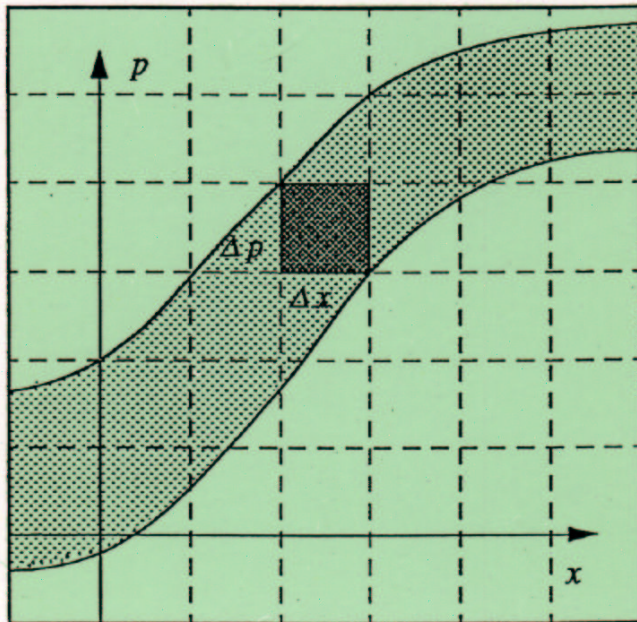


Sigfrido Boffi

Università degli Studi di Pavia  
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

## DA LAPLACE A HEISENBERG

Un'introduzione alla meccanica quantistica  
e alle sue applicazioni



QUADERNI DI FISICA TEORICA



## QUADERNI DI FISICA TEORICA

Collana curata da Sigfrido Boffi

Comitato Scientifico

Bruno Bertotti

Sigfrido Boffi

Italo Guarneri

Alberto Rimini

Marco Roncadelli

Volumi già pubblicati:

1. Le onde di de Broglie, a cura di Sigfrido Boffi
2. Onde di materia e onde di probabilità, a cura di Sigfrido Boffi
3. Il principio di indeterminazione, a cura di Sigfrido Boffi
4. La meccanica delle onde, a cura di Sigfrido Boffi
5. Paradosso EPR e teorema di Bell, a cura di Oreste Nicrosini
6. I cammini di Feynman, a cura di Marco Roncadelli e Antonio Defendi
7. L'interpretazione statistica della meccanica quantistica, a cura di Sigfrido Boffi
8. L'origine delle statistiche quantistiche, a cura di Fulvio Piccinini
9. Le radici della quantizzazione, a cura di Sandro Graffi
10. La fase di Berry, a cura di Franco Salmistraro
11. Il postulato dei quanti e il significato della funzione d'onda, a cura di Sigfrido Boffi
12. Indice di rifrazione adronico, a cura di Francesco Cannata
13. La formulazione delle storie della meccanica quantistica, a cura di Irene Giardina
14. La regola d'oro di Fermi, a cura di Paolo Facchi e Saverio Pascazio
15. Le radici del dualismo onda-corpuscolo, a cura di Sigfrido Boffi e Michele D'Anna
16. Teoria delle caratteristiche ed equazioni ondulatorie quantiche, a cura di Paola Orsi

I primi dieci Quaderni sono disponibili su richiesta presso il Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica dell'Università di Pavia. I successivi sono pubblicati dalla Casa Editrice Bibliopolis

Prima edizione: agosto 1992  
Seconda edizione: settembre 1996  
Edizione web: settembre 2001

© Copyright 2001 by Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

Tutti i diritti sono riservati. Nessuna parte può essere riprodotta in alcun modo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) senza il permesso dell'editore.

