}^{(1)}(z) \delta(1-y) \delta\left(\frac{x}{y} - z\right) \\ &= \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}^{(1)}\left(\frac{x}{y}\right) \delta(1-y) = \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}^{(1)}\left(\frac{x}{y}\right) \varphi^{(0)}(y) \end{aligned}$$

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}^{(1)}\left(\frac{x}{y}\right) \varphi^{(0)}(y)$$

DGLAP equations

potere predittivo delle equazioni di evoluzione:

noto il risultato di un processo alla scala  $Q_0^2 \rightarrow$  le equazioni di evoluzione dicono come dedurre il risultato alla scala  $Q^2 \neq Q_0^2$ , purché tale da permettere calcoli con la pQCD; inoltre basta conoscere la distribuzione partonica tra  $x$  e 1 per dedurre tutto il range  $[0,1]$  ad un'altra scala

unitamente alla fattorizzazione  $\rightarrow$  universalità delle distribuzioni partoniche (definite ad una scala  $\mu_F$ )  $\Rightarrow$  ampio potere predittivo della pQCD !

## Momenti delle funzioni di struttura

$$\begin{aligned}
 M_F^n(Q^2) &= \int_0^1 dx_B x_B^{n-1} F_2(x_B, Q^2) \\
 &= \int_0^1 dx_B x_B^{n-1} \int_0^1 \frac{dx}{x} C_2\left(\frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(\mu_F^2)\right) \phi(x, \mu_F) \\
 &= \int_0^1 d\eta \eta^{n-1} C_2\left(\frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(\mu_F^2)\right) \int dx x^{n-1} \phi(x, \mu_F) \\
 &= M_C^n\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(\mu_F^2)\right) M_\phi^n(\mu_F^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 dx_B x_B^{n-1} \dots \int_0^1 \frac{dx}{x} \dots \\
 &\int_0^1 d\eta \eta^{n-1} \dots \int_0^1 dx x^{n-1} \dots \\
 &d\eta = \frac{dx_B}{x}
 \end{aligned}$$

indipendenza della fisica dalla scala di fattorizzazione

$$\frac{d}{d \log \mu_F} \log M_F^n = 0$$

dimensione anomala

$$\longrightarrow \frac{d}{d \log \mu_F} \log M_\phi^n = -\frac{d}{d \log \mu_F} \log M_C^n = \frac{\alpha_s(\mu_F)}{2\pi} \gamma_n \quad \swarrow$$

$$\frac{d\varphi^{(1)}}{d \log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} P_{qq}^{(1)}\left(\frac{x}{y}\right) \varphi^{(0)}(y)$$

