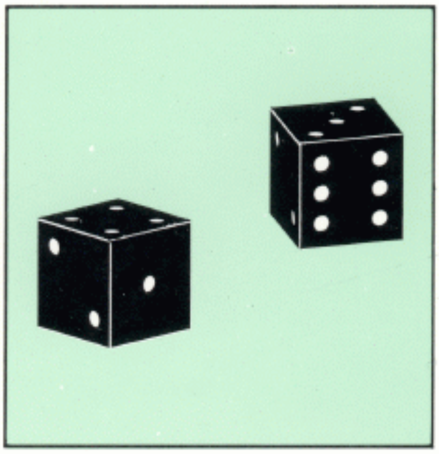
Sigfrido Boffi

L'INTERPRETAZIONE STATISTICA DELLA MECCANICA QUANTISTICA



QUADERNI DI FISICA TEORICA

Università degli Studi di Pavia
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

QUADERNI DI FISICA TEORICA
Collana curata da Sigfrido Boffi

Comitato Scientifico

Bruno Bertotti
Italo Guarneri
Alberto Rimini

Sigfrido Boffi

L'INTERPRETAZIONE STATISTICA
della
MECCANICA QUANTISTICA

QUADERNI DI FISICA TEORICA

Università degli Studi di Pavia
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

Prima edizione: febbraio 1992
Prima edizione web: ottobre 2007

ISBN 88–85159–07–9

INDICE

PREMESSA

Nell'itinerario che rivisita le sorgenti della meccanica quantistica non può mancare un Quaderno dedicato a Max Born e ai lavori in cui propose la corretta interpretazione della funzione d'onda che risolve l'equazione di Schrödinger. I due lavori, una breve nota con i risultati salienti e una più estesa elaborazione tecnica, furono scritti subito dopo i primi due articoli di Schrödinger sulla quantizzazione come problema agli autovalori. Nel rileggerli oggi, le varie affermazioni sembrano quasi ovvie e scontate, tanto sono state trasferite inalterate nei libri di testo. Però il contenuto di questi lavori è normalmente discusso, invece che nel capitolo dedicato all'interpretazione, in quello in cui sono trattati i processi d'urto, con grande enfasi per quella che oggi si chiama approssimazione di Born e che permette di semplificare lo studio delle collisioni e delle reazioni tra particelle. Si dimentica così che la cosiddetta interpretazione di Copenhagen ha avuto origine a Göttingen con Born.

I due lavori del 1926 sui processi d'urto e il discorso tenuto da Born durante la cerimonia per il ricevimento del premio Nobel per la Fisica nel 1954 sono qui tradotti con il consenso del Prof. Gustav V.R. Born del King's College di Londra. Utili sono state inoltre alcune conversazioni con il Prof. Martin Schumacher dell'Università di Göttingen.

Il logo di copertina, realizzato da Giorgio Bonaschi, nasce da un'idea suggerita all'autore dal figlio Daniele e ispirata dal rifiuto di Einstein di accettare l'interpretazione statistica delle leggi della Natura.

§ 1. Introduzione

L'arte di indovinare le formule giuste: così Max Born (1882–1970) definisce il suo lavoro di fisico teorico intorno al 1920. Era l'epoca in cui chiaramente la fisica classica risultava inadeguata per spiegare i fenomeni atomici, ma non si intravvedeva ancora una nuova teoria coerente. C'era la necessità di abbandonare il vecchio schema concettuale in favore di una nuova fisica, ispirata alla teoria dei quanti e in grado di dare fondamento alle regole di quantizzazione proposte da Niels Henrik David Bohr (1885–1962) e Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868–1951) [1].

I postulati della teoria di Bohr–Sommerfeld riguardano i sistemi atomici chiusi e sono essenzialmente due. Il primo ipotizza l'esistenza di stati stazionari stabili, definiti dalla quantizzazione dell'azione relativa al moto chiuso, e implica il principio adiabatico, in base al quale l'azione resta costante anche se c'è una debole perturbazione esterna che può provocare una transizione tra stati stazionari [2]. Il secondo postulato definisce la frequenza della radiazione, emessa o assorbita durante la transizione, mediante la differenza di energia tra gli stati iniziale e finale dell'atomo. Da questo postulato emerge il principio di corrispondenza, proposto da Bohr come principio da rispettare nella costruzione della nuova teoria dei quanti, in modo da riottenere, sotto opportune condizioni, i risultati della fisica classica [3].

È proprio il principio di corrispondenza che ispira la ricerca di quegli anni: occorre inventare le formule capaci di spiegare il comportamento microscopico, ma contemporaneamente in grado anche di recuperare la descrizione classica. Occorre dunque fantasia e una certa spregiudicatezza di fronte agli schemi del

---

[1] N. Bohr: *On the constitution of atoms and molecules [Sulla struttura degli atomi e delle molecole],* Philosophical Magazine **26** (1913) 1–25, 476–502, 857–875.
A. Sommerfeld: *Zur Quantentheorie der Spektrallinien [Teoria quantistica delle righe spettrali],* Annalen der Physik **51** (1916) 1–94, 125–167.

[2] Il principio adiabatico era stato messo a fuoco da Paul Ehrenfest (1880–1933): *Over adiabatische veranderingen van een stelsel in verband met de theorie der quanta [Cambiamenti adiabatici di un sistema in connessione con la teoria dei quanti],* Verlsag der Kongelige Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **25** (1916) 412–433; *Adiabatische Invarianten und Quantentheorie [Invarianti adiabatici e teoria dei quanti],* Annalen der Physik **51** (1916) 327–352; *On adiabatic changes of a system in connection with the quantum theory [Cambiamenti adiabatici di un sistema in connessione con la teoria dei quanti],* Philosophical Magazine **33** (1917) 500–513.

[3] N. Bohr: *Über die Anwendung der Quantentheorie auf den Atombau. I. Die Grundpostulate der Quantentheorie [Applicazione della teoria dei quanti alla struttura atomica. I. I postulati fondamentali della teoria dei quanti],* Zeitschrift für Physik **13** (1923) 117–165.

passato: gli stati stazionari degli elettroni negli atomi, postulati da Bohr, sono un assurdo dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, così come lo sono gli improvvisi e imprevedibili salti quantici da uno stato all'altro. "Fu lo stile di Bohr e dei suoi discepoli a dare quel particolare gusto alla vecchia teoria dei quanti e a provocare le innumerevoli scoperte e ritrattazioni, le ipotesi ardite e le osservazioni profonde che caratterizzano questo affascinante periodo della ricerca" [4].

"Una buona scienza è un'arte, non una scienza", dice Paul K. Feyerabend (n. 1924) [5], cioè non è una scienza "nel senso di un'impresa *razionale* che obbedisca a criteri immutabili della ragione e che usi concetti ben definiti, stabili, *oggettivi* e perciò indipendenti dalla pratica" [6]. Tuttavia, anche se "dobbiamo accettare il fatto che anche in fisica i convincimenti fondamentali sono precedenti il ragionamento, come in tutte le altre attività umane" [7], il fine ultimo del riscontro tra teoria e fatti sperimentali obbliga a un rigore logico assoluto e quindi all'esercizio proprio di tutti gli aspetti razionali meno accettabili per Feyerabend [8]. Ben lungi dall'essere il nuovo Socrate, Feyerabend nel suo desiderio di rappresentare il ruolo di "enfant terrible" dell'epistemologia contemporanea, trascura il fatto che una delle più grandi costruzioni mentali della storia del pensiero è opera di *uomini*, quali Erwin Schrödinger (1887–1961) e Werner Karl Heisenberg (1901–1976), parimente dotati sul piano scientifico–matematico e aperti agli aspetti della cultura umanistica, in meravigliosa sintesi.

Un ruolo del tutto particolare in questa costruzione ha giocato Albert Einstein (1879–1955). Vero figlio dell'ottocento e fermo sostenitore dell'esistenza di leggi immutabili, causali e deterministiche, indipendenti dall'osservatore, "più di ogni altro ha visto chiaramente il sottofondo statistico delle leggi della fisica e fu un pioniere nella lotta per dominare la moltitudine confusa dei

---

[4] P.K. Feyerabend: *Dialogo sul metodo*, traduzione e postfazione di Roberta Corvi, Laterza, Roma–Bari,1989, p. 69.

[5] P.K. Feyerabend: *Scienza come arte*, Laterza, Roma–Bari,1984, p. 53.

[6] P.K. Feyerabend: *Scienza come arte*, *loc. cit.*, p. 35.

[7] M. Born: *Einstein's statistical theories [Le teorie statistiche di Einstein]*, in *Albert Einstein: Philosopher–Scientist*, ed. Paul Arthur Schilpp, Tudor Publ. Co., New York, 1949, pp. 163–177.

[8] Feyerabend nega che vi sia un metodo scientifico obiettivo e razionale e paragona la scienza a un'ideologia che esercita sull'uomo contemporaneo un'influenza analoga a quella che un tempo la religione esercitava sulle società. In quanto il razionalismo occidentale ha distrutto il modo mitico di percepire l'universo, sostituendolo con un'idea più ristretta, riassunta in quella forma dominante che va sotto il nome di scienza, esso va rifiutato. Perciò, pur nella lodevole rivalutazione del mito e della poesia nei confronti di una, per lui autoritaria, filosofia naturale, Feyerabend introduce una radicale sfiducia nella possibilità di raggiungere la verità.
P.K. Feyerabend: *Against method. Outline of an anarchistic theory of knowledge*, NLB, Londra, 1975 [trad. it.: *Contro il metodo*, Feltrinelli, Milano, 1984].

fenomeni quantistici" [9]. Con la spiegazione dell'effetto fotoelettrico [10] e l'idea che la radiazione in interazione con la materia possa essere visualizzata come un insieme statistico di fotoni indipendenti [11] e indistinguibili [12], egli fu il più convincente divulgatore delle idee di Ludwig Eduard Boltzmann (1844–1906) sulla necessità di leggi statistiche. Ai suoi suggerimenti molto deve per esempio Louis-Victor de Broglie (1892–1987), che stimolò la nascita della meccanica ondulatoria di Schrödinger [13]. Lo stesso Born, che lo conobbe nel 1915 divenendone grande amico [14], sviluppò l'interpretazione statistica della meccanica quantistica riprendendo alcune idee di Einstein. Ciò nonostante la personale convinzione di Einstein era che il ricorso a leggi statistiche fosse necessario a causa della nostra ignoranza, cioè della nostra incapacità di dominare il moto microscopico deterministico di numerosissime particelle. Perciò Einstein rimase scettico e isolato quando fu operata la sintesi tra principi statistici e principi quantistici.

Born aveva vissuto il travaglio della vecchia teoria dei quanti e aveva partecipato attivamente allo sviluppo dell'idea di Heisenberg, suo giovane assistente, di reinterpretare in modo opportuno i concetti della dinamica classica. Sostituire delle matrici alle variabili dinamiche classiche comportava di interpretarne gli elementi non diagonali in termini di probabilità di transizione tra stati stazionari del sistema atomico. Born quindi era anche per questo già familiare con un concetto di probabilità e con una descrizione statistica dei fenomeni fisici. Tuttavia la meccanica delle matrici, mentre rendeva conto della fenomenologia riguardante i sistemi chiusi e descritti da moti periodici, non era applicabile in modo diretto a problemi, quali la diffusione di particelle, in cui viene a mancare la periodicità del moto. Per questi problemi apparve a

---

[9] M. Born: *Einstein's statistical theories, loc. cit.*

[10] A. Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunt [Un punto di vista euristico riguardante la produzione e trasformazione della luce]*, Annalen der Physik **17** (1905) 132–148.

[11] A. Einstein: *Zur Quantentheorie der Strahlung [Teoria quantistica della radiazione]*, Physikalische Zeitschrift **18** (1917) 121–128.

[12] A. Einstein: *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases [Teoria quantistica del gas perfetto monoatomico]*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin) (1924) 261–267, (1925) 3–14, 18–25.

[13] Per una discussione del contributo di de Broglie, si vedano per esempio in questa collana i Quaderni *Le onde di de Broglie* e *Onde di materia e onde di probabilità*.

[14] Il breve periodo trascorso insieme all'Università di Berlino fu seguito da un ricco e interessante carteggio epistolare, cui partecipò anche la moglie di Born, in cui Born e Einstein, oltre a commentare (spesso con amarezza) i fatti della cronaca e della storia, si comunicavano (e criticavano) i rispettivi progressi scientifici.
L'epistolario tra Einstein e i coniugi Born è raccolto in: *Briefwechsel 1916–1955, kommentiert von Max Born*, Nymphenburger Verlagshandlung, München, 1969; trad. inglese di Irene Born: *The Born–Einstein Letters. The correspondence between Albert Einstein and Max and Hedwig Born from 1916 to 1955, with commentaires by Max Born*, introduzione di Werner Heisenberg e prefazione di Bertrand Russel, The Macmillan Press Ltd., Londra, 1971.

Born molto più appropriata l'equazione della meccanica ondulatoria proposta da Schrödinger, anche se allo stesso Schrödinger non era assolutamente chiaro che cosa rappresentasse la funzione che risolve la sua equazione. Per la sua formazione culturale era proprio Born la persona in grado di apprezzare meglio il giusto significato della funzione d'onda, cosa che fece immediatamente applicando il formalismo di Schrödinger ai problemi d'urto.

In questo Quaderno viene dapprima presentato il discorso tenuto da Born a settantadue anni in occasione della sua premiazione a Stoccolma col premio Nobel per la Fisica del 1954; in esso Born rivive la storia di quei due frenetici anni (dalla metà del 1925 alla metà del 1926) in cui la scuola di Göttingen, da lui stesso fondata, ribalta completamente lo schema deterministico e causale della fisica classica. Dopo alcuni cenni biografici vengono discussi poi i due lavori sui processi d'urto che hanno stimolato l'interpretazione statistica della meccanica quantistica. Il Quaderno si chiude con un'appendice che elenca la cronologia dei lavori che furono pubblicati tra il 1925 e il 1927 e che si possono ritenere i più significativi per tale interpretazione.

L’interpretazione statistica della meccanica quantistica [†] [15]

I lavori, per i quali mi è toccato l’onore del premio Nobel per l’anno 1954, non contengono alcuna scoperta di un nuovo fenomeno naturale, bensì la fondazione di una nuova maniera di pensare i fenomeni naturali. Questo modo di pensare ha permeato a tal punto la fisica sperimentale e teorica che non sembra quasi possibile dire su di esso qualche cosa che non sia già stato detto spesso. E tuttavia ci sono alcuni aspetti particolari che io vorrei discutere in questa che per me è un’occasione così di festa. Il primo punto è questo: i lavori della scuola di Göttingen, da me diretti allora negli anni 1926 e 1927, portarono alla soluzione di una crisi intellettuale in cui si era venuta a trovare la nostra scienza per la scoperta di Planck del quanto d’azione nel 1900 [16]. Oggi la fisica è in una simile crisi – non intendo qui il suo intreccio con la politica e l’economia a causa del controllo di una nuova, terribile forza della natura [17], ma penso ai problemi di logica e di teoria della conoscenza posti

---

[†] di Max Born: *Nobelvortrag*, in *Les Prix Nobel en 1954*, Imprimérie Royale P.A. Norstedt & Söner, 1955. Testo della conferenza pronunciata a Stoccolma l’11 dicembre 1954 in occasione del ricevimento del Premio Nobel per la Fisica del 1954.

[15] Viene qui utilizzato per la traduzione il testo originale in tedesco (*Die statistische Deutung der Quantenmechanik*), riportato nel libretto che ogni anno la Fondazione Nobel pubblica per registrare la cerimonia del conferimento. Esistono anche due traduzioni in inglese: la prima (*Statistical interpretation of quantum mechanics*), comparsa sulla rivista *Science* (**122** (1955) 675–679), e la seconda (*The statistical interpretation of quantum mechanics*), riportata nel libro a cura della stessa Fondazione: *Nobel Lectures in Physics 1942–1962*, Elsevier Publ. Co., Amsterdam, 1964, pp. 256–267.

[16] Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947) aveva presentato i risultati della sua analisi dello spettro di emissione di corpo nero alla Società Tedesca di Fisica riunita in Berlino il 14 dicembre 1900. La formula ottenuta da Planck spiega esattamente lo spettro con un’ipotesi originale: a ogni frequenza della radiazione viene associato un oscillatore armonico che vibra con la stessa frequenza, ma la cui energia può assumere solo valori discreti. I possibili valori sono multipli di una quantità elementare di energia, proporzionale alla frequenza della radiazione attraverso il fattore h, noto ora come costante di Planck. La portata dell’ipotesi di Planck, sebbene non riconosciuta immediatamente, è tale da offrire agli storici della fisica la giustificazione per fissare la data delle origini della meccanica quantistica.
M. Planck: *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum [Teoria della legge di distribuzione energetica dello spettro normale]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **2** (1900) 237–245; *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum*, Annalen der Physik **4** (1901) 553–563.

[17] Il problema della non proliferazione delle armi nucleari fu affrontato dall’Assemblea Generale delle Nazioni Unite già nel gennaio 1946, pochi mesi dopo la fine della seconda guerra mondiale e lo scoppio delle due bombe atomiche su Hiroshima (6 agosto 1945) e Nagasaki (9 agosto 1945). Ma nel 1949 entrò a far parte del “club nucleare” anche l’Unione delle Repubbliche Socialiste Sovietiche, seguita nel 1952 dal Regno Unito di Gran Bretagna

dalla fisica nucleare [18]. Forse è bene in tale momento ricordarsi ciò che avvenne in situazioni analoghe, tanto più che questi avvenimenti non sono privi di un certo effetto drammatico. In secondo luogo, quando ho detto che i fisici avevano accettato il modo di pensare da noi sviluppato allora, non ero del tutto corretto; ci sono un paio di eccezioni molto notevoli e proprio tra coloro che hanno contribuito al massimo alla costruzione della teoria quantistica. Lo stesso Planck appartenne al gruppo di scettici fino alla sua morte. Einstein, de Broglie e Schrödinger non hanno smesso di sottolineare l'insoddisfazione per l'interpretazione statistica della meccanica quantistica, esigendo un ritorno ai concetti della fisica classica newtoniana e suggerendo vie perché ciò potesse essere fatto senza contraddizione con i fatti sperimentali [19]. Non si possono lasciare inascoltate voci così importanti. Niels Bohr si è molto adoperato per confutare le obiezioni [20]. Anch'io ci ho riflettuto e credo di poter dare

---

(cui poi si aggiungeranno presto la Francia e la Repubblica Popolare Cinese) e si venne a stabilire un clima di "guerra fredda". Fu quindi necessario creare un'organizzazione internazionale, l'IAEA (International Atomic Energy Agency), con sede nella neutrale Vienna, che compiesse controlli periodici per la salvaguardia internazionale e la tutela dell'uso pacifico dell'energia nucleare. Sempre con l'egida dell'Organizzazione delle Nazioni Unite fu tenuta nel 1955 a Ginevra la prima Conferenza sugli Usi Pacifici dell'Energia Atomica, reiterata nel 1958.

[18] In quegli anni si andava scoprendo un numero via via crescente di cosiddette particelle elementari, che non si riuscivano a classificare in uno schema unificante, così come a cavallo tra il XIX e il XX secolo si accumulavano i problematici dati della spettroscopia atomica. In particolare, dopo i mesoni μ e π, si erano scoperti i mesoni K, il cui comportamento "strano" sappiamo ora essere legato al loro componente quark s, portatore di $s$tranezza.

[19] Einstein fu il primo a utilizzare la nuova idea sul quanto d'azione di Planck nella spiegazione dell'effetto fotoelettrico e stimolò con le sue riflessioni, talora costruttive, talora critiche, tutto lo sviluppo della meccanica quantistica.
A. Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt, loc. cit.*
Louis-Victor de Broglie (1892–1987) nel corso degli studi per la sua tesi di dottorato, discussa il 25 novembre 1924, aveva proposto di applicare, in modo duale, le stesse considerazioni che Einstein aveva utilizzato per la radiazione elettromagnetica: come può essere associato un comportamento corpuscolare alle onde di luce, così si può ipotizzare un comportamento ondulatorio per particelle come gli elettroni. Cfr. in questa collana il Quaderno *Le onde di de Broglie*.
Il nuovo elettromagnetismo, auspicato da de Broglie, fu formulato da Erwin Schrödinger (1887–1961) che tra il gennaio e il giugno 1926 scrisse quattro lavori con lo stesso titolo, in cui sviluppava la nuova meccanica ondulatoria sulla base dell'equazione che porta il suo nome.
E. Schrödinger: *Quantisierung als Eigenwertproblem [Quantizzazione come problema agli autovalori]*, Annalen der Physik **79** (1926) 361–376, 489–527; **80** (1926) 437–490; **81** (1926) 109–139.

[20] Fin dal Quinto Congresso Solvay, tenutosi a Bruxelles dal 24 al 29 ottobre 1927, le discussioni sull'interpretazione corretta della nuova meccanica furono molto accese; in particolare, Einstein non si rassegnava all'idea di dover abbandonare il determinismo classico in favore dell'interpretazione statistica che ormai dominava il mondo dei fisici per merito della scuola di Copenhagen, sorta intorno a Niels Bohr. Le discussioni tra Einstein e Bohr continuarono per altri vent'anni, senza che Einstein si rassegnasse alla rinuncia del determinismo in fisica. Un riassunto di questo dialogo a distanza di Bohr con Einstein, dal titolo *Discussion*

un contributo alla chiarificazione della situazione dei fatti. Si tratta qui del confine tra fisica e filosofia, per cui la mia conferenza di fisica avrà un colore in parte storico e in parte filosofico, cosa per cui chiedo la vostra indulgenza.

Innanzi tutto voglio raccontare l'origine della meccanica quantistica e della sua interpretazione statistica. All'inizio degli anni venti ogni fisico era ben convinto che l'ipotesi dei quanti di Planck fosse giusta; secondo questa ipotesi nei processi vibratori di una determinata frequenza ν (come per esempio nelle onde di luce) l'*energia* interveniene con quanti finiti di grandezza $h\nu$. Innumerevoli esperimenti si lasciavano spiegare così e fornivano sempre lo stesso valore della costante di Planck h. Oltre a ciò c'era anche l'affermazione di Einstein che ai quanti di luce compete un *impulso* di grandezza $h\nu/c$ (dove c è la velocità della luce), sperimentalmente ben giustificato (per esempio mediante l'effetto Compton [21]). Ciò significava la resurrezione della teoria corpuscolare della luce per un certo complesso di fenomeni. Per altri processi era adatta la teoria ondulatoria. I fisici si erano abituati a questa *dualità* e imparavano in certo qual modo a maneggiarla.

Nel 1913 Niels Bohr aveva risolto l'enigma delle *linee spettrali* applicando la teoria dei quanti e allo stesso tempo con questa spiegò a grandi linee la meravigliosa stabilità degli atomi, la struttura della loro corteccia elettronica e il sistema periodico degli elementi [22]. L'ipotesi più importante del suo insegnamento per quello che doveva seguire era la seguente: un sistema atomico non può esistere in tutti gli stati possibili secondo la meccanica, che costituiscono un continuo, bensì in una successione di stati "stazionari" discreti; nella transizione da uno all'altro la *differenza di energia* $E_m - E_n$ (a seconda che E_m sia maggiore o minore di E_n) viene emessa o assorbita sotto forma di *quanto di luce* $h\nu_{mn}$. Questa è un'interpretazione energetica della legge fondamentale spettroscopica scoperta alcuni anni prima da W. Ritz [23].

---

with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics, si trova riportato da Jagdish Mehra: *The Solvay Conferences on Physics. Aspects of the development of physics since 1911*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht (Olanda), 1975, p. 153–179. Esso è riprodotto dal contributo di Bohr al libro pubblicato in onore dei settanta anni di Einstein: *Albert Einstein: Philosopher–Scientist*, The Library of Living Philosophers, Tudor Publishing Company, 1949; Harper & Row, New York, 1959.

[21] Arthur Holly Compton (1892–1962) era riuscito a interpretare i risultati da lui ottenuti sulla variazione di lunghezza d'onda subita dai raggi X diffusi dagli elettroni atomici attribuendo un impulso, oltre che un'energia, ai fotoni di Einstein.
A.H. Compton: *A quantum theory of scattering of X-rays by light elements [Teoria quantistica della diffusione di raggi X da parte di elementi leggeri]*, Physical Review **21** (1923) 483–502.

[22] Il giovane Bohr dal marzo all'agosto 1912 fu a Manchester per lavorare alla sua tesi di dottorato nel laboratorio di Ernest Rutherford of Nelson (1871–1937), per poi tornare in settembre a Copenhagen. Durante questi mesi maturò l'idea che lo portò alla formulazione del nuovo modello atomico.
N. Bohr: *On the constitution of atoms and molecules, loc. cit.*

[23] A Walter Ritz (1878–1909) si deve un criterio di classificazione delle righe spettrali, noto come *principio di combinazione delle linee spettrali* e riassumibile nella formula

Si può illustrare la situazione scrivendo due volte i livelli energetici degli stati stazionari, orizzontalmente e verticalmente; allora si produce uno schema quadrato

$$\begin{array}{c|cccc} & E_1 & E_2 & E_3 & \dots \\ \hline E_1 & 11 & 12 & 13 & - \\ E_2 & 21 & 22 & 23 & - \\ E_3 & 31 & 32 & 33 & - \\ \vdots & - & - & - & - \end{array}$$

in cui gli elementi diagonali corrispondono agli stati e quelli non diagonali alle transizioni.

A Bohr era completamente chiaro che la legge così formulata è in contraddizione con la meccanica e che perciò davvero fosse problematica la stessa applicazione del concetto di energia in questo contesto. Egli basò l'audace fusione del vecchio col nuovo sul suo *principio di corrispondenza*. Questo consiste nel requisito ovvio che, nel limite in cui i numeri degli stati stazionari, i cosiddetti numeri quantici, diventano molto grandi (cioè molto a destra e in basso nello schema precedente) e l'energia varia da posto a posto relativamente di poco, e quindi in pratica in modo continuo, allora debba valere con un alto grado di approssimazione l'usuale meccanica classica [24].

Di queste idee la fisica teorica è vissuta nei successivi dieci anni. Il problema era il seguente: una vibrazione armonica non ha solo una *frequenza*, ma anche un'*intensità*. Ad ogni transizione dello schema ce ne deve essere una corrispondente; come può essere trovata con considerazioni basate sul principio di corrispondenza? Si trattava di indovinare l'ignoto dalla conoscenza di un

---

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione e m e n sono numeri interi positivi; la costante R_∞ è la cosiddetta costante di Rydberg. Tale formula fece ordine finalmente nella gran messe di dati che gli spettroscopisti avevano accumulato.