Sigfrido Boffi

Università degli Studi di Pavia  
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

## **DA LAPLACE A HEISENBERG**

**Un'introduzione alla meccanica quantistica  
e alle sue applicazioni**

QUADERNI DI FISICA TEORICA



## PREFAZIONE ALL'EDIZIONE WEB

Questa nuova edizione del manuale esce quando l'Università italiana affronta un'epocale trasformazione ristrutturando i suoi corsi di laurea in forma triennale. Per il corso di laurea in Fisica questo significa una sostanziale revisione dei contenuti proposti agli studenti, col risultato che molta parte della materia qui proposta costituisce approfondimento da affrontare durante il successivo biennio previsto per la laurea specialistica. Tuttavia credo che il testo nella sua struttura originale abbia ancora validità e possa costituire un utile riferimento per qualsiasi studente di Fisica. Perciò, nello spirito della gratuità che ha sempre caratterizzato la pubblicazione di questo manuale, lo ripropongo ora in una veste appositamente confezionata per essere resa disponibile a tutti avvalendosi della rete web. Sono grato a Marco Radici per i preziosi suggerimenti fornitimi nell'opera di trascrizione. L'occasione ha anche consentito di eliminare qualche ulteriore piccolo errore di stampa.

S. B.

Pavia, settembre 2001.

Sono ulteriormente grato allo studente Daniele Magnani che mi ha consentito di apportare ancora delle correzioni.

S. B.

Pavia, dicembre 2004.





## PREFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

La seconda edizione di questo manuale non differisce sostanzialmente dalla prima, ma l'occasione ha opportunamente consentito di intervenire sul testo in numerosi punti, sia per correggere vari errori di stampa (anche se forse non tutti), aggiornare la bibliografia e arricchire l'indice analitico, sia per chiarire taluni aspetti che hanno ingenerato confusione durante la lettura della prima versione. Sono molto grato agli studenti e agli amici che hanno avuto la bontà di segnalarmi, oltre ai pregi, anche i difetti. In particolare sono grato a Roberto Catenacci, Antonio Defendi e Franco Salmistraro, così come lo sono a me stesso per avere di nuovo rinunciato ai diritti di autore pur di vedere pubblicato un testo che credo sia utile per chi voglia affrontare lo studio della meccanica quantistica.

S. B.

Pavia, settembre 1996.



## PREFAZIONE

Pochi mesi dopo la loro pubblicazione nel 1926, i quattro lavori di Schrödinger sulla quantizzazione come problema agli autovalori, riuniti in un unico volume insieme con altri dello stesso autore, costituirono il primo manuale di meccanica ondulatoria. Esso fu un manuale per pochi specialisti, cui presto seguirono nuove trattazioni ad opera di altri artefici di quella che oggi chiamiamo meccanica quantistica. Su tutte spicca il testo fondamentale di Dirac, scritto in modo così definitivo che la prima edizione del 1930 è rimasta praticamente inalterata per dieci dei suoi dodici capitoli fino alla quarta e ultima del 1958, ristampata per la settima volta nel 1976. Numerose presentazioni della meccanica quantistica, più complete e didatticamente orientate, si sono susseguite nell'ormai lungo periodo di tempo che ci separa da quegli anni gloriosi, in cui la vivacità intellettuale e la sapienza matematica di alcuni giovanissimi ricercatori, unite al genio e all'esperienza di scienziati più maturi, hanno prodotto una delle più grandi rivoluzioni della storia del pensiero.

Il riorientamento di prospettiva introdotto dalla meccanica quantistica nel modo di porsi di fronte al fenomeno naturale non riguarda solo l'atteggiamento dell'uomo di scienza, ma tocca nell'intimo la mentalità dell'uomo stesso. Abituati dalla fisica ottocentesca, la cosiddetta fisica classica fondata sulla meccanica di Galilei e Newton, si poteva concepire l'intero universo in evoluzione meccanicistica secondo uno schema deterministico di causa ed effetto. Emblematica in tal senso è la posizione riduzionistica di Laplace, che viene inaspettatamente smentita dalle conclusioni raggiunte dai fisici nel costruire una teoria in grado di rendere conto dei nuovi dati sperimentali accumulati alla fine del secolo scorso e nel primo quarto di questo secolo. Con Heisenberg vengono scoperti i limiti intrinseci dell'osservazione, che impediscono di determinare esattamente le condizioni iniziali da cui viene a dipendere l'evoluzione temporale della fisica classica; e la partecipazione dell'osservatore stesso alla costruzione del fenomeno rappresenta uno stimolo per approfondimenti filosofici che ridimensionano il rapporto uomo-natura.

