

Onda associata alla particella

particella libera \rightarrow onda piana: $\psi(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$

$$\text{velocità di fase: } v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

$$\text{Se } E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \Rightarrow v_f = c\sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{p^2}} > c \quad (!!)$$

$$\text{pacchetto di onde: } \Psi(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{k} A(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\text{velocità di gruppo: } v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = c^2 \frac{p}{E} = \frac{c^2}{v_f} \leq c$$

equazione d'onda (Klein-Gordon):

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi(\mathbf{r}, t)$$

equazione di continuità: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi \right)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m_0} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$$

N.B. ρ non definita $> 0 \Leftrightarrow E = \pm c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}$