W. Ritz: *Über ein neues Gesetz der Serienspektren [Una nuova legge degli spettri a righe]*, Physikalische Zeitschrift **9** (1908) 521–529; *On a law of series spectra [Una legge degli spettri a righe]*, Astrophysical Journal **28** (1908) 237–243.

Johannes Robert Rydberg (1854–1919): *Recherches sur la constitution des spectres d'émission des éléments chimiques [Ricerche sulla struttura degli spettri di emissione degli elementi chimici]*, Kungliga Vetenskaps Akademiens Handlingar **23** (1890) n. 11; *On the structure of the line-spectra in the chemical elements [Struttura degli spettri a righe degli elementi chimici]*, Philosophical Magazine **29** (1890) 331–337.

[24] Sebbene implicito fin dai primi lavori di Bohr, il principio di corrispondenza viene enunciato esplicitamente solo nel 1920 come guida fondamentale per una generalizzazione razionale della teoria classica della radiazione.

N. Bohr: *Über die Linienspektren der Elemente [Gli spettri a righe degli elementi]*, Zeitschrift für Physik **2** (1920) 423–464.

caso limite noto. Considerevoli successi furono raggiunti dallo stesso Bohr, da Kramers, Sommerfeld, Epstein e molti altri [25]. Il passo decisivo però venne fatto da Einstein, che mediante una nuova derivazione della formula di Planck per la radiazione ha chiarito che si doveva sostituire il concetto classico di intensità della radiazione col concetto statistico di *probabilità di transizione*: a ogni elemento del nostro schema appartiene (accanto alla frequenza $\nu_{mn} = (E_m - E_n)/h$) una determinata probabilità per la transizione in presenza di emissione o assorbimento di radiazione [26].

Anche noi a Göttingen partecipavamo al tentativo di distillare l'ignota meccanica atomica dai dati sperimentali. La difficoltà logica si acuiva sempre di più. Le ricerche sulla diffusione e la dispersione di luce indicavano che l'idea di Einstein della probabilità di transizione come misura della forza

[25] Hendrik Antoon Kramers (1894–1952) era stato allievo di Bohr e ne aveva applicato il principio di corrispondenza per esempio per lo studio di quello che è noto come effetto Stark quadratico e cioè la modifica delle righe spettrali indotta da un campo elettrico esterno.

H.A. Kramers: *Über den Einfluss eines elektrischen Feldes auf die Feinstruktur der Wasserstofflinien [Influenza del campo elettrico sulla struttura fine delle righe dell'idrogeno]*, Zeitschrift für Physik **3** (1920) 199–223.

Il problema era stato affrontato indipendentemente anche da Sommerfeld sulla base di lavori precedenti di un suo allievo, Paul Sophus Epstein (1883–1966), che utilizzava però come punto di partenza le condizioni di quantizzazione di Bohr–Sommerfeld.

A. Sommerfeld: *Über den Starkeffekt zweiter Ordnung [Sull'effetto Stark del secondo ordine]*, Annalen der Physik **65** (1921) 36–40.

P.S. Epstein: *Zur Theorie des Starkeffekts [Teoria dell'effetto Stark]*, Physikalische Zeitschrift **17** (1916) 148–150; Annalen der Physik **50** (1916) 489–521.

Ma la più brillante applicazione del principio di corrispondenza si ebbe in una serie di lavori, cui partecipò anche John Clarke Slater (1900–1976) sulla teoria della radiazione. L'idea era quella di associare all'atomo una *nuvola* di oscillatori virtuali, ciascuno dei quali è dotato di una delle frequenze che l'atomo può assorbire o emettere. Si poteva così descrivere la dispersione della luce ricorrendo solo a minime correzioni della teoria classica della dispersione: una tuttavia era essenziale e imponeva che l'energia si conservasse solo in media, come risultato di un processo statistico.

H.A. Kramers: *The law of dispersion and Bohr's theory of spectra [La legge di dispersione e la teoria di Bohr sugli spettri]*, Nature **113** (1924) 673–674; *The quantum theory of dispersion [Teoria quantistica della dispersione]*, Nature **114** (1924) 310–311.

N. Bohr, H.A. Kramers e J.C. Slater: *The quantum theory of radiation [Teoria quantistica della radiazione]*, Philosophical Magazine **47** (1924) 785–822.

[26] A. Einstein: *Die Plancksche Theorie der Strahlung, und die Theorie der spezifischen Wärme [La teoria della radiazione di Planck e la teoria dei calori specifici]*, Annalen der Physik **22** (1907) 180–190.

A. Einstein: *Strahlungs-Emission una -Absorption nach der Quantentheorie [Emissione e assorbimento di radiazione secondo la teoria dei quanti]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **18** (1916) 318–323; *Quantentheorie der Strahlung [Teoria quantistica della radiazione]*, Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft, Zürich, **18** (1916) 47–62; *Zur Quantentheorie der Strahlung [Teoria quantistica della radiazione]*, Physikalische Zeitschrift **18** (1917) 121–128.

Einstein aveva distinto l'emissione di radiazione in due contributi: uno spontaneo e uno dovuto allo stimolo della radiazione già presente nello spazio circostante l'atomo eccitato. Inoltre aveva mostrato che i coefficienti di assorbimento e di emissione indotta, che determinano la probabilità di transizione, sono identici quando coinvolgono gli stessi due stati di una vibrazione non andava bene e che non si poteva fare a meno della rappresentazione di un'*ampiezza* della vibrazione collegata a ogni transizione. Devono essere qui menzionati i lavori di Ladenburg (1) [27], Kramers (2) [28], Heisenberg (3) [29], Jordan e di me stesso (4) [30].

L'arte di indovinare le formule giuste che deviano da quelle classiche, ma che a queste si riconducono secondo il principio di corrispondenza, fu portata a notevole perfezione. Un mio lavoro, che, per la prima volta credo, portava nel titolo l'espressione *meccanica quantistica*, contiene una formula molto complicata, ma ancor oggi valida, per la mutua perturbazione di sistemi atomici [31].

Questo periodo trovò improvvisa fine per merito di Heisenberg (5) che a quell'epoca era mio assistente [32]. Egli tagliò il nodo gordiano con un principio filosofico e sostituì il procedimento per congetture con una regola matematica.

---

stazionari dell'atomo.

[27] I riferimenti bibliografici originali, indicati nel testo da numeri entro parentesi, sono riportati in coda al discorso a p. 31.
Il lavoro di Rudolf Walter Ladenburg (1882–1952), con quello successivo insieme con Fritz Reiche (1883–1969), stabilisce una connessione tra la teoria classica della dispersione della luce, come sviluppata da Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), e la teoria statistica dell'emissione e dell'assorbimento di luce proposta da Einstein. Esso aveva già ispirato in parte quello già citato sulla teoria della radiazione di Bohr, Kramers e Slater.
R.H. Ladenburg: *Die quantentheoretische Deutung der Zahl der Dispersionselektronen [Interpretazione del numero di elettroni di dispersione secondo la teoria dei quanti]*, Zeitschrift für Physik **4** (1921) 451–468.
R.H. Ladenburg e F. Reiche: *Absorption, Zerstreuung und Dispersion in der Bohrschen Atomtheorie [Assorbimento, diffusione e dispersione nella teoria atomica di Bohr]*, Die Naturwissenschaften **11** (1923) 584–598.

[28] È il già citato lavoro di H.A. Kramers: *The law of dispersion and Bohr's theory of spectra*.

[29] Si tratta di uno dei primissimi lavori di Heisenberg in cui generalizza con Kramers la teoria della dispersione di luce.
H.A. Kramers e W. Heisenberg: *Über die Streuung von Strahlung durch Atome [Diffusione di luce da parte di atomi]*, Zeitschrift für Physik **31** (1925) 681–708.

[30] L'articolo di Born, ricevuto dalla rivista il 13 giugno 1924, contiene nel titolo per la prima volta, come tra poco lo stesso Born ricorderà, la denominazione di quella che poi sarà la vera meccanica dei fenomeni microscopici. Esso fornisce una dimostrazione della formula di dispersione di Kramers ed è precedente a quello di Kramers e Heisenberg appena citato. Il lavoro di Born con l'allievo Ernst Pascual Jordan (1902-1980) è invece un tentativo di affrontare in modo generale lo studio dei processi aperiodici, ma è anche l'ultimo lavoro della scuola di Göttingen sulla scia delle regole di quantizzazione di Bohr–Sommerfeld.
M. Born: *Über Quantenmechanik [Sulla meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **33** (1924) 379–395.
M. Born e P. Jordan: *Zur Quantentheorie aperiodischer Vörgange [Teoria quantistica dei processi aperiodici]*, Zeitschrift für Physik **33** (1925) 479–505.

[31] Born studia il problema di due elettroni atomici: ispirato dai precedenti lavori di Ladenburg e Reiche (cfr. n. 27) e di Kramers (cfr. n. 25 a p. 17), in cui l'intensità delle linee spettrali veniva collegata con la probabilità di transizione tra due livelli stazionari dell'atomo di Bohr, Born utilizza la teoria classica delle perturbazioni per ricavare una formula in termini di quantità di transizione, che verrà successivamente confermata dalla meccanica quantistica nella formulazione che oggi si insegna.

[32] Nel giugno del 1925, mentre era intento allo studio quantistico dell'oscillatore anarmonico,

Il principio afferma che concetti e rappresentazioni che non corrispondono ad alcuna situazione osservabile fisicamente non debbano essere utilizzati nella descrizione teorica. Egli ha applicato lo stesso principio di Einstein che nella fondazione della sua teoria della relatività aveva eliminato i concetti di velocità assoluta di un corpo e di simultaneità assoluta di due eventi in posti diversi [33]. Heisenberg bandì l'idea di orbita di un elettrone con raggio e periodo di rivoluzione determinati, perché queste quantità non sono osservabili, e cercò di costruire la teoria con l'aiuto di schemi quadrati del tipo menzionato sopra. In luogo di una descrizione del moto in cui si assegna una coordinata $x(t)$ in funzione del tempo, si deve determinare uno schema delle ampiezze di transizione x_{mn}. Come elemento decisivo del suo lavoro mi sembra la richiesta (p. 881) che si debba trovare una regola per trovare da un assegnato schema

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & \dots \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

lo schema dei quadrati

$$\begin{pmatrix} (x)^2_{11} & (x)^2_{12} & \dots \\ (x)^2_{21} & (x)^2_{22} & \dots \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

(o in generale: la *regola di moltiplicazione* per tali schemi).

Mediante l'osservazione di esempi conosciuti, scoperti per congettura, egli trovò questa regola e l'applicò con successo a esempi semplici come l'oscillatore armonico e l'oscillatore anarmonico.

Heisenberg fu colto da un violentissimo attacco di febbre allergica e costretto a prendersi una vacanza di due settimane su un'isola rocciosa e praticamente senza vegetazione, Helgoland, situata nel mare del Nord, al centro dell'omonimo golfo in cui sfocia l'estuario dell'Elba. La vacanza fu tutt'altro che tale: lavorando anche di notte, Heisenberg fondò la nuova teoria dell'atomo.

W. Heisenberg: *Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen [Reinterpretazione di relazioni cinematiche e meccaniche in termini di teoria dei quanti]*, Zeitschrift für Physik **33** (1925) 879-893.

[33] È noto che Einstein, nell'estendere il principio di relatività alla descrizione di tutti i fenomeni fisici, adottò le trasformazioni proposte da Lorentz per collegare la descrizione fatta da due osservatori inerziali. Ciò implica la rinuncia a definire la simultaneità tra eventi che si verificano in luoghi spazialmente distinti e la perdità di significato per la nozione di velocità assoluta, indipendente dall'osservatore.

H.A. Lorentz: *De relatieve beweging van de aarde en den aether [Il moto relativo di terra e etere]*, Verslag van de Koniklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **1** (1892) 74–79.

A. Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper [Elettrodinamica dei corpi in movimento]*, Annalen der Physik **17** (1905) 891–921.

Questo avveniva nell'*estate del 1925*. Heisenberg, molto afflitto da un raffreddore da fieno, prese una vacanza di cura al mare e mi consegnò il suo lavoro per la pubblicazione, nel caso io sapessi mettermi a fare qualche cosa sull'argomento.

Il significato dell'idea mi fu subito chiaro e spedii il manoscritto a *Zeitschrift für Physik* [34]. La regola di moltiplicazione di Heisenberg non mi lasciava alcuna pace, e dopo otto giorni di intenso pensare e provare mi ricordai improvvisamente di una teoria algebrica che avevo imparato in Breslau dal mio maestro, il professor Rosanes [35]. Ai matematici tali schemi quadrati sono ben noti e, in congiunzione con una determinata regola di moltiplicazione, vengono chiamati matrici. Applicai questa regola alle condizioni quantiche di Heisenberg e trovai che queste coincidevano con le quantità che si trovavano sulla diagonale. Era facile indovinare quanto dovessero essere le altre quantità, e cioè zero, e subito mi si presentò la strana formula

$$pq - qp = h/2\pi i.$$

Essa significava che le coordinate q e gli impulsi p non sono da rappresentarsi mediante valori numerici, ma mediante simboli il cui prodotto dipende dall'ordine dei fattori – che, si dice, non commutano.

Il risultato mi eccitò quasi come un navigante che dopo una lunga peregrinazione vede l'agognata terra da lontano, e mi rammaricavo solo che Heisenberg non fosse presente. Ero convinto fin dal primo istante che avevamo azzeccato la strada giusta. E tuttavia una grossa porzione era stata solo congetturata, e cioè l'azzerarsi dei termini non diagonali nell'espressione precedente. Qui ottenni la collaborazione del mio allievo Pascual Jordan [36] e in pochi giorni

---

[34] Il lavoro fu ricevuto dalla rivista il 29 luglio 1925. Nel frattempo Heisenberg, tornato da Helgoland, se ne andò prima a Leiden da Paul Ehrenfest (1880–1933) e poi a Cambridge da Ralph Howard Fowler (1889–1944), genero di Rutherford, dove il 28 luglio 1925 Heisenberg tenne un seminario sull'effetto Zeeman senza accennare al suo recente lavoro. Spedì poi a Fowler una copia delle bozze del suo articolo, che Fowler trasmise al giovane Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) della cui attività di ricerca lui era supervisore. Infine Heisenberg si rilassò in una vera, meritata vacanza fino a metà settembre sulle montagne intorno a Monaco.

[35] Jakob Rosanes (1842–1922), maestro di Born all'Università di Breslau, dove fu anche rettore negli anni 1903–1904, era un esperto di geometria algebrica e diede importanti contributi alla teoria degli invarianti.

[36] Jordan era stato allievo di Richard Courant (1888–1972) a Göttingen e lo aveva aiutato nella redazione del primo volume del testo scritto da Courant con David Hilbert (1862–1943) in cui veniva trattato anche il calcolo matriciale.
R. Courant e D. Hilbert: *Methoden der mathematischen Physik*, Springer, Berlino, 1924; trad. inglese della seconda edizione (1931): *Methods of Mathematical Physics*, Interscience, New York, 1953.
Secondo quanto riferito da Max Jammer (*The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw Hill, New York, 1966, pp. 207–209), durante un viaggio in treno verso Hannover Born raccontava a un collega che Wolfgang Pauli (1900–1958) non aveva accettato la sua idea di un lavoro comune per dare fondamento matematico alla proposta di

riuscimmo a mostrare che la mia congettura era giusta. Il lavoro comune di Jordan con me (6) [37] contiene i principi più importanti della meccanica quantistica, inclusa la loro estensione all'*elettrodinamica*. Seguì un periodo febbrile di lavoro insieme noi tre, reso più difficile dall'assenza di Heisenberg. Ci fu un vivace scambio di lettere, di cui purtroppo la parte mia è andata perduta durante i disordini politici. Il risultato fu il lavoro "dei tre uomini" (7), che portò il lato formale della ricerca a una conclusione definita [38]. Prima della comparsa di questa memoria avvenne la *prima sorpresa drammatica*: il lavoro di Paul Dirac (8) sullo stesso argomento [39]. Da una conferenza di Heisenberg a Cambridge egli aveva ricevuto lo stimolo che lo portò a risultati simili ai nostri di Göttingen, con la differenza che non ricorse alla nota teoria matriciale dei matematici, ma scoprì da solo e sviluppò la teoria di tali simboli non commutanti.

La prima applicazione non banale e fisicamente importante della meccanica quantistica fu presto fatta da W. Pauli (9), che calcolò i valori stazionari di energia dell'*atomo di idrogeno* col metodo delle matrici e trovò un completo accordo con la formula di Bohr. Da questo momento non c'era più alcun dubbio sulla correttezza della teoria [40].

Ma che cosa davvero *significasse* questo formalismo, non era in alcun modo chiaro. Come spesso succede, la matematica era più intelligente del pensiero interpretativo. Mentre ancora discutevamo su ciò venne la *seconda*

Heisenberg; fu allora che Jordan, seduto nello stesso scompartimento, si offrì di collaborare.

[37] M. Born e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik [Meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **34** (1925) 858–888, ricevuto dalla rivista il 27 settembre 1925.

[38] Al rientro dalle vacanze, Heisenberg andò a Copenhagen, dove era stato nominato Lettore di Fisica Teorica, per cui si rese necessario un frenetico scambio epistolare per mantenere i contatti quasi quotidiani e riuscire a scrivere il nuovo lavoro a tre.
M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik II [Meccanica quantistica II]*, Zeitschrift für Physik **35** (1926) 557–615, ricevuto dalla rivista il 16 novembre 1925.

[39] Dirac introdusse l'approccio algebrico agli operatori quantistici e definì il legame tra parentesi di Poisson di due variabili dinamiche classiche e commutatore dei due operatori associati.
P.A.M. Dirac: *The fundamental equations of quantum mechanics [Le equazioni fondamentali della meccanica quantistica]*, Proceedings of the Royal Society of London **A109** (1925) 642–653, ricevuto dalla rivista il 7 novembre 1925.

[40] Pauli riuscì a determinare lo spettro dell'atomo di idrogeno con la meccanica delle matrici. Fu proprio il successo di questa sua laboriosa fatica, unito all'analoga trattazione fatta contemporaneamente dallo stesso Dirac, che sancì la validità della formulazione di Göttingen.
W. Pauli: *Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neueren Quantenmechanik [Lo spettro dell'idrogeno dal punto di vista della nuova meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **36** (1926) 336–363.
P.A.M. Dirac: *Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom [Meccanica quantistica e un'indagine preliminare dell'atomo di idrogeno]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 110** (1926) 561–579.

sorpresa drammatica: la comparsa dei famosi lavori di Schrödinger (10) [41]. Egli procedeva da un modo di pensare completamente diverso, derivato da de Broglie (11) [42]. Questi, alcuni anni prima, aveva proposto l'audace ipotesi e sostenuto con considerazioni teoriche brillanti che la dualità onda–corpuscolo, che nel caso della luce era familiare presso i fisici, dovesse valere anche per gli elettroni; a ogni elettrone in moto libero apparterrebbe un'onda piana di una lunghezza d'onda ben definita, determinata dalla costante di Planck e dalla massa. A noi di Göttingen questa tesi inquietante di de Broglie era ben nota. Un giorno (1925) ricevetti da Davisson una lettera con gli strani risultati sulla riflessione di elettroni da parte di superfici metalliche [43]. Il mio collega sperimentale James Franck [44] ed io sospettammo subito che queste curve di Davisson fossero spettri dei reticoli cristallini dovuti alle onde degli elettroni di de Broglie e incaricammo un nostro allievo, Elsasser (12), di studiare la cosa. Il suo risultato portò la prima conferma provvisoria dell'idea di de Broglie [45], che poi più tardi fu fornita con esperimenti sistematici da Davisson e Germer (13) [46] e da G.P. Thomson (14) [47]. Ma questa familiarità con il modo di pensare di de

[41] Si tratta dei quattro citati lavori sulla quantizzazione come problema agli autovalori, il primo dei quali fu ricevuto dalla rivista il 27 gennaio 1926. V. anche p.es. in questa collana il Quaderno *La meccanica delle onde*.

[42] Il lavoro citato raccoglie la tesi di dottorato di de Broglie.
L. de Broglie: *Recherches sur la théorie des quanta [Ricerche sulla teoria dei quanti]*, Annales de Physique **3** (1925) 22–128.

[43] Nel laboratorio di Clinton Joseph Davisson (1881–1958) nel corso di studi sull'emissione secondaria di elettroni da parte di elettrodi metallici posti in un tubo a vuoto, per l'esplosione di una bottiglia di aria liquida si ruppe un tubo con elettrodo di nichel policristallino che, a contatto con l'aria, si ossidò. Il trattamento termico dell'elettrodo di nichel, resosi necessario per ripristinarne il grado di purezza originario, produsse una ricristallizzazione del metallo in grossi grani cristallini. La successiva esposizione dell'elettrodo al fascio di elettroni, fornì una distribuzione angolare degli elettroni secondari completamente diversa da prima dell'incidente.

[44] James Franck (1882–1964) era stato chiamato a Göttingen nel 1921, insieme con Born, l'uno responsabile delle ricerche sperimentali e l'altro di quelle teoriche.

[45] Fu merito probabilmente dei risultati di Walter Elsasser (1904–1987) che le idee di de Broglie trovarono credito nel mondo anglosassone e che alla fine lo portarono a ricevere il premio Nobel per la Fisica nel 1929.
W. Elsasser: *Bemerkungen zur Quantenmechanik freier Elektronen [Osservazioni sulla meccanica quantistica di elettroni liberi]*, Die Naturwissenschaften **13** (1925) 711.

[46] Dopo la congettura di Elsasser, Davisson con Lester Halbert Germer (1896–1971) riuscì a dare dimostrazione sperimentale all'ipotesi di un comportamento ondulatorio degli elettroni.
C.J. Davisson e L.H. Germer: *Diffraction of electrons by a crystal of nickel [Diffrazione di elettroni da parte di un cristallo di nichel]*, Physical Review **30** (1927) 705–740.

[47] George Paget Thomson (1892–1975) era figlio di Joseph John Thomson (1856–1940), che aveva ricevuto il premio Nobel per la Fisica nel 1906 per avere dimostrato la natura corpuscolare dei raggi catodici (elettroni); a sua volta G.P. Thomson fu insignito del premio Nobel per la Fisica del 1937 insieme con C.J. Davisson per avere dimostrato la natura ondulatoria dell'elettrone.
G.P. Thomson e Andrew Reid: *Diffraction of cathode rays by a thin film [Diffrazione di raggi catodici da parte di una pellicola sottile]*, Nature **119** (1927) 820.

Broglie non ci fece progredire verso un'applicazione alla struttura elettronica degli atomi. Ciò rimase riservato a Schrödinger. Egli estese al caso dell'azione di forze l'equazione d'onda di de Broglie, che si riferiva a moti in assenza di forze, e diede una formulazione esatta delle *condizioni ausiliarie*, già indicate da de Broglie, cui si deve assoggettare la funzione d'onda ψ, e cioè univocità e finitezza nello spazio e nel tempo. Egli riuscì a derivare gli stati stazionari dell'atomo di idrogeno come soluzioni monocromatiche della sua equazione d'onda che non si estendono fino all'infinito.

Per un breve periodo, all'inizio del 1926, sembrava che, improvvisamente, ci fossero due sistemi di spiegazione chiusi, ma completamente diversi, la meccanica delle matrici e la meccanica ondulatoria. Ma Schrödinger stesso dimostrò la loro totale equivalenza [48].

La meccanica ondulatoria ha goduto di una più ampia popolarità della forma di Göttingen e di Cambridge della meccanica quantistica. Essa operava con una funzione d'onda ψ che, almeno nel caso di *una* particella, poteva essere rappresentata nello spazio in modo evidente e utilizzava i metodi delle equazioni differenziali alle derivate parziali che sono familiari a ogni fisico. Schrödinger credeva ancora che la sua teoria ondulatoria permettesse un ritorno alla fisica classica deterministica; egli propose (e ha recentemente rinnovato questa proposta (15) con vigore [49]) di abbandonare completamente la rappresentazione particellare e di parlare, invece di elettroni come particelle, di una distribuzione di densità continua $|\psi|^2$ (o di una densità elettrica $e|\psi|^2$).

G.P. Thomson: *Experiments on the Diffraction of Cathode Rays [Esperimenti sulla diffrazione di raggi catodici],* Proceedings of the Royal Society of London **117** (1928) 600–609.

[48] Tale dimostrazione si inserisce tra la seconda e la terza comunicazione della serie di quattro in cui Schrödinger sviluppa la *sua* meccanica ed è stato ricevuto dalla rivista il 18 marzo e pubblicato il 4 maggio 1926.
E. Schrödinger: *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen [Relazione della meccanica quantistica di Heisenberg-Born-Jordan con la mia],* Annalen der Physik **79** (1926) 734–756.
Ma Born era certamente a conoscenza dell'equivalenza tra i due approcci anche grazie a una lettera che Pauli, trasferitosi da Göttingen ad Amburgo, scrisse a Pascual Jordan il 12 aprile 1926. In essa Pauli, riferendosi al secondo articolo di Schrödinger, dice a Jordan: "penso che questo articolo sia da contarsi tra i più significativi scritti negli ultimi tempi. Lo legga con cura e devozione". Inoltre conclude con la preghiera di mostrare la lettera a Born, qualora fosse già tornato dall'America. La lettera è riportata in originale tedesco e in traduzione inglese da B.L. van der Waerden: *From Matrix Mechanics and Wave Mechanics to Unified Quantum Mechanics [Dalla meccanica delle matrici e dalla meccanica ondulatoria alla meccanica quantistica unificata],* in *The Physicist's Conception of Nature,* edito da Jagdish Mehra, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht (1973), pp. 276–293.

[49] E. Schrödinger: *Are there quantum jumps? [Ci sono i salti quantici?],* The British Journal for the Philosophy of Science **3** (1952) 109–123, 233–242.
L'idea di un elettrone che, improvvisamente e arbitrariamente, compie un salto tra livelli atomici stazionari era difficilmente accettabile non solo per Einstein, ma anche per Schrödinger. In questo saggio Schrödinger pensa piuttosto, alla luce del principio di sovrapposizione lineare delle funzioni d'onda, che le transizioni avvengano per un fenomeno di risonanza tra onde e quindi in modo continuo.