## Prefazione

Ma questo riorientamento è tuttora estraneo al comune buon senso e richiede non pochi sforzi anche allo studente del Corso di Laurea in Fisica. Dopo un biennio di studi propedeutici e totalmente ispirati dalla concezione meccanicistica, in cui ha rivisto con maggiori dettagli e approfondimenti lo sviluppo della fisica classica e ha imparato a destreggiarsi con alcuni aspetti del formalismo matematico necessario, lo studente si trova totalmente impreparato ad affrontare all'improvviso questo nuovo modo di pensare il fenomeno.

La difficoltà è forse sentita maggiormente in Italia dove solo negli ultimi dieci anni sono cominciate a fiorire alcune trattazioni elementari in lingua italiana. Questa che si aggiunge, senza nulla togliere ai pregi delle altre, vuole privilegiare lo sviluppo di pensiero che ha portato i fisici a rifondare i postulati basilari della teoria. Perciò questo testo si presenta come un numero speciale della collana dei “*Quaderni di Fisica Teorica*” che il Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica dell'Università di Pavia pubblica da alcuni anni con lo scopo di aiutare lo studente, e non solo lui, a familiarizzarsi con un tema o con un autore attraverso la lettura commentata di lavori originali.

Il testo tuttavia è principalmente un manuale, che trae origine dalle lezioni tenute dall'autore in circa un decennio, prima all'Università di Bologna e quindi all'Università di Pavia. Esso può idealmente suddividersi in due parti. La prima comprende sei capitoli, dal primo al settimo con esclusione del quinto. In questa parte viene esplorata la transizione dalla fisica classica alla meccanica quantistica, secondo un percorso che ispira il titolo del libro. Nei primi quattro capitoli vengono riproposti i risultati fondamentali di meccanica analitica, termodinamica ed elettromagnetismo; si esaminano poi le ragioni sperimentali della crisi della fisica classica, motivando quindi la necessità di abbandonare la descrizione deterministica per costruire una nuova teoria nella quale, fondendo gli aspetti corpuscolari con quelli ondulatori, diventano essenziali nuovi postulati e l'interpretazione statistica delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger. Il sesto e il settimo capitolo sviluppano in modo sistematico il formalismo basilare della meccanica quantistica.

La seconda parte, anch'essa di sei capitoli, è orientata all'utilizzazione del formalismo in problemi concreti. Essa comprende il quinto capitolo, dedicato alla soluzione esatta dell'equazione di Schrödinger in casi semplici, e i capitoli dall'ottavo al dodicesimo, che affrontano vari tipi di applicazioni e l'estensione del formalismo della meccanica quantistica non relativistica, con l'intento di proporre i metodi principali di base e le approssimazioni di calcolo utili per risolvere problemi di fisica quantistica.

In tre appendici inoltre sono raccolte alcune nozioni di carattere puramente matematico che vengono utilizzate nel testo principale e che dovrebbero essere per lo più già note a chi legge. Infine gli argomenti trattati sono corredati da una ricca bibliografia commentata, che rimanda ai testi originali e permette di recuperare le sorgenti concettuali e le basi sperimentali della teoria.

Come tale, il materiale è perciò più esteso di quanto si possa proporre durante un normale corso universitario di Istituzioni di Fisica Teorica dedicato alla meccanica

## Prefazione

quantistica. Ma molti argomenti sono presentati come Esempi, integrati nel testo in modo da permetterne una lettura pilotata e limitata agli argomenti di volta in volta più interessanti. Il testo principale è spesso interrotto da Esercizi, che vengono proposti senza soluzione: ma questa è quasi sempre o anticipata e nascosta tra le righe precedenti, e in tal caso serve a far riflettere il lettore su quanto già esposto, oppure si trova nel testo successivo, talvolta anche qualche pagina oltre, e ha quindi funzione di stimolo per un'elaborazione personale.

Mentre la numerazione delle tabelle è progressiva all'interno di ogni capitolo, quella delle equazioni, delle figure, degli Esempi e degli Esercizi è doppia per tenere conto anche del paragrafo in cui compaiono. In caso di richiamo da un altro capitolo, la numerazione viene fatta precedere dal numero (in carattere romano) del corrispondente capitolo.