$$\int_0^1 dx x^{n-1} \dots = \int_0^1 dx x^{n-1} \dots$$

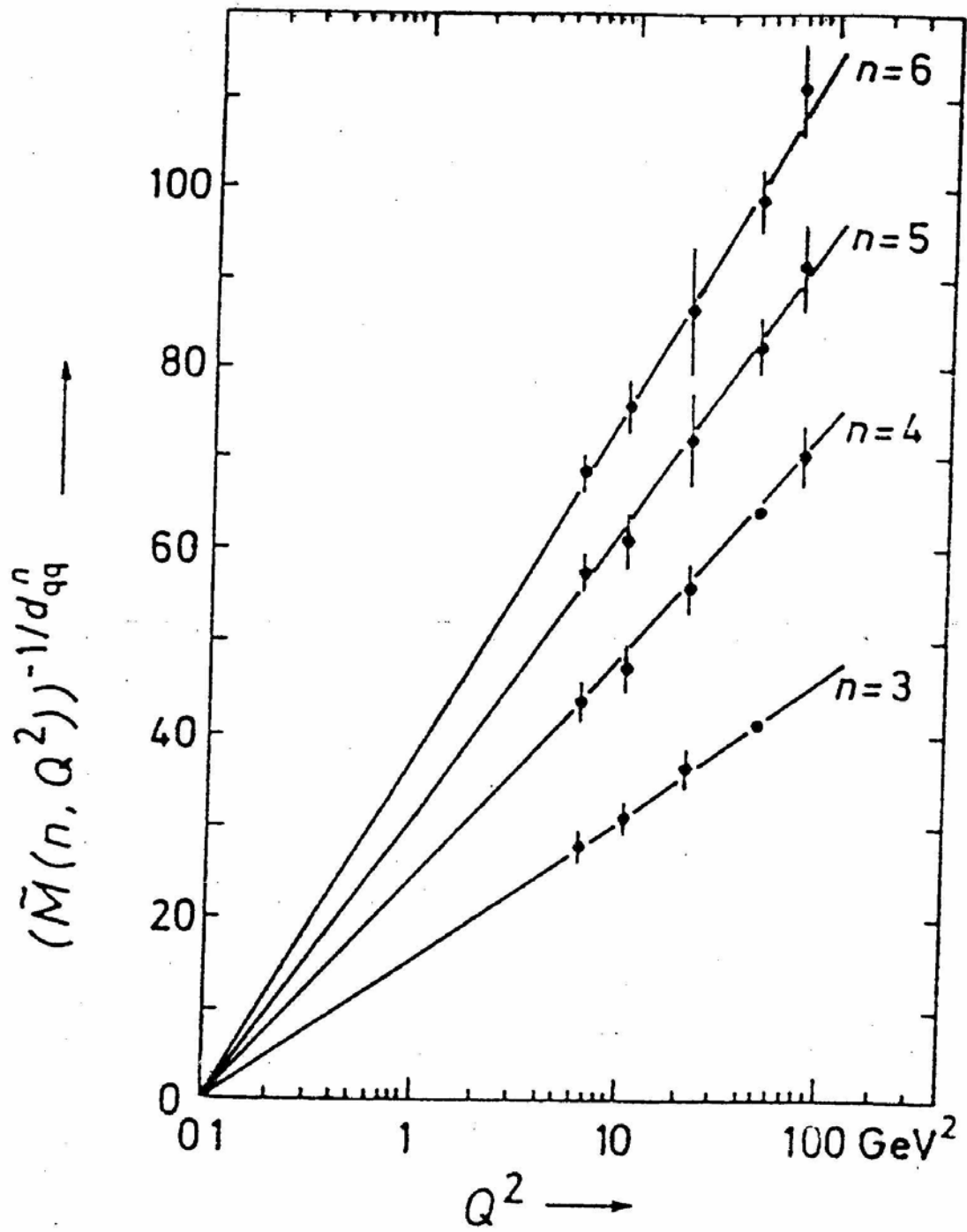
$$\frac{d}{d \log \mu_F} \log M_\phi^n = \frac{\alpha_s(\mu_F)}{2\pi} \underbrace{\int_0^1 dz z^{n-1} P_{qq}^{(1)}(z)}_{\gamma_n}$$

$M_\phi^n$  and  $M_C^n$  both point to  $M_F^n(Q^2) \sim \left( \frac{\log Q^2}{\log \mu_F^2} \right)^{\frac{2\gamma_n^{(1)}}{\beta^{(1)}}}$

$\frac{d}{d \log Q^2} \alpha_s(Q^2) = \beta(\alpha_s)$   
 $\sim -\frac{b_0}{\sqrt{4\pi}} \alpha_s^{3/2} - \dots$   
 $b_0 = 11 - \frac{2}{3} N_f > 0$   
 $\Rightarrow \beta^{(1)} < 0$   
 $\Rightarrow \alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b_0} \frac{1}{\log Q^2/\Lambda^2}$

dipendenza "dolce" da  $Q^2$  verificata sperimentalmente  $\uparrow$  asymptotic freedom  $\leftarrow$