Alla luce dei fatti sperimentali a noi di Göttingen questa interpretazione sembrava inaccettabile. A quel tempo era già possibile contare le particelle mediante scintillazione o col contatore di Geiger [50] e fotografare le loro tracce con l'aiuto della camera a nebbia di Wilson [51].

Mi sembrava che non si potesse arrivare a una chiara interpretazione della funzione ψ attraverso la considerazione di elettroni legati. Perciò già alla fine del 1925 mi ero adoperato per estendere il metodo delle matrici, che chiaramente tratta solo processi oscillanti, in modo che fosse applicabile a processi aperiodici. Allora ero ospite del Massachusetts Institute of Technology negli Stati Uniti e vi trovai un eccellente collaboratore in Norbert Wiener [52]. Nel nostro lavoro comune (16) [53] abbiamo sostituito la matrice con l'idea generale di operatore e in questo modo abbiamo reso possibile la descrizione di processi aperiodici. Tuttavia mancammo ancora la giusta strada. Ciò era riservato a Schrödinger e io ripresi subito il suo metodo perché prometteva di portare a un'interpretazione della funzione ψ. Di nuovo c'era un'idea conduttrice di Einstein. Egli aveva cercato di rendere comprensibile la dualità di particelle – dei quanti di luce o fotoni – e di onde interpretando il quadrato dell'ampiezza dell'onda ottica come densità di probabilità di presenza dei fotoni [54]. Questa idea si lasciava trasferire senza ulteriori difficoltà alla funzione ψ: $|\psi|^2$ doveva

---

[50] Hans Wilhelm Geiger (1882–1945) aveva inventato un dispositivo sensibile alle particelle ionizzanti, oggi noto come contatore Geiger, che registra la scarica elettrica provocata dal passaggio della particella carica.
H.W. Geiger: *Über eine einfache Methode zur Zählung von α- und β-Strahlen [Un metodo semplice di conteggio di raggi α e β]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **15** (1913) 534–539.

[51] Si deve allo scozzese Charles Thomson Rees Wilson (1869–1959) l'invenzione di una speciale camera in grado di visualizzare la traccia lasciata da particelle cariche nell'attraversare un gas soprassaturo, grazie ai nuclei di condensazione provocati dalla ionizzazione degli atomi del gas. Questo dispositivo è stato successivamente migliorato con le moderne camere a bolle e ha costituito prezioso strumento d'indagine sulle particelle elementari.
C.T.R. Wilson: *On an expansion apparatus for making visible the tracks of ionising particles in gases and some results obtained by its use [Un dispositivo a espansione per visualizzare le tracce di particelle ionizzanti nei gas e alcuni risultati ottenuti con il suo uso]*, Proceedings of the Royal Society of London **A87** (1912) 277–292.

[52] Le competenze di Norbert Wiener (1894–1964), professore di matematica del MIT, aiutarono Born per dare una veste matematica più elegante all'approccio di Göttingen in termini di operatori. Wiener però non si occupò poi molto di meccanica quantistica: egli è considerato oggi il padre della cibernetica.
N. Wiener: *Cybernetics or control and communication in the animal and the machine*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1948; seconda edizione John Wiley & Sons, New York, 1961.

[53] M. Born e N. Wiener: *A new foundation of the laws of quantization of periodic and aperiodic phenomena [Una nuova fondazione delle leggi di quantizzazione dei fenomeni periodici e non periodici]*, Journal of Mathematics and Physics, Massachusetts Institute of Technology, **5** (1926) 84–98; *Eine neue Formulierung der Quantengesetze für periodische und nicht periodische Vorgänge [Una nuova formulazione per i processi periodici e non periodici]*, Zeitschrift für Physik **36** (1926) 174–187, ricevuto dalla rivista il 5 gennaio 1926.

[54] A. Einstein: *Zur Quantentheorie der Strahlung [Teoria quantistica della radiazione]*, Physikalische Zeitschrift **18** (1917) 121–128.

indicare la densità di probabilità per gli elettroni (o altre particelle). Ciò era facile da affermarsi. Ma come dimostrarlo?

Per questo scopo si presentavano i processi di collisione atomica: un flusso di elettroni provenienti dall'infinito, rappresentato da un'onda incidente di nota intensità (cioè $|\psi|^2$), colpisce un ostacolo, diciamo un atomo pesante. Esattamente come l'onda d'acqua sollevata da una nave a vapore eccita onde sferiche secondarie in corrispondenza di un palo, a causa dell'atomo l'onda incidente dell'elettrone si trasforma in parte in un'onda sferica secondaria, la cui ampiezza di vibrazione ψ varia nelle diverse direzioni. Il quadrato dell'ampiezza di questa onda sferica a grandi distanze dal centro diffusore determina allora la probabilità relativa della diffusione in dipendenza dalla direzione. Quando inoltre l'atomo diffusore stesso può trovarsi in diversi stati stazionari, si ottiene automaticamente dall'equazione d'onda di Schrödinger anche la probabilità di eccitazione di questi stati, mentre l'elettrone viene diffuso anelasticamente, come si dice, con perdita di energia. In questo modo poterono trovare fondamento teorico le assunzioni della teoria di Bohr, per la prima volta confermate sperimentalmente da Franck e Hertz (17) [55]. Inoltre Wentzel (18) riuscì subito a derivare dalla mia teoria la famosa formula della diffusione di Rutherford [56].

Più di questo successo contribuì alla rapida accettazione dell'interpretazione statistica della funzione ψ un lavoro di Heisenberg (19) [57] che contiene

[55] James Franck e Gustav Ludwig Hertz (1887–1975, nipote di Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894), scopritore delle onde elettromagnetiche) ricevettero nel 1926 il premio Nobel per la Fisica del 1925 per aver dimostrato l'esistenza dei livelli energetici negli atomi.
J. Franck e G.L. Hertz: *Über Zusammenstösse zwischen langsamen Elektronen und Gasmolekülen [Collisioni tra elettroni lenti e molecole di gas]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **15** (1913) 373–390, 613–620; *Über Zusammenstösse zwischen langsamen Elektronen und den Molekülen des Quecksilberdampfes und die Ionisierungsspannung desselben [Collisioni tra elettroni lenti e molecole del vapore di mercurio e tensione di ionizzazione dello stesso]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **16** (1914) 457–467.
I lavori che Born cita qui sono i suoi due lavori in cui viene per la prima volta proposta l'interpretazione statistica della meccanica quantistica alla luce della teoria dei processi d'urto che lui costruisce nell'ambito della formulazione di Schrödinger e che vengono proposti in questo Quaderno.
M. Born: *Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, Zeitschrift für Physik **36** (1926) 863–867; *Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, Zeitschrift für Physik **38** (1926) 803–827.

[56] Gregor Wentzel (1898–1978), utilizzando l'approssimazione di Born, aveva spiegato la dipendenza dal numero atomico dell'effetto fotoelettrico e la formula classica di Rutherford per la diffusione elastica di particelle cariche.
G. Wentzel: *Zur Theorie des photoelektrischen Effekts [Teoria dell'effetto fotoelettrico]*, Zeitschrift für Physik **40** (1926) 574–589; *Zwei Bemerkungen über die Zerstreuung korpuskularer Strahlen als Beugungserscheinung [Due osservazini sulla diffusione di raggi corpuscolari come fenomeno di diffrazione]*, Zeitschrift für Physik **40** (1926) 590–593.

[57] È il fondamentale lavoro in cui viene enunciato il principio di indeterminazione. Cfr. in questa collana il Quaderno *Il principio di indeterminazione*.
W. Heisenberg: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und*

le sue relazioni di indeterminazione. Solo allora divenne chiaro il carattere rivoluzionario della nuova concezione. Esso mostrava che non si doveva rinunciare solo al determinismo della fisica classica, ma anche all'idea ingenua di realtà che considerava le particelle della fisica atomica come se fossero minuscoli granellini di sabbia. Un granellino di sabbia ha in ogni istante una determinata posizione e velocità. Per un elettrone questo non è il caso; se si rende sempre più precisa la determinazione della posizione, la possibilità di determinare la velocità peggiora sempre, e viceversa. Tornerò brevemente su questi problemi in un contesto più generale, ma prima vorrei ancora dire un paio di parole sulla teoria dell'urto.

Le approssimazioni matematiche da me utilizzate erano molto primitive e furono presto migliorate. Della letteratura cresciuta in modo incontrollabile vorrei solo nominare alcuni dei primi autori cui la teoria deve grossi progressi: Faxén in Svezia e Holtsmark in Norvegia (20) [58], Bethe in Germania (21) [59], Mott e Massey in Inghilterra (22) [60].

Mechanik [Il contenuto intuitivo della cinematica e della meccanica nella teoria quantistica], Zeitschrift für Physik **43** (1927) 172–198.

[58] Karl Ramsauer (1879–1955) nel 1921 aveva notato che nell'urto elastico di elettroni da atomi di gas inerti, come Ar, Kr, Xe, praticamente non si aveva riflessione in corrispondenza di un'energia di 0.7 eV degli elettroni incidenti. Ciò può essere collegato alla profondità e alla larghezza della buca di potenziale che rappresenta l'interazione tra elettroni incidenti e atomi bersaglio.
K. Ramsauer: *Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen [Sezione d'urto di molecole di gas sottoposte a elettroni lenti]*, Annalen der Physik **64** (1921) 513–540; **66** (1921) 546–558; **72** (1923) 345–352.
Faxén e Holtsmark spiegavano l'effetto Ramsauer utilizzando l'equazione di Schrödinger e la teoria dei processi d'urto sviluppata appunto da Born.
H. Faxén e J. Holtsmark: *Beitrag zur Theorie des Durchganges langsamer Elektronen durch Gase [Contributo alla teoria dell'attraversamento di gas da parte di elettroni lenti]*, Zeitschrift für Physik **45** (1927) 307–324.

[59] Hans Albrecht Bethe (n. 1906) è stato insignito del premio Nobel per la Fisica nel 1967 per il suo contributo alla teoria delle reazioni nucleari e in particolare per la scoperta dei meccanismi di produzione energetica delle stelle: il ciclo di Bethe è uno dei meccanismi di alimentazione del sole e delle altre stelle calde a partire dalla fusione di nuclei di idrogeno con produzione finale di elio. Ma i suoi contributi si estendono anche alla fisica dei molti corpi e al problema a due corpi relativistico, con la proposta di quella che è nota come equazione di Bethe–Salpeter, ottenuta insieme con Edwin Ernest Salpeter (n. 1924).
H.A. Bethe: *Zur Theorie der Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie [Teoria dell'attraversamento della materia da parte di raggi corpuscolari veloci*, Annalen der Physik **5** (1930) 325.
E.E. Salpeter e H.A. Bethe: *A Relativistic Equation for Bound–State Problems [Un'equazione relativistica per problemi di stati legati]*, Physical Review **84** (1951) 1232–1242.
E.E. Salpeter e H.A. Bethe: *Quantum Mechanics of One– and Two–Electron Atoms*, Springer, Berlino, 1957, dedicato alla memoria di Arnold Sommerfeld.

[60] Sir Neville Francis Mott (n. 1905) aveva adottato l'approssimazione di Born per dedurre la formula, che porta il suo nome, per la sezione d'urto di diffusione elastica da un potenziale coulombiano da parte di una particella carica dotata di spin. Mott condivise il premio Nobel per la Fisica del 1977 insieme con Philip Warren Anderson (n. 1923) e John Hasbrouck Van Vleck (1899–1980) per gli studi teorici sulla struttura elettronica e sulle proprietà magnetiche di un sistema disordinato.

Oggi la teoria dell'urto è una scienza particolare con propri libri di testo voluminosi, che è cresciuta totalmente sopra la mia testa. Alla fine appartengono a questo ambito di idee anche tutte le branche moderne della fisica, l'elettrodinamica quantistica, la teoria dei mesoni, dei nuclei, dei raggi cosmici, delle particelle elementari e delle loro trasformazioni, ed entrare nel merito di questo ci porterebbe in un territorio sterminato [61].

Vorrei ancora menzionare che negli anni 1926/27 percorsi anche un'altra strada per sostenere l'interpretazione statistica della meccanica quantistica, in parte in collaborazione col fisico russo Fock (23) [62]. Nel lavoro "dei tre uomini" sopra citato c'è un capitolo in cui davvero è già anticipata la funzione di Schrödinger, solo che non è concepita come una funzione spaziale $\psi(x)$, ma come funzione ψ_n dell'indice discreto $n = 1, 2, \ldots$ che numera gli stati stazionari. Quando il sistema considerato subisce una forza variabile nel tempo, allora anche ψ_n viene a dipendere dal tempo, e $|\psi_n(t)|^2$ indica la probabilità per la presenza dello stato n all'istante t. Partendo da una distribuzione iniziale in cui c'è solo uno stato, si ottengono così le probabilità di transizione e si può studiarne le proprietà. In particolare allora mi interessava

---

N.F. Mott: *The Scattering of Fast Electrons by Atomic Nuclei [La diffusione di elettroni veloci da parte di nuclei atomici]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 124** (1929) 425–442; *The Quantum Theory of Electronic Scattering by Helium [La teoria quantistica della diffusione elettronica da parte dell'elio]*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **25** (1929) 304–309; *The collision between two electrons [L'urto di due elettroni]*, Proceedings of the Royal Society of London **A126** (1930) 259–267.

[61] Per una rassegna degli esperimenti sulla diffusione atomica e la loro interpretazione è ancora oggi fondamentale il testo scritto da Mott con Harrie Stewart Wilson Massey (n. 1908): *The Theory of Atomic Collisions*, Oxford at the Clarendon Press, 1933, e successive edizioni.
Si veda inoltre l'opera enciclopedica curata dallo stesso Massey sui fenomeni d'impatto elettronico e ionico.
H.S.W. Massey e E.H.S.Burhop: *Electronic and Ionic Impact Phenomena*, The Clarendon Press, Oxford, 1952; H.S.W. Massey, E.H.S.Burhop e H.B. Gildbody: *Electronic and Ionic Impact Phenomena*, The Clarendon Press, Oxford, seconda edizione in 5 voll., 1969–1974.
Gli autori testé citati da Born hanno davvero contribuito in modo fondamentale a rendere utile e applicabile nei più diversi contesti la teoria della diffusione, che è alla base di ogni indagine fisica. Il lungo elenco con la sottolineatura delle nazionalità degli autori soddisfa anche il neo-laureato Nobel per avere avviato una nuova scienza che si è sviluppata poi col contributo di tutto il mondo scientifico.

[62] Vladimir Alexsandrovich Fock (1898–1974), di Leningrado (l'antica e odierna S. Pietroburgo), ma a quell'epoca a Göttingen, svolse una preziosa opera di collegamento col mondo scientifico russo, che dal 1917 era rimasto tagliato fuori da ogni legame con l'occidente e non aveva partecipato allo sviluppo di idee che avviò la nuova fisica. Nei lavori citati viene data una dimostrazione del principio adiabatico anche in meccanica quantistica: il principio, proposto da Ehrenfest nel 1916 (cfr. n. 2 p. 9), era uno dei principi guida nella costruzione della vecchia teoria dei quanti di Bohr–Sommerfeld. Un elenco della letteratura sul principio adiabatico nella teoria dei quanti viene presentato in appendice al lavoro di Born e Fock.
M. Born: *Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik [Il principio adiabatico nella meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **40** (1926) 167–192; M. Born e V. Fock: *Beweis des Adiabatenprinzip [Dimostrazione del principio adiabatico]*, Zeitschrift für Physik **51** (1928) 165.

che cosa succede nel caso limite cosiddetto adiabatico, cioè quando l'azione esterna varia molto lentamente: si può mostrare che, come c'è da aspettarsi, la probabilità di transizione diventa sempre più piccola. La teoria delle probabilità di transizione è stata sviluppata indipendentemente e resa feconda da Dirac. Si può dire che tutta la fisica atomica e nucleare lavora con questo sistema concettuale, specialmente nella forma assolutamente elegante datagli da Dirac (24) [63]; quasi tutti gli esperimenti portano a enunciazioni su frequenze relative di eventi, anche se intervengono nascoste sotto il nome di sezione d'urto efficace o simili.

Come può avvenire ora che ciò nonostante grandi ricercatori come Einstein, Schrödinger, de Broglie non siano soddisfatti dello stato di cose? In effetti tutte queste obiezioni non sono rivolte contro la correttezza delle formule, ma contro l'interpretazione. Si devono distinguere due punti di vista strettamente intrecciati: il problema del determinismo e il problema della realtà.

La meccanica di Newton è deterministica nel senso seguente. Quando viene assegnato con precisione lo stato iniziale di un sistema (posizione e velocità di tutte le particelle), dalle leggi della meccanica è possibile calcolare lo stato a ogni altro istante (precedente o successivo). Allora tutte le altre branche della fisica classica sono state costruite secondo questo modello. A poco a poco il determinismo meccanico divenne una sorta di articolo di fede: il mondo come una macchina, un automa. Per quanto vedo, non c'è alcun precedente per questa idea nella filosofia antica e medievale; essa è un prodotto dell'immenso successo della meccanica newtoniana, e specialmente dell'astronomia. Nel secolo XIX essa divenne un principio fondamentale filosofico dell'intero dominio delle scienze esatte. Mi sono posto la domanda se ciò è davvero giusto. Si può realmente fare predizioni assolute a ogni istante sulla base delle equazioni di moto classiche? Si vede facilmente con semplici esempi che ciò non è il caso, qualora si assuma la possibilità di misurazioni assolutamente precise (della posizione, della velocità o di altre grandezze). Pensiamo a una particella che viaggia in linea retta senza attrito tra due punti terminali (pareti), dove rimbalza in modo perfettamente elastico. Essa si muove con la velocità iniziale v_0 costante, avanti e indietro, e si può

[63] La notazione dei ket e dei bra inventata da Dirac è certamente più agile delle matrici a infinite dimensioni utilizzate dalla scuola di Göttingen, anche se in fondo del tutto equivalente. L'idea però di assegnare un elemento di un astratto spazio di Hilbert a ogni stato del sistema quantistico ha reso molto più intuitiva la descrizione e ha permesso di utilizzare l'equazione di Schrödinger per determinare l'evoluzione temporale dello stato.
P.A.M. Dirac: *The fundamental equations of quantum mechanics [Le equazioni fondamentali della meccanica quantistica]*, Proceedings of the Royal Society of London **A109** (1925) 642–653; *Quantum mechanics and a preliminary investigation of the hydrogen atom [Meccanica quantistica e un'indagine preliminare dell'atomo di idrogeno], ibid.* **A110** (1926) 561–579; *The elimination of nodes in quantum mechanics [L'eliminazione dei nodi in meccanica quantistica, ibid.* **A111** (1926) 281–305; *On the Theory of Quantum Mechanics [Sulla teoria della meccanica quantistica], ibid.* **A112** (1926) 661–677.

dire con precisione dove si troverà a un certo istante a condizione di conoscere esattamente v_0. Se però si consente una piccola imprecisione Δv_0, allora l'imprecisione della posizione prevista all'istante t è uguale a $t\,\Delta v_0$ e cresce dunque con t. Se si aspetta abbastanza a lungo, fino all'istante $t_c = l/\Delta v_0$, dove l è la distanza tra le pareti elastiche, allora l'imprecisione Δx sarà diventata uguale all'intero segmento. Allora non si può più assolutamente prevedere la posizione a un istante successivo di t_c. Il determinismo perciò si ribalta in un completo indeterminismo qualora si accetti anche la più piccola imprecisione nell'assegnazione della velocità. Ma ha senso, intendo un senso fisico e non metafisico, parlare di dati assoluti? È giustificato dire che la coordinata è $x = \pi$ cm, dove $\pi = 3.1415\ldots$ è il ben noto numero trascendente che determina il rapporto tra la circonferenza del cerchio e il suo diametro? Come strumento matematico l'idea di un numero reale, rappresentato mediante un numero decimale infinito, è assolutamente importante e fruttuosa. Ma come misura di una grandezza fisica è un non-senso. Se si tronca π al ventesimo decimale o al venticinquesimo decimale, si ottengono due numeri che non si possono distinguere tra di loro e dal vero π mediante alcuna misurazione. Secondo il principio euristico utilizzato da Einstein nella teoria della relatività e da Heisenberg nella teoria quantistica, concetti tali da non corrispondere ad alcuna osservazione immaginabile vanno eliminati dalla fisica. Ciò è possibile anche qui senza difficoltà; si devono solo sostituire affermazioni come $x = \pi$ cm con quella che la probabilità della distribuzione di valori per x ha un massimo acuto per $x = \pi$ e (quando si voglia essere più precisi) aggiungere la specificazione della sua larghezza. In breve, si deve formulare in modo statistico anche l'usuale meccanica. Negli ultimi tempi mi sono occupato un po' di questo problema e ho visto che è possibile senza difficoltà [64]. Non è qui il luogo per addentrarsi in questo argomento. Vorrei solo sottolineare che il determinismo della fisica classica si rivela un'illusione, generata dalla sovrastima di modelli matematico-logici. È un idolo, non un ideale della ricerca scientifica, e non può perciò essere utilizzato come obiezione all'interpretazione statistica, in linea di principio indeterministica, della meccanica quantistica.

Molto più difficile è l'obiezione della realtà. Il concetto di particella, per esempio un granellino di sabbia, contiene implicitamente l'idea che si trovi in un certo posto e possieda una certa velocità. Secondo la meccanica quantistica però è impossibile fissare per un elettrone posizione e velocità

[64] Qui Born allude a riflessioni che riporta anche nel suo contributo al libro in onore dei sessanta anni di Heisenberg, ma che non hanno in realtà portato ad alcuna conclusione nuova. Alla base di queste riflessioni c'è il fatto, ben noto, che si può utilizzare l'equazione di Liouville per determinare la densità di probabilità per la distribuzione dei punti rappresentativi di un sistema hamiltoniano nello spazio delle fasi. Certo il problema esiste ed è oggetto di ricerca attuale nello studio dei fenomeni caotici e stocastici.
M. Born: *Bemerkungen zur statistischen Deutung der Quantenmechanik [Osservazioni sull'interpretazione statistica della meccanica quantistica]*, in *Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit*, ed. Fritz Bopp, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1961.

(più precisamente, impulso, cioè massa per velocità) allo stesso istante con arbitraria precisione. Quindi si sollevano due domande. In primo luogo che cosa ci impedisce, nonostante gli enunciati teorici, di misurare entrambe le grandezze in modo arbitrariamente preciso con esperimenti raffinati? E in secondo luogo, se davvero si mette in rilievo che ciò non va, abbiamo allora ancora il diritto di applicare all'elettrone il concetto di particella e le rappresentazioni ad esso associate?

Per quanto riguarda la prima domanda, è chiaro che, se la teoria è giusta – e abbiamo ampi motivi per crederlo – l'ostacolo della misurabilità simultanea di posizione e velocità (e di altre coppie simili di grandezze cosiddette coniugate) deve trovarsi nelle leggi stesse della meccanica quantistica. Questo è in effetti il caso. Ma non è affatto evidente. Niels Bohr (25) stesso si è applicato con grande sforzo e acume per sviluppare una teoria della misurazione che chiarisse questa situazione [65] e tenne testa anche ai più raffinati assalti di Einstein che cercava continuamente di escogitare metodi di misurazione mediante i quali si potessero misurare in modo preciso simultaneamente posizione e velocità. Ne emerge il seguente risultato: per misurare coordinate spaziali e istanti temporali si utilizzano regoli rigidi e orologi. Per contro, per la misura di impulsi e energie si usano dispositivi con parti in movimento che forniscono un segnale assorbendo l'impatto dell'oggetto da misurare. Se si prende in considerazione il fatto che per l'interazione tra oggetto e apparato è competente la meccanica quantistica, si vede che non ci può essere alcun dispositivo in grado di soddisfare insieme entrambi i requisiti. Perciò ci sono esperimenti che si escludono reciprocamente, ma complementari uno all'altro, che solo nel loro complesso abbracciano tutto ciò che si può sperimentare riguardo a un oggetto. Questa idea della *complementarità* viene in generale considerata in fisica come la chiave per una comprensione intuitiva dei processi quantistici. Bohr l'ha anche trasferita ad altri campi in un modo che arricchisce lo spirito, per esempio

---

[65] Bohr si era impegnato a dare un'interpretazione della descrizione dei fenomeni naturali alla luce di un principio di complementarità, in base al quale in ogni esperimento, a seconda del tipo di misurazione, si riesce a mettere in evidenza solo un aspetto (per esempio quello ondulatorio o quello corpuscolare). Questa tesi fu enunciata per la prima volta da Bohr nell'intervento da lui fatto a Como il 16 settembre 1927 durante il Congresso Internazionale dei Fisici che si tenne in occasione delle celebrazioni per il primo centenario della morte di Alessandro Volta (1745–1827).
N. Bohr: *The quantum postulate and the recent development of atomic theory [Il postulato quantistico e il recente sviluppo della teoria atomica],* Atti del Congresso Internazionale dei Fisici (Zanichelli, Bologna, 1928), pp. 565–588.
N. Bohr: *Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik [Il postulato quantistico e il nuovo sviluppo della fisica atomica],* Die Naturwissenschaften **16** (1928) 245–257; *Wirkungsquantum und Naturbeschreibung [Quanto d'azione e descrizione della natura],* Die Naturwissenschaften **17** (1929) 483–486; *Die Atomtheorie und die Prinzipien der Naturbeschreibung [La teoria atomica e i principi della descrizione della natura],* Die Naturwissenschaften **18** (1930) 73–78.
N. Bohr: *Kausalität und Komplementarität [Causalità e complementarità],* Die Erkenntnis (Annalen der Philosophie) **6** (1936) 293–303.

alla relazione tra consapevolezza e cervello, al problema del libero arbitrio e ad altri quesiti filosofici fondamentali. Per venire ora all'ultimo punto: un qualche cosa, che non si lascia collegare nel modo consueto con i concetti di spazio e di moto, può ancora essere chiamato un oggetto, una particella? E se no, che cosa è il reale per la cui descrizione abbiamo inventato le nostre teorie?

La risposta a ciò non è più fisica, ma filosofia, e la sua trattazione dettagliata valicherebbe di molto l'ambito di questa conferenza. Ho espresso con dettaglio la mia opinione su di ciò in altro luogo (26) [66]. Qui voglio solo dire che sottolineo con tutti gli accenti il mantenimento della rappresentazione particellare. Naturalmente bisogna allora definire di nuovo quello che si intende. A questo proposito ci sono concetti ben sviluppati che in matematica sono correntemente indicati sotto il nome di invarianti per trasformazioni. Ogni oggetto che percepiamo ci appare sotto aspetti numerici; il concetto di oggetto è l'invariante di tutti questi aspetti. Da questo punto di vista il sistema concettuale, in cui entrano simultaneamente particelle e onde, usato ora senza eccezioni, si lascia completamente giustificare.