Il testo giunge in tipografia dopo una lunga gestazione, durante la quale varie versioni preliminari sono circolate tra studenti e colleghi. L'autore è profondamente grato per tutti i consigli e suggerimenti di cui ha potuto beneficiare per la stesura del testo finale. In particolare desidera ricordare i contributi ricevuti da Roberto Catenacci, Vittorio Degiorgio, Italo Guarneri, Francesco Miglietta, Marco Radici, Marco Roncadelli, Alberto Rimini. Naturalmente sviste e inesattezze sono ancora possibili e sono solo imputabili all'autore, che ringrazia fin d'ora chi volesse gentilmente segnalargliele. Egli è inoltre grato a Michele Livan per un'assistenza nell'elaborazione grafica e a Matteo Cacciari per la realizzazione con *Mathematica* delle fig. V.8.3 e V.8.4. Un particolare ringraziamento va infine ai familiari dell'autore stesso per la pazienza e la comprensione con cui hanno tollerato il tempo dedicato a questo lavoro.

S. B.

Pavia, luglio 1992.



## INDICE

I. Risultati di fisica classica .....	1
I.1. Meccanica analitica .....	4
I.2. Macrofisica .....	22
I.3. Elettrodinamica .....	43
II. La crisi della fisica classica .....	61
II.1. Principio di relatività ristretta .....	68
II.2. La radiazione di corpo nero .....	76
II.3. Aspetti corpuscolari della radiazione .....	90
II.4. Spettri atomici .....	94
II.5. Le regole di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld .....	97
III. Verso l'equazione di Schrödinger .....	105
III.1. Ottica geometrica e dinamica di una particella .....	110
III.2. L'ipotesi di de Broglie .....	119
III.3. L'equazione di Schrödinger .....	124
III.4. Limite classico dell'equazione di Schrödinger .....	131
III.5. Interpretazione dell'equazione di Schrödinger .....	136
III.6. Teorema di Ehrenfest .....	140
III.7. Spazio degli impulsi e valor medio di un operatore .....	142
IV. Il formalismo elementare della meccanica quantistica .....	151
IV.1. Operatori quantistici .....	153
IV.2. Equazione agli autovalori .....	162
IV.3. Soluzione generale dell'equazione di Schrödinger .....	178
IV.4. Stati stazionari e stati quasi-stazionari .....	180
IV.5. Riduzione del pacchetto di onde .....	184

*Indice*

IV.6. Il principio di indeterminazione .....	188
IV.7. Pacchetto di minima indeterminazione .....	195
IV.8. Relazione di indeterminazione per energia e tempo .....	200
IV.9. Commutabilità e compatibilità .....	203
IV.10. Valori medi ed equazioni del moto .....	206
IV.11. Riassunto dei postulati .....	208
V. Alcuni sistemi semplici .....	211
V.1. Salto di potenziale: coefficienti di riflessione e di trasmissione .....	211
V.2. Barriera di potenziale simmetrica .....	216
V.3. Buca di potenziale rettangolare .....	222
V.4. Oscillatore armonico lineare .....	225
V.5. Moto in campo di forze centrali .....	230
V.6. Moto libero in tre dimensioni .....	233
V.7. Oscillatore armonico tridimensionale .....	234
V.8. Atomo idrogenoide .....	239
VI. Rappresentazioni .....	249
VI.1. Formulazione di Dirac .....	252
VI.2. Teoria matriciale dell'oscillatore armonico lineare .....	264
VI.3. L'insieme degli stati coerenti .....	269
VI.4. Trasformazioni unitarie .....	275
VI.5. Operatori di rotazione .....	282
VI.6. Operatori tensoriali irriducibili .....	289
VI.7. Inversione temporale .....	291
VII. Evoluzione temporale in meccanica quantistica .....	295
VII.1. Descrizione di Schrödinger .....	296
VII.2. Il propagatore dell'equazione di Schrödinger .....	298
VII.3. Descrizione di Heisenberg .....	305
VII.4. Descrizione di interazione .....	308
VII.5. Formulazione di Feynman .....	312
VII.6. Casi puri e casi miscela .....	319
VII.7. Operatore densità .....	321
VIII. Metodi approssimati per gli stati stazionari .....	329
VIII.1. Il metodo variazionale .....	330
VIII.2. Perturbazioni indipendenti dal tempo .....	336
VIII.3. Lo sviluppo di Rayleigh–Schrödinger .....	339
VIII.4. Calcolo perturbativo per due livelli vicini .....	345
VIII.5. Lo sviluppo di Brillouin–Wigner .....	349
IX. Lo spin .....	351
IX.1. Elettrone in campo magnetico e invarianza di gauge .....	353