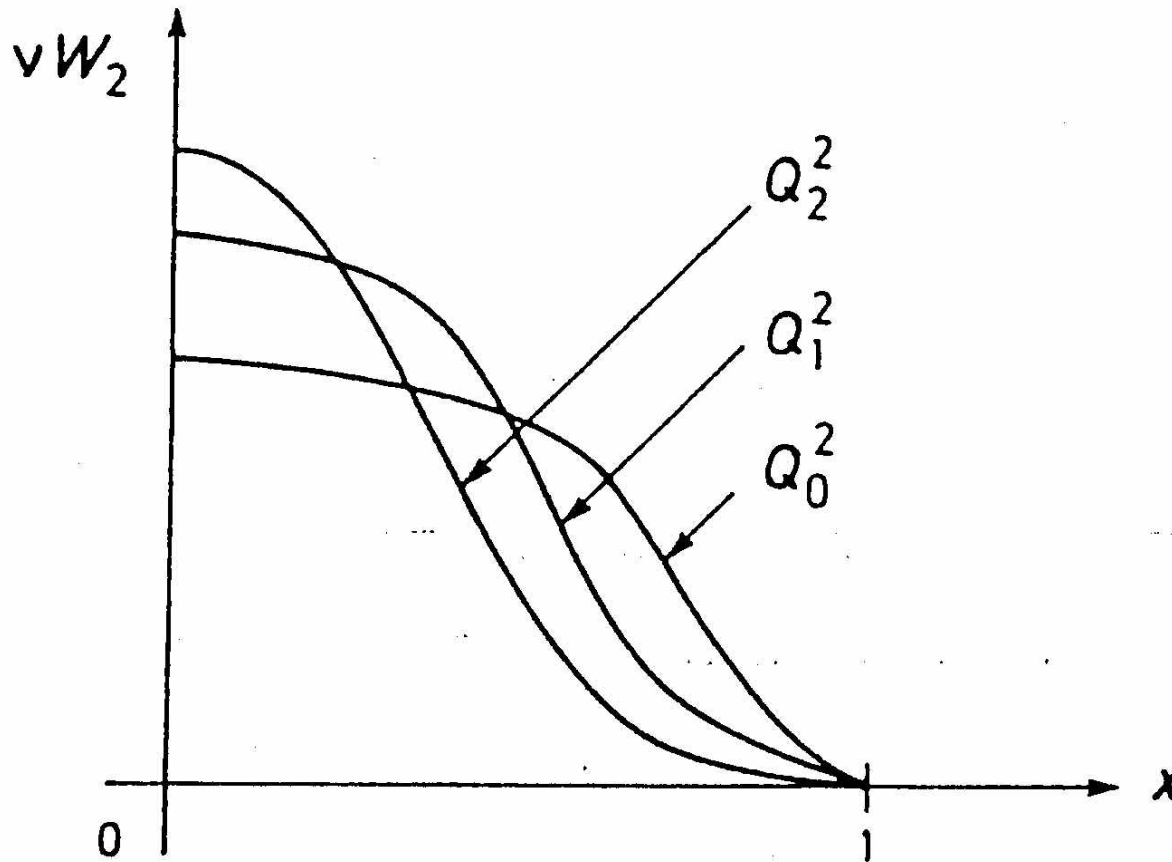




$$M_{\phi}^n(Q^2) = \int_0^1 dx_B x_B^{n-1} \phi(x_B, \mu_F) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0 \quad \text{perche' } \gamma_n > 0 \text{ per } n > 1 \text{ e } \beta^{(1)} < 0$$

ma per  $n > 1$   $M_{\phi}^n$  pesa la zona per  $x_B \rightarrow 1$

quindi  $\langle x_B \rangle$  diminuisce al crescere di  $Q^2$  in  $\phi_f$



## DIS semi-inclusivo

vale un teorema analogo a DIS inclusivo purché non si osservi  $\mathbf{p}_T$  dei partoni

### Drell-Yan

Teorema di fattorizzazione

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dy d\Omega} = \sum_{f_1, f_2} \int_{x_1}^1 d\xi_1 \int_{x_2}^1 d\xi_2 \phi_{f_1}(\xi_1, \mu_F) \frac{d\sigma^{el}}{dQ^2 dy d\Omega} \left( \frac{x_1}{\xi_1}, \frac{x_2}{\xi_2}, \Omega, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(\mu_F) \right) \phi_{f_2}(\xi_2, \mu_F) + o\left(\frac{1}{Q^2}\right)$$