La più recente ricerca sui nuclei e le particelle elementari ci ha però portati a limiti al di là dei quali anche questo sistema concettuale non sembra più sufficiente. Ciò che possiamo imparare dalla storia che vi ho raccontato sulle origini della meccanica quantistica è che un probabile raffinamento dei metodi matematici non basterà per produrre una teoria soddisfacente, ma che da qualche parte nella nostra scienza si nasconde un concetto, non giustificato da alcuna esperienza, che dobbiamo eliminare per conquistare la via libera.

Riferimenti

1. R. Ladenburg, Z. f. Phys. **4** (1921) 451; R. Ladenburg e F. Reiche, Naturw. **11** (1923) 584
2. H.A. Kramers, Nature **113** (1924) 673
3. H.A. Kramers e W. Heisenberg, Z. f. Phys. **31** (1925) 681
4. M. Born, Z. f. Phys. **26** (1924) 379; M. Born e P. Jordan, Z. f. Phys. **33** (1925) 479
5. W. Heisenberg, Z. f. Phys. **33** (1925) 879
6. M. Born e P. Jordan, Z. f. Phys. **34** (1925) 858
7. M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan, Z. f. Phys. **35** (1926) 557
8. P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A 109** (1925) 642
9. W. Pauli, Z. f. Phys. **36** (1926) 336
10. E. Schrödinger, Ann. d. Phys. [4] **79** (1926) 361, 489, 734; **80** (1926) 437; **81** (1926) 109
11. Louis de Broglie, Tesi, Parigi, 1924; Ann. d. Phys. [10] **3** (1925) 22
12. W. Elsasser, Naturwissenschaften **13** (1925) 711

[66] M. Born: *Physical Reality [Realtà fisica]*, Philosophical Quarterly **3** (1953) 139–149; *Physikalische Wirklichkeit [Realtà fisica]*, Physikalische Blätter **10** (1954) 49–61.

13. C.J. Davisson e L.H. Germer, Phys. Rev. **30** (1927) 705
14. G.P. Thompson e A. Reid, Nature **119** (1927) 890; G.P. Thompson, Proc. Roy. Soc. **A 117** (1928) 600
15. E. Schrödinger, Brit. Journ. Phil. Sci. **3** (1952) 109, 233
16. M. Born e N. Wiener, Z. f. Phys. **36** (1926) 174
17. M. Born, Z. f. Phys. **37** (1926) 863; **38** (1926) 803; Gött. Nachr. Math.-Phys. Kl. (1926) 146
18. G. Wentzel, Z. f. Phys. **40** (1926) 590
19. W. Heisenberg, Z. f. Phys. **43** (1927) 172
20. H. Faxén e J. Holtsmark, Z. f. Phys. **45** (1927) 307
21. H. Bethe, Ann. d. Phys. **5** (1930) 325
22. N.F. Mott, Proc. Roy. Soc. **A 124** (1929) 422, 425; Cambr. Phil. Soc. **25** (1929) 304
23. M. Born, Z. f. Phys. **40** (1926) 167; M. Born e V. Fock, Z. f. Phys. **51** (1928) 165
24. P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A 109** (1925) 642; **110** (1926) 561; **111** (1926) 281; **112** (1926) 661
25. Niels Bohr, Naturwissenschaften **16** (1928) 245; **17** (1929) 483; **21** (1933) 13; *Kausalität und Komplementarität*, Die Erkenntnis **6** (1936) 293
26. M. Born, Phil. Quart. **3** (1953) 139; Phys. Blätter **10** (1954) 49

§ 2. Max Born

Max Born nacque a Breslau (Breslavia), l'odierna Wrocław (Polonia), l'undici dicembre 1882 da Gustav e Margarete Kaufmann. Il padre, ebreo, era docente alla Facoltà di Medicina e si interessava di anatomia e di embriologia. La madre apparteneva a una ricca famiglia ebrea di industriali tessili che viveva in una casa adiacente al palazzo reale. Salomon Kaufmann, padre di Margarete, pur non avendo gradito il matrimonio, continuò a ospitare nella sua casa Gustav con i figli Max e Käthe anche dopo la morte di Margarete, avvenuta per un attacco biliare durante la sua terza gravidanza quando Max aveva quattro anni. Costretto in casa per le frequenti bronchiti asmatiche, il piccolo Max poteva così ammirare dalle finestre le parate militari e le cerimonie ufficiali che si svolgevano nella grande corte del palazzo reale al ritmo del passo dell'oca prussiano: uno spettacolo che, lungi dall'affascinarlo, gli si impresse negativamente nella memoria. Affidato alle cure di successive governanti e iscritto a una scuola luterana, ebbe una formazione eterogenea che sviluppò in lui una certa indifferenza alle questioni religiose [67] e in generale uno spirito critico e autonomo, aperto ai problemi sollevati dalle dottrine socialiste, che lo porterà, molti anni dopo, a rifiutare ogni forma di violenza politica e a battersi per il bando delle armi nucleari.

"Troppo istruito e troppo stupido per diventare un buon uomo d'affari", come sosteneva il nonno Salomon, dopo aver frequentato senza soverchio entusiasmo il ginnasio intitolato al re Guglielmo, si iscrisse all'Università con l'idea di studiare ingegneria. Su consiglio del padre, spese il primo anno senza definire ancora la specializzazione: ebbe così modo di seguire i corsi di Rosanes [68] e London [69] che lo appassionarono alla matematica. Fruendo della possibilità concessa dagli studi universitari di allora, frequentò l'Università di Heidelberg nel semestre estivo del 1902 e l'Università di Zurigo nel semestre invernale del 1903 per seguire le lezioni di Leo Königsberger (1837–1921) e di Adolf Hurwitz (1859–1919), rispettivamente, dedicandosi esclusivamente alla

[67] In un libro autobiografico, scritto per i figli e i nipoti (*Mein Leben: Die Erinnerungen des Nobelpreisträgers*, Nymphenburger Verlagshandlung, München, 1975; trad. inglese *My Life: Recollection of a Nobel Laureate*, Taylor & Francis Ltd., London, 1978), Born ricorda la sua incomprensione per lo scalpore prodotto dalla sua recita, di fanciullo ebreo in una classe luterana, del *Pater noster* cattolico insegnatogli dalla governante polacca Valeska.

[68] Cfr. n. 35 a p. 20.

[69] Il matematico Franz London era il padre di Fritz Wolfgang London (1900–1954), che con Walter Heinrich Heitler (1904–1981) riuscirà a dare la spiegazione quantistica della molecola d'idrogeno.

matematica. Nel 1904 andò a Göttingen, dove incontrò Felix Klein (1849–1925), Karl David Tomé Runge (1856–1927), Hermann Minkowski (1862–1909) e David Hilbert (1862–1943) [70]. Con Klein si occupò di teoria dell'elasticità, ma dovette concludere la sua tesi di dottorato con Runge [71] in quanto i suoi rapporti con Klein si guastarono allorché si rifiutò, in un primo momento, di competere per un premio universitario per queste sue ricerche.

Congedato presto dal servizio militare per la solita bronchite asmatica, si reca a Cambridge dall'aprile all'agosto 1907 per sentire le lezioni di Joseph Larmor (1857–1942) e di Joseph John Thomson (1856–1940) [72]. Dopo un breve richiamo alle armi nei corazzieri a Breslau, comincia a lavorare, senza successo, come fisico sperimentale con Otto Lummer (1860–1925) e Ernst Pringsheim (1859–1917) [73]. Affascinato dall'emergente teoria della relatività, segue a Colonia il seminario che Minkowski tiene il 21 settembre 1908 al convegno della Società degli Scienziati e dei Medici e, su suggerimento dello stesso Minkowski, si trasferisce a Göttingen, dove giunge in dicembre per cominciare un lavoro comune; ma Minkowski ha appena il tempo di spiegargli le sue intenzioni prima di soccombere a un attacco di peritonite il 12 gennaio 1909. Born allora prosegue da solo lo studio della massa propria dell'elettrone

[70] L'Università di Göttingen, fondata nel 1734 dall'Elettore di Hannover Georg August come espressione e stimolo della rinascita culturale tedesca e dopo essere stata uno dei centri più attivi dell'illuminismo, fu probabilmente il luogo più importante nella storia della matematica. Nell'arco di un secolo si succedettero alcuni tra i migliori matematici: a cominciare da Karl Friedrich Gauss (1777–1855), che vi arrivò nel 1795, fino a David Hilbert, giunto a Göttingen nel 1895, vi operarono Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833–1872), Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) e Felix Klein. Però a Göttingen Born conobbe anche i fisici Woldemar Voigt (1850–1919) e Johannes Stark (1874–1957), futuro premio Nobel per la Fisica nel 1919 per la scoperta dell'effetto Doppler nei raggi canale e della separazione delle linee spettrali in campo elettrico.

[71] M. Born: *Untersuchungen über Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum unter verschiedenen Grenzbediengungen [Ricerche sulla stabilità della linea elastica nel piano e nello spazio sotto diverse condizioni al contorno]*, Dieterichsche Universität-Buchdruckerei, Göttingen, 1906.

Born si addottorò nel luglio 1906 *magna* (e non *summa*) *cum laude*, anche se ufficialmente la data della cerimonia (avvenuta *in absentia*) è del 14 gennaio 1907, quando Born era già sotto le armi a Berlino per il servizio militare iniziato nei dragoni.

[72] J.J. Thomson aveva appena conseguito il premio Nobel per la Fisica del 1906 per i suoi studi sulla conduzione nei gas che indicavano la natura corpuscolare degli elettroni.

[73] Lummer e Pringsheim avevano fatto studi sistematici sulla radiazione di corpo nero, stabilendo la dipendenza della densità di energia emessa in funzione della frequenza della radiazione e della temperatura della cavità. È a questi risultati che si riferisce Planck quando propone la sua formula nel 1900.

O. Lummer e E. Pringsheim: *Die Strahlung eines "schwarzen Körpers" zwischen* 100^0C *und* 1300^0C *[La radiazione di un "corpo nero" tra* 100^0C *e* 1300^0C*]*, Wiedemannsche Annalen der Physik **63** (1897) 395–410; *Die Verteilung der Energie im Spektrum des schwarzen Körpers [La distribuzione dell'energia nello spettro del corpo nero]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **1** (1899) 23–41.

e la definizione di corpo rigido relativistico [74]. L'opposizione di Klein viene intanto mitigata dagli amici comuni Runge e Hilbert, per cui riesce a conseguire nell'estate 1909 la *Habilitation*, il primo passo per poter accedere alla carriera universitaria.

Affronta il problema della dinamica di un cristallo, basandosi sull'ipotesi che la sua struttura sia quella di un reticolo tridimensionale i cui nodi sono in vibrazione per i moti termici degli atomi, e sviluppa con Theodor von Kármán (1881–1963) una teoria più generale di quella abbozzata da Einstein e Debye nello studio dei calori specifici [75]. La teoria trova immediato riscontro sperimentale attraverso gli studi di diffrazione dei raggi X di Max von Laue [76] e dei Bragg [77] ed è tuttora la base classica per la descrizione quantistica delle proprietà delle sostanze cristalline dedotte a partire dalla loro dinamica atomica.

Ma gli interessi di Born si dividono ancora con gli studi sulla relatività: dall'aprile all'agosto 1912 va a Chicago per tenere un corso di relatività, dietro invito di Michelson [78].

Il 2 agosto 1913 sposa Hedwig (Hedi) Ehrenberg: i suoceri, cattolici e legati alle tradizioni, riescono a convincerlo a farsi battezzare e a sposarsi con una cerimonia religiosa [79]. Dal matrimonio, nel maggio 1914, nasce Irene, il

---

[74] M. Born: *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzip [Teoria dell'elettrone rigido nella cinematica del principio di relatività],* Annalen der Physik **30** (1909) 1–56.

[75] Albert Einstein (1879–1955): *Die Planksche Theorie der Strahlung, und die Theorie der spezifischen Wärme [La teoria della radiazione di Planck e la teoria dei calori specifici],* Annalen der Physik **22** (1907) 180–190.

Petrus Josephus Wilhelmus Debije [Peter Debye] (1884–1966): *Zur Theorie der spezifischen Wärme [Teoria del calore specifico],* Annalen der Physik **39** (1912) 789–839.

In questi due lavori viene utilizzata l'ipotesi di Planck per la radiazione di corpo nero associando l'energia interna di un solido cristallino alle frequenze delle sue vibrazioni reticolari. Born studia il problema in modo generale e completo e pone le basi della moderna teoria delle sostanze solide cristalline.

M. Born e Th. von Kármán: *Über Schwingungen von Raumgittern [Vibrazioni di reticoli spaziali],* Physikalische Zeitschrift **13** (1912) 297–309; *Zur Theorie der spezifischen Wärme [Teoria del calore specifico],* Physikalische Zeitschrift **14** (1913) 15–19; *Über die Verteilung der Eigenschwingungen von Punktgittern [Distribuzione delle vibrazioni proprie di punti reticolari],* Physikalische Zeitschrift **14** (1913) 65–71.

[76] Max Theodor Felix von Laue (1879–1960) fu insignito del premio Nobel per la Fisica del 1914 per la scoperta della diffrazione dei raggi X.

[77] William Henry Bragg (1862–1942) col figlio William Lawrence (1890–1971) ricevette il premio Nobel della Fisica del 1915 per l'analisi delle strutture cristalline coi raggi X.

[78] Albert Abraham Michelson (1852–1931) aveva ricevuto il premio Nobel per la Fisica del 1907 per la famosa serie di esperimenti condotti con Edward Williams Morley (1838–1923) con la (non riuscita) dimostrazione dell'esistenza dell'etere cosmico.

[79] Come ricorda nella sua autobiografia, Born sente tuttavia in sé una coscienza razionale ed ebrea che non rinnega, giustificando l'adesione al rito con il sentimento per Hedi che gli fu sempre vicina per tutta la vita.

cui nome augurale [80] è ispirato dalla deteriorata situazione internazionale, che infatti porta allo scoppio della prima guerra mondiale il successivo 2 agosto.

Su invito di Planck [81], nel marzo 1915 si trasferisce a Berlino, dove entra in amicizia con Albert Einstein [82] e finisce di scrivere il libro sulla dinamica dei cristalli [83]. Nel giugno 1915 la mobilitazione generale lo costringe di nuovo ad arruolarsi: entra in aviazione per un servizio di radiotelegrafia, ma ottiene una riduzione di lavoro per un'altra bronchite asmatica e viene inserito in una commissione per le verifiche dell'artiglieria. Ciò gli permette di continuare a dedicarsi ai suoi studi, che ora sono rivolti anche all'ottica e in particolare al potere rotatorio che le sostanze anisotrope hanno sulla polarizzazione della luce. Tuttavia non trascura lo studio della materia condensata [84].

Nell'inverno del 1919, col trasferimento di von Laue da Francoforte a Berlino, Born viene chiamato come professore straordinario a Francoforte. Sono i tempi duri del dopoguerra, con la crisi sociale ed economica che devasta la Germania: approfittando del fatto che un'eclisse di sole aveva confermato le predizioni della teoria della relatività suscitando un grande interesse nel pubblico [85], Born tiene sul tema tre conferenze a pagamento per finanziare il suo Istituto [86].

---

[80] In greco $\epsilon\grave{\iota}\rho\acute{\eta}\nu\eta$ (= irene) vuole dire *pace*. A lei seguiranno nel novembre 1915 Margarete (Gritli) e nel 1921 Gustav, oggi professore di biologia al King's College di Londra.

[81] Planck era la massima autorità scientifica tedesca: sarà premiato col Nobel per la Fisica del 1918 (assegnato nel 1919) per la scoperta dei quanti di energia.

[82] Cfr. n. 14 a p. 11.

[83] M. Born: *Dynamik der Kristallgitter*, Teubner, Lipsia, 1915.
Born inizia anche la scrittura di una monografia sulla teoria atomica dello stato solido, che apparirà solo alcuni anni dopo: *Atomtheorie des festen Zustandes (Dynamik der Kristallgitter)*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften V/3 (1923) 527–781.

[84] Per interessamento di John Edward Lennard-Jones (1894–1954), un suo lavoro di questo periodo sull'energia dei cristalli ionici gli frutterà una laurea *ad honorem* all'Università di Bristol in occasione dell'inaugurazione del nuovo Laboratorio di Fisica, il 20 ottobre 1927. "È molto più difficile e più importante fare alcune somme banali al momento giusto che partecipare a una rivoluzione filosofica", commenta Born nella sua autobiografia. Il riferimento è duplice: il calcolo dell'energia di un reticolo viene fatto da Born sommando sulle varie coppie di atomi i contributi della loro energia di interazione e rappresenta una semplice applicazione di idee già sviluppate con von Kármán. D'altra parte, con il crollo della Germania imperiale e l'avvento della Germania democratica e socialista, i tempi si erano fatti difficili. Born ne aveva avuto esperienza diretta per esempio quando il rettore e molti professori dell'Università di Berlino erano stati internati: con Einstein, Born si era recato dal consiglio rivoluzionario studentesco per ottenerne la libertà e da lì era giunto fino al primo presidente del Reich, Friedrich Ebert (1871–1925), che però non diede loro retta e li congedò subito.

[85] La spedizione all'isola Principe, nel golfo di Guinea, per l'osservazione dell'eclisse di sole aveva dimostrato l'incurvamento gravitazionale dei raggi solari, in accordo con la teoria della relatività generale formulata nel 1916 da Einstein. La spedizione era guidata dal direttore dell'osservatorio di Cambridge, Arthur Stanley Eddington (1882–1944), un grande divulgatore delle idee di Einstein.

[86] Il problema dei finanziamenti si fa pressante in Germania e Born anche in questo rivela la sua abilità, sfruttando per esempio la casuale conoscenza di un banchiere tedesco ebreo

Nel 1921, grazie all'interessamento di Hilbert, diventa professore ordinario a Göttingen occupando la cattedra lasciata libera da Debye per il suo trasferimento a Zurigo [87]. Con Born viene chiamato anche James Franck (1882–1964), già noto per aver dimostrato l'esistenza dei livelli energetici negli atomi [88]. Born dirige le ricerche teoriche, mentre Franck ha la responsabilità delle ricerche sperimentali. Parallelamente Richard Courant subentra a Felix Klein nella direzione degli studi di matematica. Inizia così a Göttingen un nuovo periodo felice per la ricerca, in cui fisici e matematici lavorano a stretto contatto, e che durerà fino all'avvento del nazismo, quando con decreto del 25 aprile 1933 anche il nome di Born compare nella lista dei professori messi in congedo.

Tra gli assistenti di Born si avvicendano in quegli anni giovani brillanti come Wolfgang Pauli (1900–1958), Werner Heisenberg (1901–1976), Enrst Pascual Jordan (1902–1980), Friedrich Hund (n. 1896), Erich Hückel (1896–1980), Vladimir Alexsandrovich Fock (1898–1974), Lothar Wolfgang Nordheim (n. 1899), Johannes (John) von Neumann (1903–1957), Walther Heinrich Heitler (1904–1981), Léon Rosenfeld (1904–1974), Julius Robert Oppenheimer (1904–1967), Edward Teller (n. 1908), Max Delbrück (1906–1980), Victor Federick Weisskopf (n. 1908) e Maria Göppert-Mayer (1906–1972) [89].

---

emigrato negli Stati Uniti d'America, Henry Goldman.

[87] Debye riceverà il premio Nobel per la Chimica nel 1936 per il contributo alla conoscenza della struttura molecolare mediante diffrazione di raggi X nei gas, metodo che aveva sviluppato con Paul Scherrer (1890–1969) durante i sei anni di permanenza a Göttingen.

[88] A Göttingen le cattedre di fisica erano due e tutte e due libere: una lasciata da Debye e una liberatasi con la morte di Voigt. La presenza a Göttingen di un terzo professore, Richard Wichard Pohl (1884–1976), secondo le autorità accademiche impediva di chiamare più di un nuovo professore. Però Born scoprì negli archivi che la cattedra di Pohl era stata assegnata *ad personam* finché il titolare fosse in vita: perciò riuscì a convincere le autorità a chiamare l'amico Franck. V. anche n. 55 p. 25.

[89] Tra questi, tre riceveranno il premio Nobel per la Fisica: Heisenberg nel 1932 (assegnato nel 1933) per la creazione della meccanica quantistica, Pauli nel 1945 per il suo principio di esclusione, la Göppert-Mayer, che nel 1930 aveva sposato il chimico americano Joseph Mayer, nel 1963 (condiviso con Hans Daniel Jensen (1907–1973) e Eugen Paul Wigner (n. 1902)) per la scoperta della struttura a shell dei nuclei atomici. Ma anche i contributi degli altri non sono trascurabili. Jordan ha dato la corretta veste matematica alle idee di Heisenberg e Born sulla meccanica delle matrici; Hund ha fornito una regola utile per la classificazione degli spettri atomici alla luce della nuova meccanica; il chimico Hückel ha formulato con Debye la teoria delle soluzioni elettrolitiche; Fock è noto per il metodo di approssimazione per la determinazione dell'energia dello stato fondamentale di un sistema di molte particelle; Nordheim si è distinto per una serie di applicazioni che dimostrarono la bontà della meccanica quantistica; von Neumann diede la prima formulazione assiomatica della meccanica quantistica; oltre che col già citato lavoro sulla molecola d'idrogeno, Heitler ha contribuito allo sviluppo dell'elettrodinamica quantistica; Rosenfeld è stato il divulgatore della cosiddetta interpretazione di Copenhagen, scaturita però dalle idee di Born; Oppenheimer, noto per l'approssimazione di Born-Oppenheimer nello studio delle molecole atomiche, fu alla guida del progetto Manhattan per la costruzione della bomba atomica americana, cui partecipò anche Teller; il biologo Delbrück applicò i concetti quantistici allo

In questi anni, sull'onda dei "Bohr-Festspiele", una serie di seminari tenuti a Göttingen da Niels Bohr nel giugno del 1922, preludio all'assegnazione del premio Nobel per il suo modello atomico, Born comincia a interessarsi dei problemi collegati con la teoria degli atomi. È del 1924 il citato articolo [90] sul problema di due elettroni atomici, in cui viene proposto per la prima volta il nome di "meccanica quantistica". Successivamente con Pascual Jordan [91], studia il moto aperiodico [92], utilizzando sempre il concetto di quantità di transizione, e scopre che questa quantità è legata ai quadrati delle ampiezze di vibrazione della teoria classica. Ma solo dopo che Heisenberg gli consegna il suo lavoro sulla reinterpretazione delle relazioni della meccanica classica in termini di quantità non commutanti [93], riesce a trovare la giusta via per la nuova formulazione della meccanica: le quantità non commutanti di Heisenberg altro non erano che le matrici studiate molti anni prima con Rosanes. Con Jordan, che si era offerto di collaborare sul tema [94], scrive la relazione di commutazione tra le matrici corrispondenti alla posizione e all'impulso che è l'elemento caratteristico di tutta la meccanica quantistica. Con l'ulteriore apporto di Heisenberg, la formulazione della meccanica delle matrici viene rapidamente perfezionata [95], prima che Born si trasferisca negli Stati Uniti d'America dove era stato invitato al Massachusetts Institute of Technology per il semestre invernale 1925–26. Qui, oltre a svolgere un ciclo di lezioni sulla nuova fisica atomica [96], Born fruì della competenza matematica di Norbert Wiener (1894–

---

studio della genetica e ai problemi di stabilità dei geni; Weisskopf, oltre che avere avviato la teoria quantistica dei campi in un lavoro con Pauli del 1934, ha dato ampi contributi alla teoria delle reazioni nucleari.

[90] Cfr. n. 30 a p. 18.

[91] Born nella sua autobiografia si ferma a ricordare che lo strano nome di Jordan derivava dal fatto che suo nonno era un soldato spagnolo al seguito di Napoleone, che si era poi trasferito in Germania.

[92] Cfr. n. 30 a p. 18.

[93] Cfr. n. 32 a p. 18.

[94] M. Born e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik [Meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **34** (1925) 858–888, ricevuto dalla rivista il 27 settembre 1925.

[95] M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik II [Meccanica quantistica II]*, Zeitschrift für Physik **35** (1926) 557–615, ricevuto dalla rivista il 16 novembre 1925.

[96] Appena un anno prima, con l'aiuto di Friedrich Hund e con dedica al banchiere Henry Goldman, Born aveva pubblicato le sue lezioni del semestre invernale 1923–24 sulla fisica atomica in quello che riteneva un primo volume con i fondamenti della teoria. In esso i moti elettronici della teoria dei quanti erano descritti col formalismo hamiltoniano imitando i metodi della meccanica celeste. Ma il secondo volume con le applicazioni tarderà ad apparire: con uno spirito totalmente diverso, alla luce della meccanica delle matrici, sarà completato con Jordan e pubblicato solo nel 1930 nella stessa collana di monografie sulla struttura della materia curata da Born e Franck. La sua pubblicazione non incontra il favore dei fisici, e in particolare di Pauli, perché già tutti ormai preferivano risolvere l'equazione di Schrödinger e lavorare con le funzioni d'onda, piuttosto che cimentarsi nei laboriosi calcoli imposti dalla meccanica delle matrici.
M. Born: *Vorlesungen über Atommechanik. Erster Band*, J. Springer, Berlino, 1924.

1964), futuro padre della cibernetica, per dare una formulazione più rigorosa dell'approccio di Göttingen alla fisica atomica [97]. Al suo ritorno a Göttingen dopo un lungo giro negli Stati Uniti, con la visita alle Università di Berkeley, del Wisconsin, di Chicago e della Columbia, e dopo la pubblicazione dei lavori di Schrödinger sulla quantizzazione come problema agli autovalori [98], inizia un periodo di grande fervore scientifico per l'uso della nuova meccanica nella spiegazione dei fenomeni atomici, ma soprattutto si comincia a discutere sull'interpretazione da dare al nuovo formalismo.