*Indice*

IX.2. Effetto Aharonov–Bohm .....	357
IX.3. Effetto Zeeman .....	360
IX.4. Gli operatori di spin .....	362
IX.5. Evoluzione temporale di uno stato di spin .....	368
IX.6. Composizione di due momenti angolari .....	375
IX.7. Interazione spin–orbita .....	380
X. Sistemi di molte particelle .....	387
X.1. Il problema a due corpi .....	389
X.2. Hamiltoniana di un sistema di molte particelle .....	395
X.3. Particelle identiche e principio di Pauli .....	399
X.4. Accoppiamenti $LS$ e $jj$ .....	411
X.5. Il metodo di Hartree .....	416
X.6. Atomo di elio .....	422
X.7. Il metodo di Hartree–Fock .....	425
X.8. Modello a shell atomico .....	432
X.9. Forze nucleari .....	437
X.10. Modello a shell nucleare .....	444
XI. Perturbazioni dipendenti dal tempo .....	451
XI.1. Perturbazione di un sistema a due livelli .....	452
XI.2. Equazione di Schrödinger con potenziale dipendente dal tempo .....	457
XI.3. Sviluppo perturbativo .....	458
XI.4. Probabilità di transizione e regola d’oro .....	461
XI.5. Il teorema di Wigner-Eckart .....	468
XI.6. Transizioni indotte dalla radiazione .....	471
XI.7. Approssimazione di grandi lunghezze d’onda .....	475
XI.8. Regola di somma di dipolo elettrico .....	481
XI.9. Emissione spontanea .....	484
XII. Processi d’urto .....	491
XII.1. Sezione d’urto .....	492
XII.2. Funzione di Green e ampiezza di diffusione .....	498
XII.3. Equazione di Lippmann-Schwinger .....	504
XII.4. Approssimazione di Born .....	505
XII.5. Il metodo dello sviluppo in onde parziali .....	510
XII.6. Determinazione degli sfasamenti per l’urto elastico .....	513
XII.7. Diffusione con assorbimento .....	522
XII.8. Teorema ottico per l’urto elastico .....	527
XII.9. Urto elastico di particelle identiche .....	528
XII.10. Operatori di Møller .....	531
XII.11. La matrice di scattering .....	538
XII.12. L’operatore di transizione .....	541
XII.13. Sezione d’urto e teorema ottico .....	544

*Indice*

XII.14. L'urto anelastico .....	546
XII.15. L'effetto fotoelettrico .....	549
XII.16. Proprietà di simmetria e matrice di transizione .....	552
A. Distribuzioni e delta di Dirac .....	555
A.1. Distribuzioni .....	556
A.2. La delta di Dirac .....	559
A.3. Trasformate di Fourier .....	564
B. Equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine .....	569
B.1. Soluzione nell'intorno di un punto regolare .....	570
B.2. Eventuale polidromia degli integrali .....	571
B.3. Soluzione nell'intorno di un punto di singolarità fuchsiana .....	573
B.4. Equazioni totalmente fuchsiane .....	575
B.5. Equazioni con tre singolarità fuchsiane .....	578
B.6. Funzione ipergeometrica confluyente .....	582
C. Calcolo matriciale e operatori quantistici .....	587
C.1. Proprietà delle matrici .....	589
C.2. Cambiamento di base .....	592
C.3. Diagonalizzazione di una matrice .....	597
Tab. D1. Costanti fisiche .....	601
Tab. D2. Relazioni elettromagnetiche .....	603
<i>Indice analitico</i> .....	605