"Non appena ebbi digerito i lavori di Schrödinger, vidi la corretta via di approccio [al problema], guidato da un'osservazione di Einstein riguardo al significato dell'intensità della luce (cioè dell'onda elettromagnetica) in termini di fotoni: questa intensità deve rappresentare il numero di fotoni: ma quest'ultimo era naturalmente da intendersi in modo statistico, come media su una certa distribuzione di fotoni. Einstein aveva approfondito la comprensione della natura statistica di questa distribuzione, in particolare le fluttuazioni attorno al valor medio, che sono intimamente collegate con la formula della radiazione di Planck. Queste ricerche mi erano ben note e mi portarono immediatamente a formulare la congettura che l'intensità dell'onda di de Broglie, cioè il (modulo) quadrato della funzione d'onda di Schrödinger, deve essere considerato come una densità di probabilità, che è la probabilità di trovare la particella nell'unità di volume" [99].

Sembra questo il motivo ispiratore della breve comunicazione, e del più lungo lavoro che ne seguì immediatamente nella primavera del 1926, in cui, estendendo ai processi d'urto la trattazione proposta da Schrödinger per gli stati legati, Born pose le basi della moderna teoria dell'urto tra particelle atomiche e riuscì a dare una logica interpretazione della funzione d'onda [100]. Ripresa

---

M. Born e P. Jordan: *Elementare Quantenmechanik (Zweiter Band der Vorlesungen über Atommechanik)*, J. Springer, Berlino, 1930.

Invece le trenta lezioni tenute al M.I.T. comparvero in duplice veste, inglese e tedesca, in quanto Born, che voleva trarre un utile dalla loro pubblicazione, non potè esimersi dal sentirsi onorato dalla proposta di inaugurare una nuova serie di pubblicazioni del M.I.T., ovviamente gratuite.

M. Born: *Problems of Atomic Dynamics*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1926; *Probleme der Atomdynamik. Erster Teil: Die Struktur des Atoms. Zweiter Teil: Die Gittertheorie des festen Zustandes*, J. Springer, Berlino, 1926.

[97] Cfr. n. 53 p. 24.

[98] E. Schrödinger: *Quantisierung als Eigenwertproblem [Quantizzazione come problema agli autovalori]*, Annalen der Physik **79** (1926) 361–376 (ricevuto dalla rivista il 27 gennaio 1926), 489–527 (ricevuto dalla rivista il 23 febbraio 1926); **80** (1926) 437–490 (ricevuto dalla rivista il 10 maggio 1926); **81** (1926) 109–139 (ricevuto dalla rivista il 21 giugno 1926).

[99] M. Born: *My Life: Recollection of a Nobel Laureate, loc. cit.*, p. 232.

[100] M. Born: *Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, Zeitschrift für Physik **36** (1926) 863–867 (ricevuto dalla rivista il 25 giugno 1926); *Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, Zeitschrift für Physik **38** (1926) 803–827 (ricevuto dalla rivista il 21 luglio 1926).

subita da Pauli [101] e sviluppata da Bohr nella sua scuola di Copenhagen, l'interpretazione fu sancita a Como nella giornata del 16 settembre 1927 durante il Congresso Internazionale dei Fisici in onore del centenario della morte di Alessandro Volta [102] e nel successivo Quinto Congresso Solvay di Fisica, che si tenne a Bruxelles dal 24 al 29 ottobre 1927 [103].

Dopo una lunga, forzata vacanza a Selva di Val Gardena in seguito al congedo impostogli [104], nel settembre 1933 su invito di Rutherford si trasferisce a Cambridge nel laboratorio intitolato a Cavendish [105]. L'anno successivo accetta un invito di Raman [106] e trascorre un semestre a Bangalore, in India, dove con la moglie può gustare il fascino della cultura indiana, ma anche vive rapporti scientifici difficili con Raman perché non ne condivide le idee nell'impostare una teoria della dinamica reticolare. Di ritorno a Cambridge, dove la posizione di Lettore non gli rende molto [107], accetta l'invito del vecchio amico Darwin [108]. Rimarrà così all'Università di Edinburgo fino al 1953,

---

[101] W. Pauli: *Über Gasentartung und Paramagnetismus [Gas degenere e paramagnetismo]*, Zeitschrift für Physik **41** (1927) 81–102.

[102] M. Born: *Über die Bedeutung der Stossvorgänge für das Verständnis der Quantenmechanik [Il significato dei processi d'urto per la comprensione della meccanica quantistica]*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Fisici*, Zanichelli, Bologna, 1928, pp. 443–447; N. Bohr: *The quantum postulate and the recent development of atomic theory [Il postulato quantistico e il recente sviluppo della teoria atomica]*, *ibidem*, pp. 565–588.

[103] Per un resoconto sui Congressi Solvay, cfr. Jagdish Mehra: *The Solvay Conferences on Physics. Aspects of the development of physics since 1911*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht (Olanda), 1975.

[104] Fin da ragazzo Born aveva dedicato i periodi di vacanza a lunghi viaggi all'estero, che l'avevano portato spesso in Italia, oltre che per esempio in Grecia e in Turchia.

[105] Il laboratorio era diretto da Rutherford. Premio Nobel per la Chimica nel 1908, grazie ai risultati delle sue esperienze sulla disintegrazione degli elementi e la chimica della sostanze radioattive, e noto per le indagini sulla diffusione di particelle α che hanno portato alla scoperta del nucleo atomico, Rutherford era assistito, per le ricerche sperimentali, da James Chadwick (1891–1974), futuro premio Nobel per la Fisica nel 1935 per la scoperta del neutrone, e dal genero Fowler, che era stato supervisore dell'attività iniziale di fisica teorica del giovane Dirac. Tra Born e Rutherford i legami di amicizia si erano stabiliti l'anno prima, quando Born, come Preside della Facoltà di Scienze, lo aveva invitato per una laurea *honoris causa* dell'Università di Göttingen.

[106] Sir Chandrasekhar Venkata Raman (1883–1970) ricevette il premio Nobel per la Fisica del 1930 per la scoperta fatta due anni prima dell'effetto che porta il suo nome e che consiste nello spostamento delle righe spettrali di una radiazione monocromatica provocata dai moti rotazionali e vibrazionali delle molecole della sostanza illuminata.

[107] Durante il forzato congedo dall'Università di Göttingen che riguardava esclusivamente l'impossibilità di tenere lezioni, lo stipendio gli veniva accreditato in banca, senza però che il danaro fosse trasferibile all'estero. Per integrare lo stipendio di Lettore allora pubblica in inglese il testo di lezioni sulla fisica atomica che in Germania era stato messo al bando e che è stato per molti anni il manuale di fisica quantistica per gli studenti.
M. Born: *Atomic Physics*, Blanckie & Sons Ltd., London, 1935; *Fisica atomica*, trad. italiana della settima edizione a cura di Renzo Cirelli con prefazione di Cleb Wataghin, Boringhieri, Torino, 1968.

[108] Charles Galton Darwin (1887–1962), nipote del naturalista Charles Robert Darwin (1809–1882), era titolare della cattedra di Filosofia Naturale all'Università di Edinburgo. I suoi

anno del suo pensionamento, ottenendo anche la cittadinanza britannica appena prima dello scoppio della seconda guerra mondiale. Ciò gli permetterà di non incorrere nella generale ostilità che i rifugiati tedeschi subirono in Gran Bretagna durante il conflitto.

Anche a Edinburgo è presto circondato da giovani collaboratori [109], ma è anche gravato da un'intensa attività didattica.

Nell'estate del 1941, contrariamente al suo allievo Klaus Fuchs [110], rifiuta l'invito di Peierls a collaborare al progetto inglese per la costruzione della bomba atomica, preferendo dedicarsi come sempre alla ricerca pura [111].

Il tardivo riconoscimento del premio Nobel per la Fisica gli giunge nel 1954, quando, in pensione, ritorna a Göttingen divenendone cittadino onorario [112]: in quell'anno la Fondazione Nobel ripara un altro errore premiando

---

studi sulla diffrazione dei raggi X avevano dimostrato che le discrepanze tra teoria ed esperimento erano legate alla presenza di difetti reticolari nei cristalli.

[109] Uno di essi, Reinhold Fürth, proveniente da Praga, aveva già scoperto una sorta di principio di indeterminazione anche nella descrizione classica del moto browniano, analizzando l'analogia tra l'equazione di Schrödinger e l'equazione di diffusione per la concentrazione in un fluido classico, secondo la quale il prodotto delle incertezze sulla posizione e la velocità delle particelle non può essere inferiore al coefficiente di diffusione.
R. Fürth: *Über einige Beziehungen zwischen klassischer Statistik und Quantenmechanik [Alcune relazioni tra statistica classica e meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **81** (1933) 143–162.
Per un'originale sviluppo delle analogie tra la descrizione stocastica classica e la meccanica quantistica, cfr. in questa collana il Quaderno *I cammini di Feynman*.

[110] Fuchs gli era stato raccomandato da Neville Francis Mott e gli si era presentato come un giovane educato e brillante, anche se un po' chiuso. Nel 1941 si unì al gruppo di scienziati raccolti da Rudolf Ernst Peierls (n. 1907) nel nuovo centro (United Kingdom Atomic Energy Establishment for Research and Energy) di Harwell, vicino a Oxford, dove divenne capo di un dipartimento. Solo più tardi, nel 1949, venne alla luce la sua attività spionistica a favore dell'Unione Sovietica.

[111] Con Herbert S. Green pubblica molti lavori sulla meccanica stastistica dei sistemi condensati, che culminano nel libro: *A General Kinetic Theory of Liquids*, Cambridge University Press, Cambridge, 1949.
Con l'allievo Kun Huang inizia a scrivere una nuova versione del libro sulla dinamica dei reticoli cristallini alla luce della meccanica quantistica, che però riuscirà a finire da solo e con fatica, perché abbandonato da Huang che, da fervente comunista, preferì rientrare a Pechino per partecipare alla costruzione della nuova Repubblica Popolare.
M. Born e K. Huang: *Dynamical Theory of Crystal Lattices*, Clarendon Press, Oxford, 1954.

[112] "Nel 1933, circa sette anni dopo la mia prima pubblicazione sulla trattazione quantistica degli urti, apparve un libro di Mott e Massey, un libro di testo sistematico su questo argomento, in cui, tra diversi metodi, veniva descritta la mia approssimazione con il mio nome attaccato. Ma non c'è alcuna menzione del fatto – neppure nella seconda edizione del 1949 – che l'intera teoria dell'urto e il suo concetto fondamentale, l'interpretazione statistica della funzione di Schrödinger, era stata data nei miei lavori. Penso che questa omissione mi abbia fatto molto male, perché, anche se non sono particolarmente ambizioso, ero molto orgoglioso di questa scoperta, e penso giustamente, in quanto alla fine ottenni il premio Nobel per essa, anche se ventotto anni più tardi" (M. Born: *My Life: Recollection of a Nobel Laureate*, *loc. cit.*, p. 232).
Il testo cui Born si riferisce è il famoso e già citato libro di F.N. Mott e H.S.W. Massey: *The*

con Born anche Walther Wilhelm Georg Bothe (1891–1957), che aveva sviluppato già nel 1925 un metodo di rivelazione di particelle con contatori in coincidenza, di fondamentale utilità nelle ricerche di fisica nucleare [113]. Il premio a Born è motivato per la sua breve, ma intensa attività sulla meccanica delle matrici e per la proposta dell'interpretazione statistica, ma glielo si sarebbe potuto altrettanto legittimamente assegnare sulla base dei suoi studi classici di dinamica reticolare, che risalgono al secondo decennio del secolo, o di quelli sull'ottica [114].

Insignito nel 1948 della medaglia Max Planck da parte della Società Tedesca di Fisica e nel 1959 della Gran Croce al Merito con Stella dell'Ordine del Merito della Repubblica Federale Tedesca, per le sue idee pacifiste firma con Bohr e Hahn [115] il cosiddetto "manifesto di Göttingen", in cui 18 fisici dichiarano di non voler partecipare a ricerche militari in Germania, ed è uno dei fondatori del movimento Pugwash per il disarmo internazionale.

Max Born morì a Göttingen il 5 gennaio 1970. L'epigrafe sulla pietra tombale, dove riposa con la moglie, porta la scritta: $pq - qp = h/2\pi i$.

Theory of Atomic Collisions, loc. cit. (cfr. n. 60 p. 26).

[113] Utilizzando due contatori Geiger (cfr. n. 50 p. 23), Bothe insieme con lo stesso Geiger riuscì a rivelare in coincidenza l'elettrone e il raggio X diffuso nell'effetto Compton con qualche mese di anticipo rispetto all'esperimento più completo di Compton e Simon con la camera di Wilson.
W. Bothe e H. Geiger: *Experimentelles zur Theorie von Bohr, Kramers und Slater [Aspetti sperimentali riguardanti la teoria di Bohr, Kramers e Slater],* Die Naturwissenschaften **13** (1925) 440–441.

[114] Fondamentale a questo riguardo è ancora oggi il testo di ottica scritto in collaborazione con Emil Wolf: *Principles of Optics,* Pergamon Press, London, 1959.

[115] Otto Hahn (1879–1968) è lo scopritore, insieme con Fritz Strassmann (1902–1980), della fissione nucleare: *Über den Nachweis und das Verhalten der bei der Bestrahlung des Urans mittels Neutronen entstehenden Erdalkalimetalle [Prova e comportamento dei metalli alcalino–terrosi prodotti dall'irraggiamento dell'uranio per mezzo di neutroni],* Die Naturwissenschaften **27** (1939) 11–15.

Meccanica quantistica dei processi d'urto [†] [116]
(Comunicazione preliminare) [#]

Attraverso un'analisi dei processi d'urto viene sviluppata l'interpretazione che la meccanica quantistica nella forma di Schrödinger permetta la descrizione non solo degli stati stazionari, ma anche dei salti quantici.

La meccanica quantistica fondata da Heisenberg è stata applicata finora esclusivamente al calcolo degli stati stazionari e delle ampiezze di vibrazione associate alle transizioni (di proposito evito il termine "probabilità di transizione"). Dopo tutto, il formalismo, che nel frattempo è stato ampiamente sviluppato, sembra avere dato buoni risultati. Ma questo modo di porre i problemi si riferisce solo a un lato del problema della teoria quantistica; accanto ad esso si solleva la domanda altrettanto importante sulla natura stessa delle "transizioni". Su questo punto sembra che l'opinione sia divisa; molti assumono che il problema delle transizioni non sia compreso nella meccanica quantistica nella forma attuale, ma che piuttosto sarà necessario per questo un nuovo sviluppo concettuale. Io stesso, impressionato dal carattere chiuso della costruzione logica della meccanica quantistica, sono giunto alla congettura che la teoria sia completa e che debba contenere il problema delle transizioni. Credo che mi sia riuscito ora di dimostrarlo.

Già Bohr ha attirato l'attenzione sul fatto che tutte le difficoltà di principio associate alla rappresentazione quantistica, che si incontrano nell'emissione e assorbimento di luce da parte di atomi, si presentano anche nell'interazione di atomi alle corte distanze e quindi nei processi d'urto. In questo caso si ha a che fare, invece che con i campi d'onda ancora molto oscuri, esclusivamente con sistemi di particelle materiali soggette al formalismo della meccanica quantistica. Perciò ho affrontato il problema di studiare più da vicino l'interazione tra una particella libera (un raggio α o un elettrone) e un atomo arbitrario e di

---

[†] di Max Born: Zeitschrift für Physik **37** (1926) 863–867, ricevuto il 25 giugno 1926.

[116] Di questo testo, originariamente scritto in tedesco, esiste anche una traduzione inglese riportata nel libro curato da John Archibald Wheeler e Wojcieck Hubert Zurek: *Quantum Theory and Measurement*, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1983. Le note non caratterizzate da un numero d'ordine progressivo sono quelle originali.

[#] Questa comunicazione era destinata in origine a "Die Naturwissenschaften", ma non è stato possibile accoglierla lì per mancanza di spazio. Spero che la sua pubblicazione in questa sede non appaia superflua.

determinare se non sia possibile una descrizione dei processi d'urto nell'ambito dell'attuale teoria.

Delle diverse forme della teoria finora solo quella di Schrödinger si è dimostrata adatta per questo e proprio per questa ragione io vorrei considerarla come la formulazione più profonda delle leggi quantistiche [117]. Lo sviluppo logico della mia riflessione è ora il seguente.

Se si vuole calcolare l'interazione tra due sistemi secondo la meccanica quantistica, allora, come ben noto, non si può, come in meccanica classica, selezionare uno stato di un sistema e stabilire come questo venga influenzato dallo stato dell'altro sistema, ma piuttosto tutti gli stati di entrambi i sistemi sono accoppiati in modo complicato. Ciò vale anche per un processo aperiodico come l'urto in cui una particella, diciamo un elettrone, arrivi dall'infinito e di nuovo scompaia all'infinito. Ma qui si impone l'idea che, sia prima che pure dopo l'urto, quando l'elettrone è abbastanza lontano e l'accoppiamento è piccolo, sia possibile definire un certo stato dell'atomo e un certo moto rettilineo e uniforme dell'elettrone. Si tratta di formulare matematicamente questo comportamento asintotico delle particelle accoppiate. Con la forma matriciale della meccanica quantistica ciò non mi è affatto riuscito, ma con la formulazione di Schrödinger sì [118].

Secondo Schrödinger, l'atomo nel suo stato quantico n-esimo è un processo vibratorio di una funzione di stato con frequenza fissata, $\frac{1}{h}W_n^0$, distribuita su tutto lo spazio. In particolare, un elettrone che si muove in linea retta rappresenta un tale processo vibratorio, corrispondente a un'onda piana. Quando entrambe le onde vengono in interazione, si origina una complicata vibrazione. Ma si vede subito che questa può essere determinata attraverso il suo comportamento asintotico all'infinito. Infatti non si ha altro che un "problema di diffrazione", nel quale un'onda piana incidente sull'atomo viene diffratta o diffusa; in luogo delle condizioni al contorno che si usano in ottica per la descrizione della figura di diffrazione sullo schermo, si ha qui l'energia potenziale dell'interazione tra atomo e elettrone.

Il compito è quindi il seguente: si deve risolvere l'equazione d'onda di Schrödinger per il sistema atomo–elettrone sotto la condizione al contorno che la soluzione in una determinata direzione spaziale dell'elettrone si trasformi in un'onda piana proprio con questa direzione di propagazione (quella

---

[117] Per apprezzare la tempestività di quanto proposto da Born può non essere superfluo osservare le date di ricevimento (25 giugno 1926) e di pubblicazione (10 luglio 1926) di questa comunicazione di Born e confrontarle con le date di pubblicazione delle prime due comunicazioni di Schrödinger sulla quantizzazione come problema agli autovalori: 13 marzo e 6 aprile 1926. Il 4 maggio inoltre era comparsa la dimostrazione dell'equivalenza tra meccanica delle matrici e meccanica ondulatoria fatta dallo stesso Schrödinger ed è del 12 aprile 1926 la citata lettera di Pauli a Jordan con una simile dimostrazione (cfr. n. 48 p. 23).

[118] È per questo motivo che Born ritiene la formulazione di Schrödinger come "la formulazione più profonda delle leggi quantistiche".

dell'elettrone incidente). Della soluzione così individuata ci interessa ora di nuovo esclusivamente il comportamento all'infinito dell'onda "diffusa", in quanto è questa che descrive il comportamento del sistema dopo l'urto. Sviluppiamo questo punto un po' meglio. Siano $\psi_1^0(q_k)$, $\psi_2^0(q_k)$, ... le autofunzioni dell'atomo imperturbato (assumiamo che ce ne sia solo un insieme discreto); all'elettrone in moto (rettilineo) imperturbato corrispondono le autofunzioni $\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)$, che costituiscono una molteplicità continua di onde piane le cui lunghezze d'onda (secondo de Broglie) sono legate all'energia del moto di traslazione τ mediante la relazione $\tau = \frac{h^2}{2\mu\lambda^2}$. L'autofunzione dello stato imperturbato con cui l'elettrone arriva dalla direzione $+z$ è quindi

$$\psi^0_{n\,\tau}(q_k, z) = \psi^0_n(q_k)\sin\frac{2\pi}{\lambda}z.$$

Ora, sia $V(x, y, z; q_k)$ l'energia potenziale dell'interazione tra atomo e elettrone. Si può allora dimostrare con l'aiuto di un semplice calcolo perturbativo che esiste una soluzione univocamente determinata dell'equazione differenziale di Schrödinger in presenza dell'interazione V, che per $z \to +\infty$ si trasforma asintoticamente nella funzione di cui sopra [119].

Si pone ora il problema di come questa soluzione si comporti "dopo l'urto".

Ora il calcolo fornisce questo risultato: l'onda diffusa creata dalla perturbazione ha asintoticamente all'infinito l'espressione

$$\begin{aligned}&\psi^{(1)}_{n\,\tau}(x, y, z; q_k)\\ &= \sum_m \iint_{\alpha x+\beta y+\gamma z>0} d\omega\, \Phi_{\substack{n\,m\\ \tau}}(\alpha,\beta,\gamma)\, \sin k_{\substack{n\,m\\ \tau}}(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)\,\psi^0_m(q_k).\end{aligned}$$

Ciò significa che la perturbazione si lascia considerare all'infinito come sovrapposizione di soluzioni del processo imperturbato. Se si calcola l'energia che appartiene alla lunghezza d'onda $\lambda_{\substack{n\,m\\ \tau}}$ secondo la formula di de Broglie data sopra, si trova

$$W_{\substack{n\,m\\ \tau}} = h\nu^0_{n\,m} + \tau,$$

[119] Born considera la hamiltoniana totale H del sistema atomo–elettrone come somma di due contributi: $H = H_0 + V$, dove H_0 a sua volta è somma della hamiltoniana intrinseca H^a dell'atomo e della hamiltoniana $H^\epsilon = \tau$ dell'elettrone in moto rettilineo (cfr. §7 del prossimo lavoro di Born). A fissata energia totale, con $V = 0$, le autofunzioni di $H = H_0$ sono perciò il prodotto tra le autofunzioni $\psi^0_n(q_k)$ dell'atomo imperturbato e le autofunzioni $\sin\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)$ dell'elettrone, che qui Born impone in moto lungo z ($\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$). Per $V \neq 0$, qui di seguito poi Born fornisce solo il risultato finale, $\psi^{(1)}_{n\,\tau}$, ottenuto come combinazione lineare delle autofunzioni di H_0. Ciò è naturalmente corretto se aggiungendo V a H_0 il dominio di H coincide con quello di H_0, cioè si sottende sempre lo stesso spazio di Hilbert.

dove $\nu^0_{n\,m}$ sono le frequenze dell'atomo imperturbato.

Se ora si interpreta altrimenti questo risultato in termini corpuscolari, c'è solo un'interpretazione possibile: $\Phi_{\substack{n\,m\\\tau}}(\alpha, \beta, \gamma)$ rappresenta la probabilità † che l'elettrone proveniente dalla direzione z sia gettato nella direzione specificata da α, β, γ (e con sfasamento δ), mentre la sua energia τ ha acquistato un quanto $h\nu^0_{n\,m}$ a spese dell'energia dell'atomo (urto di prima specie per $W^0_n < W^0_m, h\nu^0_{n\,m} < 0$; urto di seconda specie per $W^0_n > W^0_m, h\nu^0_{n\,m} > 0$).

Dunque la meccanica quantistica di Schrödinger alla domanda sull'effetto della collisione dà una ben precisa risposta; ma non si tratta affatto di una relazione causale. Non si riceve risposta alcuna alla domanda "quale sia lo stato dopo la collisione", ma si risponde solo alla domanda "quale sia la probabilità di un dato effetto della collisione" (dove naturalmente deve essere verificata la relazione quantistica dell'energia) [120].

Qui si solleva l'intera problematica del determinismo. Dal punto di vista della nostra meccanica quantistica non esiste alcuna quantità che fissi in modo causale l'effetto di un urto in un caso individuale; ma anche sperimentalmente non abbiamo finora alcun motivo per pensare che ci siano proprietà interne dell'atomo che condizionino un certo risultato dell'urto. Dobbiamo sperare di scoprire più tardi tali proprietà (cioè le fasi dei moti interni atomici) e di determinarle in casi individuali? Oppure dobbiamo credere che l'accordo tra teoria e esperienza, nell'impossibilità di definire condizioni per l'evoluzione causale, è un'armonia prestabilita che riposa sulla non esistenza di tali condizioni? Io stesso nego che si debba rinunciare al determinismo nel mondo atomico [121]. Ma questa è una domanda filosofica per la quale le argomentazioni fisiche da sole non sono determinanti.

In pratica l'indeterminismo si presenta in ogni caso sia per il fisico sperimentale che per il teorico [122]. La "funzione di conteggio" Φ, così tanto studiata dagli sperimentali, è ora perfettamente intelligibile anche dal punto

---

† Nota durante la correzione: una riflessione più precisa mostra che la probabilità è proporzionale al quadrato della quantità $\Phi_{\substack{n\,m\\\tau}}(\alpha,\beta,\gamma)$.

120 Quando espone la sua interpretazione della funzione d'onda, nella quarta comunicazione ricevuta il 10 maggio e pubblicata il 13 luglio 1926, Schrödinger ovviamente non era ancora a conoscenza di questa proposta di Born.

121 Qui sembra che Born senta ancora l'influenza del realista Einstein. D'altra parte la chiarificazione sulla necessità di abbandonare il determinismo classico verrà solo l'anno dopo con l'enunciato di Heisenberg sul principio di indeterminazione. Per una discussione sugli sviluppi della discussione scientifica sulla completezza della meccanica quantistica, si veda in questa collana il Quaderno *Il paradosso EPR e il teorema di Bell.*

122 Ecco affiorare l'atteggiamento, della scuola di Göttingen prima e di Copenhagen poi, che aveva guidato anche Heisenberg nell'esame critico dei concetti classici di posizione, velocità e traiettoria e che l'anno successivo, nell'individuare il principio di indeterminazione, lo porterà ad affermare che "siccome tutti gli esperimenti sono soggetti alle leggi della meccanica quantistica . . ., mediante la meccanica quantistica viene stabilita definitivamente la non validità del principio di causalità". Cfr. in questa collana il Quaderno *Il principio di indeterminazione.*

di vista teorico [123]. La si può trovare dall'energia potenziale dell'interazione $V(x, y, z; q_k)$, anche se i calcoli necessari per dimostrarlo sono troppo complicati per essere esposti in questa sede [124]. Voglio solo illustrare con alcune parole il significato della funzione $\Phi_{\underset{\tau}{nm}}$. Se per esempio l'atomo prima dell'urto si trova nello stato normale $n = 1$, allora dalla relazione

$$\tau + h\nu^0_{1m} = \tau - h\nu^0_{m1} = W_{\underset{\tau}{1m}} > 0$$

segue che per un elettrone con energia inferiore al livello di eccitazione più basso dell'atomo necessariamente debba essere anche $m = 1$ e quindi $W_{\underset{\tau}{11}} = \tau$; perciò ne risulta una "riflessione elastica" dell'elettrone con funzione di conteggio $\Phi_{\underset{\tau}{11}}$. Se τ sale oltre il primo livello eccitato, allora oltre alla riflessione si presenta anche eccitazione con conteggio $\Phi_{\underset{\tau}{12}}$, ecc. Se l'atomo colpito si trova nello stato eccitato $n = 2$ e $\tau < h\nu^0_{21}$, allora si dà riflessione con conteggio $\Phi_{\underset{\tau}{22}}$ e urto di seconda specie con conteggio $\Phi_{\underset{\tau}{21}}$. Se $\tau > h\nu^0_{21}$, si aggiunge ulteriore eccitazione, ecc.

Le formule perciò riproducono completamente il comportamento qualitativo nell'urto. La predizione quantitativa derivante dalle formule nei casi particolari deve rimanere riservata a una ricerca dettagliata.

Non mi sembra escluso che la stretta connessione tra meccanica e statistica, quale qui viene messa in luce, richiederà una revisione dei concetti fondamentali della termodinamica statistica.

Credo inoltre che il problema della radiazione di luce incidente e diffusa debba essere trattato in modo completamente analogo a quello del "problema di valori al contorno" dell'equazione d'onda e condurrà a una teoria razionale dello smorzamento e della larghezza di riga in accordo con la rappresentazione dei quanti di luce.

Una presentazione dettagliata apparirà presto in questa rivista.

---

[123] La "funzione di conteggio" (*Ausbeutefunktion*) è quella che oggi chiameremmo sezione d'urto differenziale (cfr. §4.).

[124] E infatti saranno esposti nel successivo lavoro, annunciato poi alla fine e riportato più avanti in questo Quaderno.

§ 3. Il significato statistico della funzione d'onda

Schrödinger nella sua quarta comunicazione [125] scrive l'equazione che oggi porta il suo nome e che, per una particella di massa m, soggetta al potenziale reale $V(\boldsymbol{r})$, ha la forma:

$$i\,\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r},t) + V(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r},t). \tag{3.1}$$

Schrödinger riconosce che a questa equazione è associata un'equazione di continuità, simile a quella che regola la variazione locale della densità di un fluido,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = 0, \tag{3.2}$$

pur di definire

$$\rho = |\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2, \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{j} = -\frac{i\,\hbar}{2m}\left[\Psi^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{\nabla}\Psi(\boldsymbol{r},t) - \Psi(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{\nabla}\Psi^*(\boldsymbol{r},t)\right]. \tag{3.4}$$

Gli viene quindi spontanea l'interpretazione della ρ come una densità di materia e la quantità $e\rho$ come la densità di carica elettrica associata alla particella (che per lui era un elettrone di carica e). Alla stessa equazione di continuità idrodinamica arriva, in modo del tutto generale, anche Erwin Madelung [126], che però s'accorge dell'impossibilità di un'interpretazione alla Schrödinger. Infatti, se questa fosse corretta, dovrebbe comparire nell'equazione di Schrödinger (3.1) anche un termine di retroazione tra le parti della particella la cui carica risulta distribuita nello spazio tridimensionale con densità $e\rho$. Ma questo termine non c'è e non ci deve essere, altrimenti si distrugge l'accordo

---

[125] E. Schrödinger: *Quantisierung als Eigenwertproblem (Vierte Mitteilung) [Quantizzazione come problema agli autovalori (quarta comunicazione)]*, Annalen der Physik **81** (1926) 109–139.

[126] Madelung, chiamato come professore a Francoforte nel 1921 a 40 anni in sostituzione di Born, era già noto per quella che oggi viene indicata come costante di Madelung e che rappresenta il valore di riferimento per l'energia elettrostatica di un cristallo ionico in funzione della sua struttura cristallina.
E. Madelung: *Quantentheorie in hydrodynamischer Form [Teoria quantistica in forma idrodinamica]*, Zeitschrift für Physik **40** (1927) 322–326.

sugli autovalori d'energia calcolati per esempio per l'elettrone nell'atomo di idrogeno. Madelung però non offre un'interpretazione alternativa: si limita a confermare l'idea, già di Schrödinger, che il modulo quadrato della Ψ sia da considerarsi una *funzione di peso* con cui valutare quantità di interesse fisico. Perciò, per esempio, anche per Madelung l'energia di un sistema descritto da una funzione d'onda Ψ va calcolata mediante un integrale che è lo stesso di quello che oggi utilizziamo come valore di aspettazione della hamiltoniana, cioè il valore che *ci si aspetta* di trovare come più probabile da una misurazione di energia sul sistema descritto dalla funzione Ψ:

$$E = \int d\mathbf{r}\Psi^*(\mathbf{r},t)\, H\, \Psi(\mathbf{r},t). \tag{3.5}$$

L'idea che si dovesse attribuire alla Ψ il significato di un puro ausilio matematico per inferire predizioni di natura statistica era molto lontana dalla mente realistica di Schrödinger, che pure aveva respirato l'atmosfera dell'Università di Vienna: si iscrisse a quella Università nel 1906 (quando il corpo accademico era ancora sconvolto dalla scomparsa di Boltzmann [127] e si divideva nel dibattito sulla costituzione atomistica della materia, acceso dalle diverse posizioni di Boltzmann e di Mach [128]) e vi divenne poi assistente di Exner [129].

Nella sua analogia tra ottica geometrica e meccanica, Schrödinger era più portato a vedere il moto di una particella come l'evolversi di un pacchetto di onde. Questa idea, derivatagli in certo qual senso dai lavori di de Broglie [130],

---

[127] Boltzmann visse gli ultimi anni della sua vita in un clima di incomprensione scientifica per lui traumatizzante, che forse aggravò i motivi del suo suicidio avvenuto il 5 settembre 1906 a Duino, presso Trieste.

[128] Ernst Waldfried Joseph Wentzel Mach (1838–1916) fu professore di fisica e poi di filosofia all'Università di Vienna. Egli non riusciva ad accettare l'ipotesi atomistica di Boltzmann. Anche se ritiratosi dall'insegnamento ufficiale nel 1901, le sue idee circolavano a Vienna e venivano alimentate dall'ininterrotto lavoro di studio di Mach stesso, per il quale non ha senso alcuno il realismo nella descrizione dei fenomeni fisici: la scienza è solo un modo economico di maneggiare le sensazioni attraverso la definizione di leggi naturali che mettono in relazione tra di loro i caratteri distintivi dei fenomeni.

[129] Franz Seraphim Exner (1849–1926), direttore del secondo Istituto di Fisica (il primo era quello di Boltzmann), fu anche rettore dell'Università di Vienna nel 1907. Per lui ci sono due livelli di descrizione: uno macroscopico fatto di regolarità e leggi, uno microscopico in cui dominano il caso e i fenomeni accidentali.
F. Exner: *Vorlesungen über die physikalischen Grundlagen der Naturwissenschaften*, Franz Deuticke, Vienna, 1919.
Forse proprio ricordando questa atmosfera respirata a Vienna, il 9 dicembre 1922 durante la sua prolusione a Zurigo Schrödinger sostenne che ciò che si chiama legge naturale altro non è che l'espressione di regolarità osservate negli accadimenti naturali, nei quali il caso costituisce la radice comune sottostante.
E. Schrödinger: *Was ist ein Naturgesetz? [Che cos'è una legge naturale?]*, Die Naturwissenschaften **17** (1929) 9–11, riportata in traduzione italiana nel volume *L'immagine del mondo*, Boringhieri, Torino, 1963, pp. 11–19.

[130] È noto che de Broglie non si arrese mai dentro di sé all'interpretazione statistica ortodossa

gli si era consolidata nella mente dopo che era riuscito a mostrare che un opportuno pacchetto di onde, costruito con autofunzioni di oscillatore armonico, si manteneva ben concentrato spazialmente durante l'evoluzione temporale, simulando dunque il moto classico [131]. Ma, come osserva Born [132] e ribadisce Heisenberg [133], il caso dell'oscillatore armonico è molto particolare: il caso prospettato da Schrödinger lo è a tal punto che (solo molti anni più tardi) può essere riconosciuto come il pacchetto di minima indeterminazione [134]. In generale, però, lo sparpagliamento del pacchetto durante la sua evoluzione temporale è tale da far perdere totalmente l'idea che esso possa rappresentare davvero una particella. Ma, come ancora nota Born, basta considerare due (o più) particelle per non riuscire più a visualizzare il moto del pacchetto nello spazio tridimensionale fisico, in quanto la corrispondente funzione d'onda è allora funzione delle coordinate posizionali di tutte le particelle in gioco e quindi funzione di coordinate di uno spazio pluridimensionale delle configurazioni che nulla ha a che fare con lo spazio fisico tridimensionale.

"La nuova meccanica non risponde, come la vecchia, alla domanda *come si muove una particella*, ma alla domanda *quanto probabile è che una particella si muova in un dato modo*" [135].

Il problema per Born è quello di conciliare i risultati della meccanica ondulatoria col linguaggio dei salti quantici della teoria dei quanti di Bohr–Sommerfeld. Assumendo che parlare di particelle quali gli elettroni, i protoni, i fotoni, senza entrare nel merito della loro realtà, rende più semplice la descrizione di molti fenomeni, Born non vuole neppure rinunciare al modello di Bohr, per il quale l'atomo vive solo in certi stati stazionari. D'altra parte, la conoscenza del particolare stato dell'atomo è possibile solo mediante una diretta osservazione; altrimenti si può solo parlare di probabilità che l'atomo si trovi nell'n-esimo stato quantico, descritto da una funzione $\psi_n(x)$. Grazie

---

della scuola di Copenhagen, cresciuta intorno a Bohr che aveva afferrato subito il significato della proposta di Born.
Per una discussione del realismo di de Broglie, cfr. in questa collana il Quaderno *Onde di materia e onde di probabilità*.

131 E. Schrödinger: *Der stetige Übergang von der Mikro– zur Makromechanik [Il passaggio continuo dalla micro– alla macromeccanica]*, Die Naturwissenschaften **14** (1926) 664–666.

132 M. Born: *Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik [Il principio adiabatico nella meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **40** (1927) 167–192.

133 Cfr. al §3 di W. Heisenberg: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik [Il contenuto intuitivo della cinematica e della meccanica nella teoria quantistica]*, Zeitschrift für Physik **43** (1927) 172–198

134 Roy Jay Glauber (n. 1925) introdusse questo tipo di pacchetto di onde, noto come insieme degli stati coerenti, per descrivere le proprietà statistiche della radiazione elettromagnetica e, in particolare, della luce emessa da un laser.
R.J. Glauber: *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field [Stati coerenti e stati incoerenti del campo di radiazione]*, Physical Review **131** (1963) 2766–2788.

135 M. Born, *Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik, loc. cit.*, p. 167.

alla sua linearità, la più generale soluzione dell'equazione di Schrödinger che descrive l'atomo può essere a priori posta nella forma di sovrapposizione lineare delle varie funzioni $\psi_n(x)$, pesate con un fattore temporale che coinvolge il corrispondente valore di energia E_n,

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n(x)\, e^{iE_n t/\hbar}. \tag{3.6}$$

"Affermiamo [136] ora che, come misura di questa probabilità per lo stato, sia da scegliere la quantità

$$|c_n|^2 = \left| \int \psi(x,t)\psi_n^*(x)dx \right|^2 ."$$

Per dimostrare questa affermazione Born si dedica allo studio di una perturbazione dipendente dal tempo che agisca sull'atomo e ne induca una transizione da uno stato all'altro [137]. Riscopre così la reversibilità tra assorbimento e emissione stimolata di radiazione, che era stata dimostrata da Einstein, e dimostra la validità del principio adiabatico di Ehrenfest anche in meccanica quantistica.

Quando Born scrive questo lavoro può essere così sicuro dell'interpretazione statistica della Ψ, perché ne ha già esaminato l'utilità nella descrizione dei processi d'urto e ormai l'idea veniva accolta da allievi e colleghi. Pauli, da poco trasferitosi da Göttingen ad Amburgo, nello studiare le proprietà magnetiche degli atomi ne assimila gli elettroni a un gas di particelle che devono soddisfare alla "regola di equivalenza" (*Äquivalenzregel* – oppure "divieto di equivalenza" (*Äquivalenzverbot*) – come allora si chiamava il principio di esclusione di Pauli). Ritiene allora utile sottolineare in una nota a p. 83 del suo lavoro [138] il significato della funzione d'onda del sistema. "Dato un sistema di N particelle, con coordinate di posizione $q_1, \ldots q_f$, ad ogni stato quantico del sistema viene assegnata secondo Schrödinger una funzione $\psi(q_1, \ldots q_f)$ che soddisfa un'equazione differenziale da lui proposta. Vogliamo interpretare questa funzione (ben incomprensibile dal puro punto di vista ondulatorio) nel senso del punto di vista di "campo fantasma", sostenuto da Born nella sua meccanica dell'urto (Zs. f. Phys. **37**, 863, 1926; **38**, 803, 1926), e cioè nel modo seguente: $|\psi(q_1, \ldots q_f)|^2 dq_1 \ldots dq_f$ è la probabilità che nello

---

[136] M. Born, *Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik*, *loc. cit.*, p. 171.

[137] In un articolo quasi contemporaneo, ma precedente, anche Dirac si era occupato di una perturbazione dipendente dal tempo, giungendo alle stesse conclusioni di Born per quanto si riferisce all'assorbimento e all'emissione di radiazione: anche Dirac parla di probabilità di transizione.
P.A.M. Dirac: *On the Theory of Quantum Mechanics [Sulla teoria della meccanica quantistica]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 112** (1926) 661–677.

[138] W. Pauli: *Über Gasentartung und Paramagnetismus [Gas degenere e paramagnetismo]*, Zeitschrift für Physik **41** (1927) 81–102.

stato quantico in esame del sistema queste coordinate si trovino contemporaneamente nell'elemento di volume in esame $dq_1 \ldots dq_f$ dello spazio delle posizioni ...". Solo in questo modo può allora Pauli dare significato alla sua regola per un insieme di elettroni: "... la prescrizione menzionata nel testo, per la caratterizzazione della soluzione realizzata in natura nel caso particolare di N particelle identiche, dice ora che *la corrispondente funzione ψ deve cambiare segno se si scambiano le coordinate di due particelle qualsiasi*. Se le particelle hanno un momento angolare proprio come gli elettroni, allora alle tre coordinate di traslazione per ogni particella occorre aggiungere ancora ulteriori coordinate corrispondenti ai gradi di libertà rotazionali, e lo scambio delle coordinate di due particelle qualsiasi deve riguardare tutti i gradi di libertà per ogni particella".

§ 4. Soluzione del problema d'urto

Prima di affrontare la lettura del lungo lavoro tecnico di Born sui processi d'urto, con la dettagliata dimostrazione delle affermazioni succintamente presentate nella prima comunicazione [139], può essere utile ricordare gli aspetti fondamentali del problema così come ancor oggi vengono insegnati. Ci si limita qui all'urto elastico per semplicità: Born stesso però tratta anche il caso dell'urto anelastico, come naturale estensione.

Ipotesi fondamentale è che il potenziale $V(\boldsymbol{r})$ di interazione tra proiettile e bersaglio, supposti entrambi puntiformi, sia reale e a corto raggio d'azione, in modo che abbia un comportamento a grandi distanze relative del tipo

$$\lim_{r\to\infty} rV(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{4.1}$$

Viene così escluso il potenziale coulombiano, per il quale per altro è in linea di principio possibile dare una soluzione esatta dell'equazione di Schrödinger. Eliminando il tempo, ci si riconduce inoltre all'equazione stazionaria di Schrödinger, che nella rappresentazione delle posizioni è un'equazione differenziale:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r}) + V(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r}) = E\Psi(\boldsymbol{r}). \tag{4.2}$$

[139] Prima della sua pubblicazione Born ne diede il manoscritto a Oppenheimer, allora a Göttingen come suo allievo, per una verifica dei conti. Come ricorda lo stesso Oppenheimer in una conversazione con Jagdish Mehra nel marzo 1955, Born faceva spesso errori di conto, ma questa volta, con grande sorpresa del giovane Oppenheimer, il lavoro era tutto così giusto al punto da far venire il dubbio se davvero lo avesse fatto da solo! Tuttavia è molto probabile che Oppenheimer non abbia curato la successiva correzione delle bozze, per cui nel testo originale compaiono alcuni errori di stampa.
Jagdish Mehra e Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory*, vol. V, Springer Verlag, New York-Berlino, 1987, p. 734.

Per la soluzione della (4.2) sono necessarie opportune condizioni al contorno. Nel caso del problema dell'urto elastico viene scritto su tutti i libri che la condizione al contorno utile è

$$\Psi(\boldsymbol{r}) \sim e^{ikz} + f(\theta, \phi)\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{4.3}$$

corrispondente asintoticamente, a grandi distanze relative r, al caso di un'onda piana incidente lungo l'asse z e un'onda sferica uscente, modulata da un fattore angolare $f(\theta, \phi)$. Questo fattore rappresenta l'ampiezza di diffusione elastica e interviene nella sezione d'urto differenziale attraverso il suo modulo quadrato, che Born chiama "funzione di conteggio" e indica col simbolo Φ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2. \tag{4.4}$$

Si rammenta che la sezione d'urto differenziale costituisce l'unica quantità direttamente misurabile e rappresenta il numero di particelle diffuse nell'angolo solido $d\Omega$, intorno alla direzione indicata dagli angoli polari θ e ϕ, per unità di tempo e per centro diffusore del bersaglio, rapportato al numero di particelle incidenti per unità di tempo e per unità di superficie offerta dal bersaglio al fascio incidente.

La condizione (4.3) viene scoperta proprio in questo lavoro di Born, che dimostra, dapprima in uno spazio monodimensionale nel §3 e poi più in generale nel §5 nel caso tridimensionale, come davvero asintoticamente, grazie alla condizione (4.1), la Ψ possa diventare un'onda piana. Inoltre, con un altro calcolo esplicito, costruisce la soluzione di onda sferica che tiene conto del potenziale.

La soluzione della (4.2) può essere convenientemente affrontata con l'uso della funzione di Green per la particella libera [140]:

$$G_0(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k}\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{E - E_k}. \tag{4.5}$$

Nella (4.5) E_k sono gli autovalori di energia,

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \tag{4.6}$$

[140] G_0 è un operatore indicato dai matematici come *risolvente* dell'equazione (4.2) con $V = 0$, ma viene spesso indicato (soprattutto dai fisici) con il nome improprio di *funzione* di Green. Il nome deriva da quello del matematico George Green (1793–1841) che introdusse questo metodo per la risoluzione di equazioni differenziali in un saggio del 1828 (*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism*), in cui Green sottolineava il ruolo della funzione potenziale nello studio dei fenomeni elettrici e magnetici. Nello stesso saggio compare anche il lemma di Green relativo all'integrale di volume di una divergenza che si trasforma in un integrale del flusso attraverso la superficie che racchiude il volume stesso.

per la particella libera descritta da onde piane opportunamente normalizzate:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{4.7}$$

Si verifica subito che $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ soddisfa all'equazione

$$\begin{aligned}\left(E + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right) G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \\ &= \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\end{aligned} \tag{4.8}$$

il cui primo membro corrisponde alla (4.2) in assenza di potenziale [141].

Nella (4.5) l'integrazione su $k = |\boldsymbol{k}|$ non è immediatamente possibile a causa della presenza di poli nell'integrando. Infatti, tenendo presente che anche E è del tipo $\hbar^2 k^2/2m$ come E_k e chiamando k' la variabile di integrazione, la (4.5) diventa

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2m}{\hbar^2}\int d\boldsymbol{k}' \frac{e^{i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2 - k'^2}, \tag{4.9}$$

che presenta appunto zeri del denominatore in corrispondenza di $k' = \pm k$.

Si possono evitare le divergenze nell'integrazione (4.9) adottanto per esempio la seguente prescrizione:

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2m}{\hbar^2}\int d\boldsymbol{k}' \frac{e^{i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2 - k'^2 + i\epsilon}, \tag{4.10}$$

dove ϵ è una quantità positiva da far tendere a zero dopo avere eseguito l'integrazione. Il suo effetto è quello di spostare le singolarità dell'integrando nel piano complesso di k' fuori dall'asse reale:

$$k' = \pm\sqrt{k^2 + i\epsilon} \simeq \pm\left(k + \frac{i\epsilon}{2k^2} + O(\epsilon^2)\right), \tag{4.11}$$

con $k > 0$. In tal modo l'integrale (4.10) è regolare e può essere eseguito. Integrando dapprima sugli angoli polari di $\boldsymbol{k}'$ si ottiene

---

[141] La normalizzazione (4.7) delle onde piane garantisce la comparsa della delta di Dirac a secondo membro della (4.8) con un coefficiente unitario. Allo stesso tempo, la (4.7) permette l'ortonormalizzazione delle onde piane a una $\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$. Tuttavia nei problemi d'urto si preferisce piuttosto usare onde piane del tipo $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$, normalizzate a un flusso (3.4) pari a $\boldsymbol{j} = \hbar\boldsymbol{k}/m$, che corrisponde al flusso di una corrente di particelle con velocità $\boldsymbol{v} = \hbar\boldsymbol{k}/m$.

$$
\begin{aligned}
&G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2m}{\hbar^2}2\pi\int_0^\infty dk' k'^2 \frac{1}{k^2-k'^2+i\epsilon}\frac{e^{ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-e^{-ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2m}{\hbar^2}\frac{2\pi}{i|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^\infty dk' \frac{k'}{k^2-k'^2+i\epsilon}\left(e^{ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-e^{-ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2m}{\hbar^2}\frac{2\pi}{i|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^\infty dk' k' \frac{e^{ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{k^2-k'^2+i\epsilon}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Grazie alla (4.11) l'integrale su k' si può ora eseguire nel piano complesso di $k' = k_1 + ik_2$, $k_2 > 0$. Aggiungendo all'integrale sull'asse reale di k' l'integrale lungo una semicirconferenza di raggio infinito nel semipiano $k_2 > 0$, nulla cambia in quanto il fattore

$$
e^{ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = e^{ik_1|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-k_2|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}
$$

smorza a zero il contributo lungo la semicirconferenza di centro O e raggio $k_2 \to +\infty$. Si può così valutare l'integrale nella (4.12) utilizzando il teorema di Cauchy applicato al residuo del polo in $k' = +\sqrt{k^2+i\epsilon}$:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty dk' k' \frac{e^{ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{k^2-k'^2+i\epsilon} &= \oint dk'\, k' \frac{e^{ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{k^2-k'^2+i\epsilon} \\
&= 2\pi i \frac{e^{i\sqrt{k^2+i\epsilon}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{-2\sqrt{k^2+i\epsilon}}\sqrt{k^2+i\epsilon} \\
&= -\pi i e^{i\sqrt{k^2+i\epsilon}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.
\end{aligned}
$$

Pertanto la (4.12) diventa

$$
G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{2m}{\hbar^2}\frac{2\pi}{i|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}(-\pi i)e^{i\sqrt{k^2+i\epsilon}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},
$$

cioè

$$
G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{4.13}
$$

Il risultato (4.13) semplifica la struttura non locale della funzione di Green, che appare funzione di $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ solamente, e non di $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$. Di conseguenza G_0 è invariante per traslazione del sistema di riferimento, in accordo col fatto che si sta descrivendo una particella libera.

Se si fosse adottata la prescrizione (4.10) con $\epsilon < 0$, all'integrale (4.12) avrebbe contribuito il polo in $k' = -\sqrt{k^2+i\epsilon}$, con il risultato seguente:

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{4.14}$$

L'utilità della funzione di Green deriva dalla seguente osservazione. L'equazione (4.2), che pure è un'equazione omogenea, può scriversi in una forma che appare quella di un'equazione completa,

$$\left(E + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right)\Psi(\boldsymbol{r}) = V(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r}), \tag{4.15}$$

qualora si immagini per il momento di conoscerne il secondo membro. Allora la soluzione generale della (4.15) può scriversi come somma di due contributi. Uno è dato dalla soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea corrispondente,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r}) = E\Psi(\boldsymbol{r}), \tag{4.16}$$

e cioè da un'onda piana del tipo (4.7). L'altro contributo proviene da un integrale particolare Ψ_1 dell'equazione differenziale completa (4.15), che, in virtù della (4.8), ha la forma

$$\Psi_1(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r}' G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')V(\boldsymbol{r}')\Psi(\boldsymbol{r}'). \tag{4.17}$$

Quindi la soluzione generale della (4.2) risulta

$$\begin{aligned}\Psi(\boldsymbol{r}) &= \Phi(\boldsymbol{r}) + \Psi_1(\boldsymbol{r}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \int d\boldsymbol{r}' G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')V(\boldsymbol{r}')\Psi(\boldsymbol{r}').\end{aligned} \tag{4.18}$$

Dalla (4.18) si ottiene la forma (3), §6, del lavoro di Born.

Per ottenere l'ampiezza di diffusione $f(\theta,\phi)$ interessa l'andamento asintotico a grandi r secondo la (4.3). Facendo tendere $r \to \infty$ si ha

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| &= (r^2 - 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}' + r'^2)^{1/2} \\ &= r\left(1 - \frac{2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{1/2} \\ &= r\left[1 - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2} + O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{4.19}$$

Siccome il potenziale $V(\boldsymbol{r})$ ha raggio d'azione limitato, nell'integrale su $\boldsymbol{r}'$ nella (4.18) si possono trascurare i contributi $O(r'^2/r^2)$. Pertanto

$$\Psi(\boldsymbol{r}) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(\boldsymbol{r}) - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}' e^{-i\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r}'}V(\boldsymbol{r}')\Psi(\boldsymbol{r}'), \tag{4.20}$$

dove si è posto

$$\boldsymbol{k}_r = k\frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{4.21}$$

La (4.20) , con la scelta [142]

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = e^{ikz}, \tag{4.22}$$

ha proprio la struttura (4.3) corrispondente alle condizioni al contorno desiderate nel problema d'urto, cioè di onda piana incidente (4.22) più un'onda sferica uscente, e^{ikr}/r, modulata con il fattore angolare,

$$f(\theta,\phi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int d\boldsymbol{r}' e^{-i\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r}'}V(\boldsymbol{r}')\Psi(\boldsymbol{r}'), \tag{4.23}$$

che rappresenta l'ampiezza di diffusione.

La (4.13) corrisponde a imporre alla soluzione particolare (4.17) la condizione al contorno di onda sferica uscente. Se si fosse scelto $\epsilon < 0$ nella prescrizione (4.10), con il conseguente risultato (4.14), nella (4.20) sarebbe comparsa invece un'onda entrante, che pure è una soluzione accettabile matematicamente, ma corrispondente a condizioni al contorno qui non interessanti.

Se si può assumere che l'azione del potenziale sia piccola, tale cioè da permettere l'approssimazione della Ψ sotto il segno di integrale nella (4.17) mediante un'onda piana, si ottiene la *prima approssimazione di Born*. L'ampiezza di diffusione corrispondente è quindi [143]

$$f_B(\theta,\phi) = -\frac{2m}{4\pi\,\hbar^2}\int d\boldsymbol{r} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}V(\boldsymbol{r}), \tag{4.24}$$

dove

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_r \tag{4.25}$$

rappresenta il *momento trasferito* dal proiettile al bersaglio.

La (4.24) mostra che nella prima approssimazione di Born l'ampiezza di diffusione fornisce una mappa del potenziale attraverso la sua trasformata di Fourier: una conoscenza della distribuzione angolare per tutti i valori di $\boldsymbol{q}$ permetterebbe l'inversione di Fourier e quindi la determinazione di $V(\boldsymbol{r})$.

[142] Cfr. n. 141 p. 55.

[143] Cfr. eq. (12), §6, del lavoro di Born seguente.

È interessante osservare che l'approssimazione (4.24), pur essendo valida se l'energia cinetica del moto relativo proiettile–bersaglio è molto maggiore della corrispondente energia d'interazione, risulta in pratica utile in un ampio intervallo di energie e rappresenta il punto di partenza per ogni calcolo di problema d'urto. Tuttavia lo stesso Born mostra che, mediante un opportuno sviluppo in serie della Ψ, si riesce a stabilire un'intera gerarchia di approssimazioni successive per la soluzione completa.

La teoria esposta da Born viene subito ripresa da Enrico Fermi (1901–1954) in un esercizio relativo all'urto anelastico di una particella su di un rotatore intorno a un asse fisso [144]. Pochi mesi dopo Dirac, durante un periodo trascorso a Göttingen, riformula la teoria di Born nello spazio degli impulsi e riconferma, attraverso il recupero dei coefficienti di emissione e di assorbimento di Einstein, l'interpretazione statistica proposta da Born [145].

---

[144] E. Fermi: *Zur Wellenmechanik des Stossvorgänges [Meccanica ondulatoria del processo d'urto]*, Zeitschrift für Physik **40** (1927) 399–402.

[145] P.A.M. Dirac: *Über die Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, Zeitschrift für Physik **44** (1927) 585–595.

Meccanica quantistica dei processi d'urto [†] [1)] [146]

La forma di Schrödinger della meccanica quantistica permette di definire in modo naturale la frequenza di uno stato con l'aiuto dell'intensità dell'assegnata autovibrazione. Questa concezione porta a una teoria dei processi d'urto nella quale le probabilità di transizione vengono determinate dal comportamento asintotico delle soluzioni aperiodiche.

Introduzione. I processi d'urto non solo hanno fornito le prove sperimentali più convincenti per le ipotesi fondamentali della teoria dei quanti, ma sembrano anche adatti a chiarire il significato fisico delle leggi formali della cosiddetta "meccanica quantistica". Sembra infatti che questi forniscano sempre i corretti valori dei termini degli stati stazionari e le corrette ampiezze delle vibrazioni emesse durante le transizioni, ma le opinioni sull'interpretazione fisica delle formule sono divise. La forma matriciale della meccanica quantistica, fondata da Heisenberg e sviluppata da lui insieme con Jordan e l'autore di questa comunicazione [2)], parte dall'idea che un'esatta rappresentazione dei processi nello spazio e nel tempo non sia affatto possibile e si accontenta di stabilire relazioni tra grandezze osservabili che solo al limite classico possono essere interpretate come proprietà dei moti. Schrödinger [3)] [147] d'altra parte sembra ascrivere alle onde, che secondo l'analogia di de Broglie egli considera come i portatori dei processi atomici, una realtà della stessa specie posseduta dalle onde di luce; egli cerca di "costruire pacchetti di onde che hanno dimensioni relativamente piccole in tutte le direzioni" e che ovviamente devono rappresentare direttamente il corpuscolo in moto.

[†] di Max Born: Zeitschrift für Physik **38** (1926) 803–827, ricevuto il 21 luglio 1926.

[1)] Si veda inoltre la precedente comunicazione, Zs. f. Phys. **37**, 863, 1926.

[146] Di questo testo, originariamente scritto in tedesco, esiste anche una parziale traduzione inglese riportata nel libro di Gunter Ludwig: *Wave mechanics*, Pergamon Press, Oxford (1968). Le note numerate con una parentesi tonda sono quelle del testo originale.

[2)] W. Heisenberg, Zs. f. Phys. **33**, 879, 1925; M. Born e P. Jordan, *ibid.* **34**, 858, 1925; M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan, *ibid.* **35**, 557, 1926. Vedi anche P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **109**, 642, 1925; **110**, 561, 1926.

[3)] E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 361, 489, 734, 1926. Cfr. specialmente la seconda comunicazione, p. 499. Inoltre Naturw. **14**, 664, 1926.

[147] Dopo avere citato tutti i lavori pubblicati sulla meccanica delle matrici, Born cita anche tutti i lavori già pubblicati da Schrödinger sulla meccanica ondulatoria. I primi due sono i primi della serie di quattro sulla quantizzazione come problema agli autovalori. Nel terzo Schrödinger dimostra l'equivalenza tra la sua meccanica e quella delle matrici. Il lavoro su Die Naturwissenschaften è quello già citato nel §3 (cfr. n. 131 p. 51).

Nessuna di queste due concezioni mi sembra soddisfacente. Vorrei cercare qui di dare una terza interpretazione e dimostrarne l'utilità nei processi d'urto. Mi collego qui a un'osservazione di Einstein sulla relazione tra campo d'onde e quanti di luce; egli dice per esempio che le onde sono presenti solo per indicare il cammino ai quanti di luce corpuscolari e parla in questo senso di un "campo fantasma" [148]. Questo determina la probabilità che un quanto di luce, il portatore dell'energia e dell'impulso, imbocchi un certo cammino; al campo stesso però non appartiene alcuna energia né alcun impulso.

È meglio ritardare il collegamento diretto di queste idee con la meccanica quantistica fino a quando si sia completato l'inquadramento del campo elettromagnetico nel formalismo. Tuttavia, data la completa analogia tra quanto di luce e elettrone, la formulazione delle leggi di moto dell'elettrone verrà pensata in maniera simile. E qui è naturale riguardare le onde di de Broglie–Schrödinger come il "campo fantasma" o, meglio, il "campo guida".

In via sperimentale vorrei perciò seguire la seguente idea: il campo guida, rappresentato da uno scalare ψ, funzione delle coordinate di tutte le particelle coinvolte e del tempo, si propaga secondo l'equazione differenziale di Schrödinger. Ma l'energia e l'impulso sono trasferiti come se i corpuscoli (elettroni) davvero si muovessero intorno. Le traiettorie di questi corpuscoli sono determinate solo nella misura in cui sono circoscritte dalle leggi di conservazione dell'energia e dell'impulso; altrimenti, per il verificarsi di una certa traiettoria viene determinata solo una probabilità attraverso i valori assunti dalla funzione ψ. Si potrebbe, in modo alquanto paradossale, riassumere ciò nel modo seguente: il moto delle particelle segue leggi di probabilità, ma la probabilità stessa evolve in accordo con la legge causale [4)].

Se si valutano i tre stadi dello sviluppo della teoria dei quanti si vede che quello inferiore, relativo ai processi periodici, è totalmente inadatto per dimostrare l'utilità di una tale idea. Un po' meglio si presta il secondo stadio, quello dei processi stazionari aperiodici, e di questi ci vogliamo occupare in questo lavoro. Tuttavia, solo il terzo stadio può essere realmente decisivo, quello dei processi non stazionari; qui si deve dimostrare se l'interferenza di "onde di probabilità" smorzate riesce a spiegare quei fenomeni che sembrano indicare un accoppiamento indipendente da spazio e tempo.

Una precisazione dei concetti è possibile solo sulla base dello sviluppo

---

[148] Nel secondo dei tre lavori citati alla n. 12 p. 11, Einstein introduce la nozione di onde materiali nello studio del comportamento di un gas perfetto e dei fenomeni di fluttuazione ad esso associati: la struttura formale delle relazioni, che aveva stabilito sviluppando l'idea del fisico indiano Satyendra Nath Bose (1894–1974) nel definire quella che oggi viene indicata come statistica di Bose–Einstein, era simile a quella della radiazione spiegata coi quanti di luce. Il "campo fantasma" che accompagna la particella del gas è simile all'"onda pilota" di de Broglie.

[4)] Ciò significa che la conoscenza dello stato in tutti i punti a uno stesso istante stabilisce la distribuzione dello stato a tutti gli istanti successivi.

matematico [5)] [149]; perciò ci rivolgiamo subito a questo aspetto per ritornare solo più tardi sull'ipotesi stessa.

§1. *Definizione dei pesi e delle frequenze per sistemi periodici.* Cominciamo con una considerazione puramente formale degli stati stazionari discreti di un sistema non degenere. Questo sia caratterizzato dall'equazione differenziale di Schrödinger [150]

$$[H - W, \psi] = 0. \tag{1}$$

Le autofunzioni siano normalizzate a 1 [6)] [151]:

$$\int \psi_n(q)\psi_m^*(q)dq = \delta_{n\,m}. \tag{2}$$

Ogni arbitraria funzione $\psi(q)$ può essere sviluppata secondo le autofunzioni:

$$\psi(q) = \sum_n c_n \psi_n(q). \tag{3}$$

Finora l'attenzione è stata indirizzata solo alle autovibrazioni ψ_n e agli autovalori W_n. La nostra idea, spiegata nell'introduzione, porta a pensare che la funzione rappresentata mediante la sovrapposizione (3) sia da mettere in relazione con la probabilità che in un insieme di atomi identici non accoppiati gli stati si manifestino con una frequenza determinata.

La relazione di completezza

$$\int |\psi(q)|^2 dq = \sum_n |c_n|^2 \tag{4}$$

porta a considerare questo integrale come il numero di atomi. Siccome per il manifestarsi di una singola autovibrazione normalizzata esso ha il valore 1 (oppure: i pesi a priori degli stati sono 1), $|c_n|^2$ indica la frequenza dello stato n e il numero totale si compone additivamente di questi componenti.

[5)] Nella preparazione matematica di questo lavoro mi ha aiutato nel modo più amichevole il Prof. N. Wiener di Cambridge, Mass.; vorrei perciò qui esprimergli il mio ringraziamento e riconoscere che senza di lui non avrei raggiunto lo scopo.

[149] Born si sta riferendo al già citato lavoro comune fatto al MIT nell'inverno precedente in cui vengono introdotti gli operatori al posto delle matrici di Heisenberg.

[150] La notazione utilizzata nell'equazione (1), $[\ldots, \psi]$, sta ad indicare l'applicazione alla ψ dell'operatore che sostituisce i puntini. La (1) altro non è che l'equazione agli autovalori per l'operatore hamiltoniano. Nel caso di spettro puntuale di autovalori W_n, alle sue soluzioni si può imporre la condizione di normalizzazione (2), in quanto le soluzioni sono a quadrato sommabile. Inoltre, in tal caso l'insieme di autofunzioni ψ_n costituisce un insieme completo, nel senso indicato dalla (3).

[6)] Per semplicità pongo la funzione densità uguale a 1.

[151] In realtà la (2) è coerente con l'interpretazione probabilistica, come Born stesso fa notare nel commentare la successiva eq. (4).

Per giustificare questa interpretazione consideriamo il moto di un punto materiale nello spazio tridimensionale sotto l'azione dell'energia potenziale $U(x, y, z)$; allora l'equazione differenziale (1) risulta

$$\nabla^2\psi + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}(W - U)\psi = 0. \tag{5}$$

Se per W, ψ si pone qui un autovalore W_n e un'autofunzione ψ_n, si moltiplica l'equazione per ψ_m^* e si integra sullo spazio ($dS = dx\,dy\,dz$), si ottiene così

$$\int\int\int \left\{\psi_m^*\nabla^2\psi_n + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}(W_n - U)\psi_n\psi_m^*\right\} dS = 0.$$

Secondo il teorema di Green, tenendo conto delle relazioni di ortogonalità (2), ciò dà [152]

$$\delta_{mn}W_n = \int\int\int \left\{\frac{h^2}{8\pi^2\mu}(\text{grad}\ \psi_n \cdot \text{grad}\ \psi_m^*) + U\psi_n\psi_m^*\right\} dS. \tag{6}$$

Ogni livello energetico può essere dunque considerato come un integrale spaziale della densità di energia delle autovibrazioni [153].

Se ora per un'arbitraria funzione si costruisce il corrispondente integrale

$$W = \int\int\int \left\{\frac{h^2}{8\pi^2\mu}|\text{grad}\ \psi|^2 + U|\psi|^2\right\} dS, \tag{7}$$

inserendo lo sviluppo (3) si ricava l'espressione

$$W = \sum_n |c_n|^2 W_n. \tag{8}$$

---

[152] Nell'integrazione per parti coinvolta dal teorema di Green è implicito l'annullarsi del contributo ai limiti del volume (infinito) di integrazione, conseguenza del fatto che, in accordo con la (2) e la (4), la ψ è una funzione a quadrato sommabile.

[153] In questa interpretazione della (6) è sottinteso che la hamiltoniana classica

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + U$$

sia stata tradotta quantisticamente come

$$H \ \rightarrow\ -\frac{h^2}{8\pi\mu}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} + U,$$

in accordo con la prescrizione

$$\boldsymbol{p} \ \rightarrow\ -i\frac{h}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}.$$

Secondo la nostra interpretazione dei $|c_n|^2$ il membro di destra è il valor medio dell'energia complessiva di un sistema di atomi; questo valor medio può essere rappresentato quindi come integrale spaziale della densità di energia della funzione ψ.

D'altronde però nulla di fondamentale a favore della nostra affermazione può essere affermato fintanto che si rimanga all'interno di processi periodici.

§2. *Sistemi aperiodici*. Passiamo quindi a processi aperiodici e consideriamo dapprima per semplicità il caso del moto rettilineo uniforme lungo l'asse x. Qui l'equazione differenziale risulta:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \qquad k^2 = \frac{8\pi^2\mu}{h^2}W; \tag{1}$$

essa ha come autovalori tutti i valori positivi W e come autofunzioni

$$\psi = c\, e^{\pm ikx}.$$

Per poter definire qui pesi e frequenze, si deve innanzi tutto normalizzare le autofunzioni. La formula integrale analoga alla (2) fallisce (l'integrale è divergente); viene naturale usare, invece di quella, il "valor medio" [154]

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} |\psi(k,x)|^2 dx = \lim_{a\to\infty} \frac{c^2}{2a}\int_{-a}^{+a} e^{ikx}\, e^{-ikx} dx = 1; \tag{2}$$

da ciò segue $c = 1$ e si ha come autofunzione normalizzata

$$\psi(k,x) = e^{\pm ikx}. \tag{3}$$

Ogni funzione di x può essere composta con queste. Inoltre si deve ancora scegliere il metro della scala per k, cioè si deve stabilire in quale sezione deve cadere proprio il peso 1. A tale scopo si consideri il moto libero come caso limite di uno periodico, ossia delle autovibrazioni di un segmento dell'asse x. Allora è noto che il loro numero per unità di lunghezza e per intervallo $(k, k+\Delta k)$ è uguale a $\frac{\Delta k}{2\pi} = \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, dove λ è la lunghezza d'onda. Si porrà quindi

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\psi(k,x) d\frac{k}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, e^{ikx} dk \tag{4}$$

con

$$c\,(-k) = c^*(k) \tag{5}$$

[154] Viene qui proposto il trucco di normalizzare su una regione limitata funzioni non a quadrato sommabile e poi far tendere all'infinito il volume di tale regione.

e ci si aspetta che allora $|c(k)|^2$ sia la misura della frequenza per l'intervallo $\frac{1}{2\pi}dk$.

Per una miscela di atomi, per i quali le autofunzioni si presentano nella distribuzione data da $c(k)$, analogamente a quanto fatto in (4), §1, il numero sia rappresentato dall'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, e^{ikx} dk \right|^2 . \tag{6}$$

Se si prende il caso in cui sia occupato solo il piccolo intervallo $k_1 \leq k \leq k_2$, allora si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, e^{ikx} = \overline{c} \int_{k_1}^{k_2} e^{ikx} dk = \frac{\overline{c}}{ix}(e^{ik_2 x} - e^{ik_1 x}),$$

dove $\overline{c}$ indica un valor medio. Da ciò si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx &= \frac{|\overline{c}|^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}(e^{ik_2 x} - e^{ik_1 x})(e^{-ik_2 x} - e^{-ik_1 x}) \\ &= \frac{|\overline{c}|^2}{4\pi^2} 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \sin^2 \frac{k_2 - k_1}{2} x = \frac{1}{2\pi} |\overline{c}|^2 (k_2 - k_1). \end{aligned}$$

Ora, l'impulso del moto di traslazione appartenente all'autofunzione (3) è, secondo de Broglie,

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k. \tag{7}$$

Non è forse superfluo osservare che questo può essere anche concepito come una "matrice"; allora le matrici nello spettro continuo non si devono definire mediante integrali, ma con valori medi e quindi qui [155]

[155] Schrödinger aveva dimostrato l'equivalenza tra la "sua" meccanica quantistica e la meccanica delle matrici di Born, Heisenberg e Jordan identificando proprio gli elementi delle matrici come integrali tra autofunzioni degli operatori associati alle corrispondenti variabili dinamiche. Nel caso di spettro continuo, Born ha appena introdotto la definizione del "valore medio" (2) per la normalizzazione delle funzioni e quindi coerentemente definisce ora le matrici mediante "valori medi".
Incidentalmente, la relazione che Born sta scrivendo verrà ripresa poi da Ehrenfest per dimostrare la corrispondenza del formalismo quantistico con le leggi della meccanica classica. P. Ehrenfest: *Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik [Un'osservazione sulla validità approssimata della meccanica classica all'interno della meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **45** (1927) 455-457.

$$p(k,k') = \frac{h}{2\pi i} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} \psi^*(k,x) \frac{\partial\psi(k',x)}{\partial x} dx$$
$$= \frac{h}{2\pi i} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} e^{-ikx}\, ik'\, e^{ik'x} dx.$$

$$p(k,k') = \begin{cases} \frac{h}{2\pi} k, & \text{per} \quad k = k', \\ 0, & \text{per} \quad k \neq k'. \end{cases} \tag{8}$$

Se ora si sostituisce $\Delta k = k_2 - k_1$ con $\frac{2\pi}{h}\Delta p$, allora alla fine si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = |\overline{c}|^2 \frac{\Delta p}{h}. \tag{9}$$

Con ciò si ha il risultato che una cella dell'estensione in lunghezza $\Delta x = 1$ e dell'estensione in impulso $\Delta p = h$ ha il peso 1, in accordo con l'ipotesi di Sackur e Tetrode [7)] [156], più volte confermata dall'esperimento, e che $|c(k)|^2$ è la frequenza per un moto con l'impulso $p = \frac{h}{2\pi}k$.

Ora passiamo ai moti accelerati. Qui si può naturalmente definire in modo analogo una certa distribuzione di processi. Ma questo non è un modo razionale di porsi il problema nel caso di processi d'urto. Per questi processi ogni moto prima e dopo l'urto ha un asintoto rettilineo. Perciò, a un istante molto lontano (in confronto con la durata reale dell'urto) prima e dopo l'urto

---

7) O. Sackur, Ann. d. Phys. **36**, 958, 1911; **40**, 67, 1912; H. Tetrode, Phys. Zs. **14**, 212, 1913; Ann. d. Phys. **38**, 434, 1912.

156 Nella termodinamica statistica era necessario ipotizzare una misteriosa suddivisione dello spazio delle fasi in celle di volume h^3. Ciò permetteva di valutare correttamente la funzione di partizione, l'entropia e le altre variabili di stato. In particolare, si poteva così derivare la legge di Sackur-Tetrode per l'entropia di una mole di gas perfetto:

$$S = C_V \ln T + R \ln V + R \ln \frac{(2\pi mk/h^2)^{3/2}}{N_A} + \tfrac{5}{2}R,$$

dove C_V è il calore molare a volume costante, T la temperatura assoluta; $R = kN_A$ è la costante dei gas perfetti, costruita con la costante k di Boltzmann e col numero di Avogadro N_A, e infine h è la costante di Planck. Oggi sappiamo che ciò è legato al principio di indeterminazione e all'indistinguibilità delle particelle quantistiche.
Otto Sackur: *Die Anwendung der kinetischen Theorie der Gase auf chemische Probleme [L'applicazione della teoria cinetica dei gas a problemi chimici]*, Annalen der Physik **36** (1911) 958–989; *Die universelle Bedeutung des sogenannten elementaren Wirkungsquantums [Il significato universale del cosiddetto quanto d'azione elementare]*, Annalen der Physik **40** (1912) 67–86.
Hugo Tetrode: *Bemerkungen über den Energieinhalt einatomiger Gase und über die Quantentheorie für Flüssigkeiten [Osservazioni sul contenuto energetico dei gas monoatomici e sulla teoria quantistica per i fludi]*, Physikalische Zeitschrift **14** (1913) 212–214; *Die chemische Konstante der Gase und das elementare Wirkungsquantum [La costante chimica dei gas e il quanto d'azione elementare]*, Annalen der Physik **38** (1912) 434–442.

la particella si trova in uno stato praticamente libero. Quindi, in accordo col modo di porre il problema sperimentalmente, si arriva al seguente punto di vista: nota la funzione di distribuzione $|c(k)|^2$ per il moto asintotico prima dell'urto, è possibile calcolare da questa la funzione di distribuzione dopo l'urto?

Naturalmente qui si parla di un flusso di particelle stazionario. Quindi matematicamente il compito si svolge nel modo seguente: il campo di vibrazione stazionario ψ deve essere separato in onda incidente e onda emergente; queste asintoticamente sono onde piane. Se si rappresentano entrambe mediante integrali di Fourier della forma (4) e si scelgono arbitrariamente i coefficienti $c(k)$ per l'onda entrante, allora si deve dimostrare che i $c(k)$ per l'onda uscente sono completamente fissati. Essi forniscono la distribuzione in cui viene trasformata attraverso l'urto un'assegnata miscela di particelle.

Per renderci conto meglio delle relazioni, trattiamo dapprima il caso monodimensionale.

§3. *Il comportamento asintotico delle autofunzioni dello spettro continuo per un grado di libertà.* L'equazione differenziale di Schrödinger risulta:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\,(W - U(x))\,\psi = 0, \tag{1}$$

dove $U(x)$ indica l'energia potenziale. Per brevità poniamo

$$\frac{8\pi^2\mu}{h^2}\,W = k^2, \quad \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\,U(x) = V(x); \tag{2}$$

allora abbiamo

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = V\psi. \tag{3}$$

Cerchiamo il comportamento asintotico delle soluzioni all'infinito. Per questo imponiamo, per avere relazioni semplici, che $V(x)$ all'infinito si annulli più rapidamente di x^{-2}, cioè

$$|V(x)| < \frac{K}{x^2}, \tag{4}$$

dove K è un numero positivo [8)].

Determiniamo ora $\psi(x)$ con un procedimento iterativo [157]; sia

$$u_0(x) = e^{ikx} \tag{5}$$

---

8) Con questa ipotesi viene escluso il caso del campo puramente coulombiano e del campo di dipolo.

157 All'n-esima iterazione si costruisce $\psi^{(n)}$ come soluzione della (3), ipotizzando di conoscere $V\psi = V\psi^{(n-1)}$.

e siano $u_1(x), u_2(x), \ldots$ le soluzioni delle equazioni per le successive approssimazioni,

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + k^2 u_n = V u_{n-1},$$

che si azzerano per $x \to +\infty$.

Allora è

$$u_n(x) = \frac{1}{k} \int_x^\infty u_{n-1}(\xi) V(\xi) \sin k(\xi - x) d\xi,$$

come si può verificare direttamente. Si ha

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{k} \int_x^\infty |u_{n-1}(\xi)| \cdot |V(\xi)| \, d\xi.$$

Mostriamo ora che è

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{K}{kx} \right)^n .$$

Per $n = 0$ ciò è giusto, in quanto dalla (5) segue $|u_0(x)| \leq 1$. Assumiamo ora che sia giusto per $n - 1$:

$$|u_{n-1}(\xi)| \leq \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{K}{k\xi} \right)^{n-1} ;$$

allora segue [158]

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{k} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{K}{k} \right)^{n-1} \cdot K \int_x^\infty \xi^{-n+1} \xi^{-2} d\xi = \frac{1}{n!} \left(\frac{K}{kx} \right)^n ,$$

come era stato affermato.

Conseguentemente la serie

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^\infty u_n(x) \tag{6}$$

converge uniformemente per ogni intervallo finito; essa si può deriverare termine a termine un numero arbitrario di volte e quindi, come si vede facilmente, è la soluzione cercata della nostra equazione differenziale.

Siccome però tutte le $u_1, u_2, \ldots$ si annullano per $x \to +\infty$, allora la funzione ψ all'infinito positivo diventa asintoticamente $u_0 = e^{ikx}$.

---

[158] In virtù della (4).

Esattamente allo stesso modo si dimostra che esiste una soluzione che per $x \to +\infty$ diventa asintoticamente e^{-ikx}. Siccome la soluzione generale contiene solo due costanti, allora asintoticamente per $x \to +\infty$ essa deve avere la forma

$$\psi^+(x) = a\, e^{ikx} + b\, e^{-ikx}. \tag{7}$$

Qui si manifesta la degenerazione del sistema; a ogni autovalore di energia W appartengono due valori $k, -k$ e due soluzioni linearmente indipendenti.

In modo totalmente simile segue che la soluzione generale per $x \to -\infty$ deve avere la stessa forma:

$$\psi^-(x) = A\, e^{ikx} + B\, e^{-ikx}. \tag{8}$$

In questo caso le ampiezze A, B sono determinate funzioni di a, b.

Decomponiamo ora la soluzione in onda entrante e onda uscente; perciò introduciamo il fattore temporale e^{ikvt} $\left(kv = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{h}W\right)$ e poniamo:

$$\begin{cases} a = c_e\, e^{ik\phi_e}, \quad A = C_u\, e^{ik\Phi_u}\,, \\ b = c_u\, e^{-ik\phi_u}, \quad B = C_e\, e^{-ik\Phi_e}\,. \end{cases} \tag{9}$$

Allora si ha

$$\begin{cases} \psi^+(x) = c_e\, e^{ik(x+vt+\phi_e)} + c_u\, e^{-ik(x-vt+\phi_u)}, \\ \psi^-(x) = C_u\, e^{ik(x+vt+\Phi_u)} + C_e\, e^{-ik(x-vt+\Phi_e)}. \end{cases} \tag{10}$$

Le parti reali dei termini specificati con l'indice e rappresentano le onde entranti, quelle dei termini specificati con l'indice u le onde uscenti.

Ci interessa il caso in cui ci sia una sola onda incidente per $x = +\infty$; allora è $C_e = 0$ e inoltre si può arbitrariamente porre $\phi_e = 0$. Allora si ha

$$\begin{cases} \psi^+(x) = c_e\, e^{ik(x+vt)} + c_u\, e^{-ik(x-vt+\phi_u)}, \\ \psi^-(x) = C_u\, e^{ik(x+vt+\Phi_u)}. \end{cases} \tag{11}$$

Abbiamo mostrato che $\psi^-(x)$ viene determinata per integrazione a partire da $\psi^+(x)$, cioè A, B sono determinate funzioni di a, b. Nel nostro caso $C_e = 0$ è $B = 0$, per cui si hanno due equazioni della forma:

$$\begin{cases} A = A(a, b), \\ 0 = B(a, b). \end{cases} \tag{12}$$

Dalla seconda si può esprimere b mediante a e allora dalla prima si ottiene A espresso mediante a. Ciò però significa che si possono calcolare le costanti dell'onda riflessa e le costanti dell'onda trasmessa a partire dall'ampiezza dell'onda incidente.

Si può dimostrare che tra le intensità delle tre onde esiste una relazione. La si ottiene nel modo più semplice con l'aiuto della legge sull'energia.

§4. *La legge di conservazione dell'energia*. Per derivare questa legge torniamo a quella forma dell'equazione differenziale di Schrödinger per la quale non è stata ancora fatta l'ipotesi di una vibrazione puramente periodica nel tempo, perciò a un'equazione d'onda della forma [159]

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Qui v è la velocità di propagazione dell'onda [160]. Si arriva all'equazione di Schrödinger se si pone con de Broglie [9)]

$$\begin{aligned} h\nu &= W = \frac{\mu}{2}u^2 + U, \\ v &= \lambda\nu, \\ \frac{h}{\lambda} &= p = \mu u; \end{aligned}$$

allora

$$\frac{1}{v^2} = \frac{h^2}{\lambda^2}\frac{1}{h^2\nu^2} = \frac{\mu^2 u^2}{W^2} = \frac{\frac{1}{2}\mu u^2 \cdot 2\mu}{W^2},$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{2\mu}{W^2}(W-U). \tag{2}$$

Se si cercano soluzioni la cui dipendenza dal tempo è data dal fattore $e^{2\pi i\nu t} = e^{\frac{2\pi i}{h}Wt}$, si ottiene

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2\mu}{h^2}(W-U)\psi = 0.$$

Ora consideriamo la forma generale (1) e moltiplichiamola per $\frac{\partial\psi}{\partial t}$.

Ora è

---

[159] Born sta semplicemente scrivendo l'equazione di d'Alembert per una vibrazione in una sola direzione spaziale. È però l'equazione da cui parte anche Schrödinger nella sua seconda comunicazione (eq. (18)) per arrivare, con ragionamenti simili, a quella che Born chiama equazione di Schrödinger, ma che in realtà è semplicemente l'equazione agli autovalori per la hamiltoniana. La vera equazione di Schrödinger, dipendente dal tempo, compare solo nella quarta comunicazione di Schrödinger, e quindi dopo che fu scritto questo lavoro di Born. Cfr. in questa collana il Quaderno *La meccanica delle onde*.

[160] Giustamente Born distingue tra velocità v dell'onda ψ e velocità u della particella.

[9)] Trascuriamo la relatività e facciamo il conto con la meccanica classica.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 .$$

Perciò, quando v dipende solo da x, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2v^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right) = 0. \tag{3}$$

Integrando sullo spazio si ottiene

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right\}dx = 0. \tag{4}$$

Come è stato mostrato in §1, qui l'integrale spaziale significa l'energia totale disponibile nello spazio. Ma la sua espressione non ci interessa, in quanto ci importa l'energia entrante e uscente che viene rappresentata dai contributi dei limiti [161]. Per un processo periodico nel tempo si annulla la media temporale del secondo membro e, utilizzando le espressioni (7) e (8), §3, si ottiene

$$\overline{\frac{\partial\psi^-}{\partial x}\frac{\partial\psi^-}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial\psi^+}{\partial x}\frac{\partial\psi^+}{\partial t}}. \tag{5}$$

Quest'equazione indica che l'energia entrante è uguale a quella uscente. Inserendo la parte reale dell'espressione (10), §3, otteniamo

$$C_u^2 - C_e^2 = c_e^2 - c_u^2, \tag{6}$$

oppure, nel caso $C_e = 0$ [come nell'equazione (11), §3],

$$c_e^2 = c_u^2 + C_u^2. \tag{7}$$

Ma ciò significa che per ogni onda elementare di dato k l'intensità incidente viene suddivisa nell'intensità delle due onde diffuse una a destra e l'altra a sinistra; oppure, nel linguaggio della teoria corpuscolare, se una particella di data energia colpisce l'atomo, o viene riflessa o prosegue oltre; la somma delle probabilità per questi due eventi è 1.

[161] Per la (7), §1, e la (2) di questa sezione, tale integrale spaziale è identicamente nullo se la dipendenza temporale della ψ è data dal fattore $e^{2\pi i\nu t}$. Altrimenti la (4) è un'equazione di continuità per l'energia, in cui la derivata temporale dell'integrale spaziale indica il bilancio tra l'energia entrante e quella uscente, che viene definito dai contributi ai limiti.

La legge di conservazione dell'energia ha quindi come conseguenza la conservazione del numero di particelle. Il motivo di ciò si trova nella degenerazione del sistema; a ogni autovalore di energia appartengono diversi moti e questi vengono posti in relazione [162].

§5. *Generalizzazione a tre gradi di libertà. Moto inerziale*. Consideriamo ora una particella che si muova nello spazio sotto l'azione dell'energia potenziale $U(x, y, z)$. Allora analogamente alla (1) si ha l'equazione differenziale

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

dove, nell'approssimazione della meccanica classica, v è data di nuovo dalla (2), §4. Qui la legge di conservazione si scrive

$$\text{div}\,\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\text{grad}\,\psi\right) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left\{(\text{grad}\,\psi)^2 + \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right\} = 0, \tag{2}$$

oppure integrando sullo spazio:

$$\int_\infty \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}d\sigma - \frac{\partial}{\partial t}\int\frac{1}{2}\left\{(\text{grad}\,\psi)^2 + \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right\}dS = 0, \tag{3}$$

dove $dS = dx\,dy\,dz$ e $d\sigma$ è l'elemento di una superficie chiusa infinitamente lontana con normale uscente [163]. Per il processo periodico nel tempo segue da ciò che la media temporale è

$$\overline{\int_\infty \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial\nu}d\sigma} = 0. \tag{4}$$

Per questo caso l'equazione differenziale si scrive

$$\nabla^2\psi + (k^2 - V)\psi = 0, \tag{5}$$

dove si sono posti

---

[162] C'è una riflessione dell'onda incidente, misurata dal coefficiente di riflessione $R = c_u^2/c_e^2$ e un'onda trasmessa, la cui ampiezza determina il coefficiente di trasmissione $T = C_u^2/c_e^2$. Born osserva con soddisfazione che è $R + T = 1$, come conseguenza della conservazione dell'energia. In realtà, strettamente legata all'interpretazione che Born dà alla funzione d'onda e all'equazione di continuità associata all'equazione di Schrödinger, c'è la conservazione del numero di particelle, che viene garantita dalla conservazione del flusso di particelle: proprio per questo se ne può dare un legame con la conservazione dell'energia.

[163] In tale senso va considerata la derivata rispetto a ν nella (3).

$$k^2 = \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\, W, \qquad V(x,y,z) = \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\, U(x,y,z). \tag{6}$$

Per il moto inerziale ($V = 0$) si ha l'equazione differenziale

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{7}$$

e la soluzione

$$\psi = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}; \tag{8}$$

qui $\boldsymbol{r}$ è il vettore x, y, z, e il vettore $\boldsymbol{k}$ soddisfa alla relazione

$$|\boldsymbol{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \tag{9}$$

e, a meno di un fattore, risulta uguale all'impulso

$$\boldsymbol{p} = \frac{h}{2\pi}\boldsymbol{k}. \tag{10}$$

La lunghezza d'onda di de Broglie è data dalla relazione $\frac{h}{\lambda} = p = |\boldsymbol{p}| = \frac{h}{2\pi}k$. La soluzione (8) va considerata normalizzata nel senso della media [v. (2), §2]. Indichiamo brevemente con $f(\boldsymbol{r})$ una funzione di x, y, z, con $f(\boldsymbol{k})$ una funzione di k_x, k_y, k_z, ecc. Sia $dS = dx\, dy\, dz$.

La soluzione generale della (7) è

$$\psi(\boldsymbol{r}) = u_0(\boldsymbol{r}) = \int c(\boldsymbol{s})\, e^{ik\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}} d\omega, \quad c(-\boldsymbol{s}) = c^*(\boldsymbol{s}), \tag{11}$$

dove $\boldsymbol{s}$ è un vettore unitario e $d\omega$ l'elemento di angolo solido [164]. Essa rappresenta i moti inerziali in tutte le direzioni possibili con la stessa energia; secondo il nostro principio $|c(\boldsymbol{s})|^2$ è il numero calcolato per unità di angolo solido delle particelle che viaggiano nella direzione $\boldsymbol{s}$.

Deriviamo una rappresentazione asintotica per u_0 che indica chiaramente come u_0 si comporta all'infinito. Sebbene il risultato si possa ottenere molto facilmente, qui lo vogliamo raggiungere per mezzo di un metodo generale che può essere trasferito ai casi applicativi che verranno poi trattati. Immaginiamoci un nuovo sistema di coordinate ortogonali X, Y, Z, introdotto con l'aiuto della trasformazione ortogonale:

$$\begin{cases} x = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z, & X = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \\ y = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z, & Y = a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \\ z = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z, & Z = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z. \end{cases} \tag{12}$$

[164] Il versore $\boldsymbol{s}$ caratterizza la direzione del generico impulso $\boldsymbol{k}$ su cui viene fatta la sovrapposizione (11) integrando sull'angolo solido, mantenendo però costante il modulo k.

Allo stesso tempo introduciamo, invece del versore $\boldsymbol{s}$, il nuovo versore $\boldsymbol{S}$ con l'aiuto della stessa trasformazione ortogonale; allora l'elemento di angolo solido $d\omega$ si trasforma in un nuovo $d\Omega$ e diventa

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{S}. \tag{13}$$

Ora scegliamo il nuovo sistema di coordinate in modo particolare, tale che siano

$$X = 0, \qquad Y = 0; \tag{14}$$

allora è

$$Z = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{15}$$

Il nostro integrale diventa

$$\begin{aligned} u_0(x, y, z) &= u_0(a_{13}Z, a_{23}Z, a_{33}Z) \\ &= \int d\Omega \; c(a_{11}S_x + a_{12}S_y + a_{13}S_z, \ldots) \, e^{ikZS_z}. \end{aligned}$$

Ora per $\boldsymbol{S}$ introduciamo coordinate polari:

$$S_x = \sin\theta\cos\phi, \quad S_y = \sin\theta\sin\phi, \quad S_z = \cos\theta \tag{15}$$

e poniamo $\cos\theta = \mu$; allora è

$$\begin{aligned} &u_0 = \\ &\quad \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\mu \, c\left(\sqrt{1-\mu^2}(a_{11}\cos\phi + a_{12}\sin\phi) + \mu a_{13}, \ldots\right) \, e^{ikZ\mu}. \end{aligned}$$

Integrando per parti segue:

$$\begin{aligned} u_0 = \frac{1}{ikZ} \int_0^{2\pi} d\phi \Big\{ & c(a_{13}, a_{23}, a_{33}) \, e^{ikZ} \\ & - c(-a_{13}, -a_{23}, -a_{33}) \, e^{-ikZ} \Big\} \\ - \frac{1}{ikZ} \int_0^{2\pi} d\phi & \frac{d}{d\mu} c \left(\sqrt{1-\mu^2}(a_{11}\cos\phi + a_{12}\sin\phi) + \mu a_{13}, \ldots\right) \\ & \cdot \; e^{ikZ\mu} d\mu. \end{aligned}$$

Una nuova applicazione dello stesso procedimento mostra che il secondo termine si azzera come Z^{-2}. Se si pone ora $Z = r$, $a_{13} = \frac{x}{Z} = \frac{x}{r}, \ldots$, si ottiene così la rappresentazione asintotica

$$u_0^\infty(x,y,z) = \frac{2\pi}{ikr}\left\{c\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)e^{ikr} - c\left(-\frac{x}{r},-\frac{y}{r},-\frac{z}{r}\right)e^{-ikr}\right\} \tag{17}$$

o, con scrittura reale, con $c = |c|e^{ik\gamma}$,

$$u_0^\infty(x,y,z) = \frac{4\pi}{k}\left|c\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)\right|\frac{\sin k\left(r+\gamma\left[\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right]\right)}{r}. \tag{18}$$

Ciò significa che u_0 si comporta asintoticamente come un'onda sferica con un'ampiezza e una fase dipendenti dalla direzione; l'intensità in funzione della direzione $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ determina la frequenza della particella che arriva nell'elemento di angolo solido $d\omega$ intorno all'asse $\boldsymbol{s}$:

$$\Phi_0 d\omega = |c(\boldsymbol{s})|^2 d\omega. \tag{19}$$

§6. *Collisioni elastiche*. Passiamo ora all'integrazione dell'equazione generale (5), §5,

$$\nabla^2\psi + (k^2 - V)\psi = 0; \tag{1}$$

fisicamente essa rappresenta il caso che un elettrone urti un atomo non eccitabile.

Come in §3 determiniamo ψ con un procedimento iterativo in cui come punto di partenza serve la funzione u_0, (11), §5, appena introdotta. Quindi calcoliamo in sequenza $u_1, u_2, \ldots$ dalle equazioni di approssimazione

$$\nabla^2 u_n + k^2 u_n = V u_{n-1} = F_{n-1}. \tag{2}$$

Il teorema di Green fornisce la soluzione che corrisponde alle onde uscenti col fattore temporale e^{ikvt} nella forma [165]:

$$u_n(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int F_{n-1}(\boldsymbol{r}')\frac{e^{-ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dS', \tag{3}$$

dove $\boldsymbol{r}'$ indica il vettore di componenti x', y', z' e $dS' = dx'dy'dz'$. La convergenza del procedimento può essere dimostrata sulla base dell'ipotesi

[165] Per una derivazione della (3) si vedano le note tecniche al paragrafo 4 e, in modo particolare, gli argomenti per ottenere la soluzione (4.23).

che V vada a zero come r^{-2} [10)] [166]; tuttavia non ci addentriamo in ciò, ma assumiamo piuttosto che la serie

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\boldsymbol{r})$$

rappresenti la soluzione.

Cerchiamo il comportamento asintotico di $u_n(\boldsymbol{r})$. Scriviamo esplicitamente

$$u_n(x,y,z) = \\ -\frac{1}{4\pi}\int\int\int F_{n-1}(x',y',z')\frac{e^{-ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dx'dy'dz'.$$

Ora introduciamo di nuovo la rotazione del sistema di coordinate data in §5 e sottoponiamo le variabili di integrazione alla stessa rotazione. Allora

$$u_n(x,y,z) = u_n(a_{13}Z, a_{23}Z, a_{33}Z)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\int\int F'_{n-1}(X',Y',Z')\frac{e^{-ik\sqrt{X'^2+Y'^2+(Z-Z')^2}}}{\sqrt{X'^2+Y'^2+(Z-Z')^2}}dX'dY'dZ', \tag{4}$$

dove

$$F'_{n-1}(X',Y',Z') = F_{n-1}(a_{11}X' + a_{12}Y' + a_{13}Z', \ldots). \tag{5}$$

Ora introduciamo coordinate polari:

$$X' = \rho\sin\theta\cos\phi, \quad Y' = \rho\sin\theta\sin\phi, \quad Z' = \rho\cos\theta.$$

Allora si ha

---

10) Qui di seguito viene escluso il caso di ioni; in tale caso non si dovrà prendere come punto di partenza del procedimento di approssimazione un moto rettilineo, ma una traiettoria iperbolica dell'elettrone. Su tale punto si veda una trattazione di prossima pubblicazione di J.R. Oppenheimer, Proc. Cambridge Phil. Soc., 26 luglio 1926.

166 J.R. Oppenheimer: *On the quantum theory of the problem of two-bodies [Teoria quantistica del problema a due corpi]*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **23** (1926) 422–431.

$$u_n = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \, F'_{n-1}(\rho\sin\theta\cos\phi, \ldots) \cdot \frac{e^{-ik\sqrt{\rho^2+Z^2-2\rho Z\cos\theta}}}{\sqrt{\rho^2+Z^2-2\rho Z\cos\theta}}.$$

Infine introduciamo al posto di θ la variabile di integrazione μ mediante la relazione

$$\sqrt{\rho^2+Z^2-2\rho Z\cos\theta} = Z\mu,$$
$$\sin\theta \, d\theta = \frac{Z}{\rho}\,\mu \, d\mu;$$

con ciò i limiti di integrazione diventano

$$\theta = 0: \quad \mu = \left|\frac{\rho}{Z} - 1\right|; \qquad \theta = \pi: \quad \mu = \frac{\rho}{Z} + 1$$

e $\cos\theta, \sin\theta$ diventano certe funzioni $c(\rho, Z, \mu)$, $s(\rho, Z, \mu)$ che assumono i valori $c = 1, s = 0$ al limite inferiore e $c = -1, s = 0$ al limite superiore. Perciò si ottiene

$$u_n = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho \, d\rho \int_{\left|\frac{\rho}{Z}-1\right|}^{\frac{\rho}{Z}+1} F'_{n-1}(\rho s\cos\phi, \rho s\sin\phi, \rho c)\, e^{-ik\mu Z} d\mu.$$

Mediante integrazione per parti, come in §5, si ricava la rappresentazione asintotica

$$u_0^\infty = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho \, d\rho \, \frac{1}{ikZ}\Big\{F'_{n-1}(0,0,\rho)\, e^{-ik(Z+\rho)} - F'_{n-1}(0,0,-\rho)\, e^{-ik|Z-\rho|}\Big\}.$$

Qui, dalla (5) [167]

$$F'_{n-1}(0,0,\rho) = F_{n-1}(a_{13}\rho, a_{23}\rho, a_{33}\rho) = F_{n-1}\left(\frac{\rho x}{r}, \frac{\rho y}{r}, \frac{\rho z}{r}\right),$$

$$F'_{n-1}(0,0,-\rho) = F_{n-1}(-a_{13}\rho, -a_{23}\rho, -a_{33}\rho) = F_{n-1}\left(-\frac{\rho x}{r}, -\frac{\rho y}{r}, -\frac{\rho z}{r}\right).$$

[167] Si pone, come nel §5, $Z = r$, $a_{13} = x/Z = x/r, \ldots$.

Perciò

$$\begin{aligned} u_0^\infty = \frac{e^{-ikr}}{2ikr}\int_0^\infty \rho\, d\rho F_{n-1}\left(\frac{\rho x}{r},\frac{\rho y}{r},\frac{\rho z}{r}\right)\, e^{-ik\rho} \\ -\ \frac{e^{-ikr}}{2ikr}\int_0^r \rho\, d\rho F_{n-1}\left(-\frac{\rho x}{r},\dots\right)\, e^{ik\rho} \\ -\ \frac{e^{ikr}}{2ikr}\int_r^\infty \rho\, d\rho F_{n-1}\left(-\frac{\rho x}{r},\dots\right)\, e^{-ik\rho}. \end{aligned}$$

Qui l'ultimo integrale si annulla per $r \to \infty$, in quanto assumiamo che sia $|V| \le ar^{-2}$, per cui, siccome $|u_0| \le br^{-1}$,

$$|F_{n-1}| \le \frac{A}{r^3},$$

e quindi

$$\left|\int_r^\infty \rho\, d\rho F_{n-1}\left(-\frac{\rho x}{r},\dots\right)\, e^{-ik\rho}\right| \le A\int_r^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{A}{r}.$$

Con ciò otteniamo infine

$$u_0^\infty = \frac{e^{-ikr}}{2ikr}\int_0^\infty \rho\, d\rho \left\{F_{n-1}\left(\frac{\rho x}{r},\dots\right)\, e^{-ik\rho} - F_{n-1}\left(-\frac{\rho x}{r},\dots\right)\, e^{ik\rho}\right\}. \tag{6}$$

Ma questo può essere messo in una forma ancora più trasparente. A tale scopo introduciamo i coefficienti di Fourier della funzione F_{n-1}:

$$\begin{aligned} f_{n-1}(\boldsymbol{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int F_{n-1}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}} dS \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty r^2 dr \int\int d\omega F_{n-1}(r\boldsymbol{s})\, e^{-ir\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s}} dS. \end{aligned} \tag{7}$$

Col procedimento già eseguito due volte determiniamo il valore asintotico e otteniamo

$$f_{n-1}^\infty(k_x,k_y,k_z) = \\ \frac{1}{4\pi^2 ik}\int_0^\infty r\, dr\left\{F_{n-1}\left(\frac{rk_x}{k},\dots\right)\, e^{ikr} - F_{n-1}\left(-\frac{rk_x}{k},\dots\right)\, e^{-ikr}\right\}.$$

Da ciò si ha

$$f_{n-1}^{\infty}\left(-k\frac{x}{r},-k\frac{y}{r},-k\frac{z}{r}\right)=$$
$$\frac{1}{4\pi^2 ik}\int_0^{\infty}\rho\,d\rho\left\{F_{n-1}\left(\frac{\rho x}{r},\dots\right)\,e^{-i\rho k}-F_{n-1}\left(-\frac{\rho x}{r},\dots\right)\,e^{i\rho k}\right\}. \tag{8}$$

Sostituendo ciò in (6) otteniamo infine

$$u_0^{\infty}(x,y,z)=2\pi^2 f_{n-1}^{\infty}\left(-k\frac{x}{r},-k\frac{y}{r},-k\frac{z}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}. \tag{9}$$

Confrontando questo risultato con le formule (11) e (18) del §5, vediamo che un osservatore all'infinito vedrà la radiazione diffusa come onde piane con ampiezza dipendente dalla direzione ***s***

$$\frac{k}{2\pi}2\pi^2|f_{n-1}^{\infty}(-k\boldsymbol{s})|=k\pi|f_{n-1}^{\infty}(-k\boldsymbol{s})|;$$

perciò la probabilità che un elettrone sia deviato in un elemento di angolo solido $d\omega$ con direzione media ***s*** è

$$\Phi d\omega=\pi^2k^2\left|\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{\infty}(-k\boldsymbol{s})\right|^2 d\omega. \tag{10}$$

La soluzione complessiva ha la forma asintotica

$$\begin{aligned}\psi^{\infty}&=u_0^{\infty}+\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{\infty}\\&=\frac{2\pi}{k}\left\{|c(\boldsymbol{s})|\,e^{ik(r+\delta)}+k\pi\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{\infty}(-k\boldsymbol{s})\,e^{-ikr}\right\}.\end{aligned}$$

Introducendo qui il fattore temporale e^{ikvt}, la formula (4), §5, fornisce facilmente la "conservazione del numero di particelle".

In prima approssimazione si ha

$$\Phi d\omega=\pi^2k^2\,|f_0^{\infty}(-k\boldsymbol{s})|^2\,d\omega, \tag{11}$$

dove o si calcola f_0 esattamente dalla formula

$$f_0(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int F_0(\boldsymbol{r})\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dS, \tag{12}$$

oppure semplicemente si può utilizzare l'espressione asintotica [secondo la (8)]

$$f_0^\infty(-k\boldsymbol{s}) = \frac{1}{4\pi^2 ik}\int_o^\infty \rho\, d\rho \left\{F_0(\rho\boldsymbol{s})\, e^{-ik\rho} - F_0(-\rho\boldsymbol{s})\, e^{ik\rho}\right\}. \tag{13}$$

§7. *Urto anelastico d'elettrone*. Sia dato un atomo (o una molecola; vogliamo sempre parlare di "atomo") mediante la hamiltoniana $H^a(p,q)$ [11]; sia risolta l'equazione differenziale di Schrödinger per questo sistema e quindi si conoscano gli autovalori W_n^a e le autofunzioni $\psi_n^a(q)$ che soddisfano identicamente le equazioni

$$[H^a - W_n^a, \psi_n^a] = 0. \tag{1}$$

Un elettrone urti questo atomo; la hamiltoniana dell'elettrone libero è

$$H^\epsilon = \frac{1}{2\mu}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2),$$

gli autovalori sono tutti i numeri positivi W^ϵ e le autofunzioni sono

$$e^{\pm ik\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}}, \qquad k^2 = \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\, W^\epsilon; \tag{2}$$

la soluzione generale corrispondente a onde incidenti è

$$\psi_k^\epsilon = \int_{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}>0} c^0(\boldsymbol{s}) e^{ik\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s}} d\omega; \tag{3}$$

essa soddisfa l'equazione differenziale

$$[H^\epsilon - W^\epsilon, \psi_k^\epsilon] = 0 \quad \text{oppure} \quad \nabla^2\psi_k^\epsilon + k^2\psi_k^\epsilon = 0. \tag{4}$$

Tra l'atomo e l'elettrone ci sia l'energia potenziale

$$U(q; x, y, z). \tag{5}$$

L'interazione tra le due particelle porta alla hamiltoniana

$$H = H^0 + \lambda H^{(1)},$$

dove

$$\begin{cases} \quad H^0 = H^a + H^\epsilon, \\ \lambda H^{(1)} = U. \end{cases}$$

Il sistema imperturbato ha la soluzione

[11] Per brevità scriviamo p, q al posto di $p_1, p_2, \ldots p_f, q_1, \ldots, q_f$.

$$W^0_{n\,k} = W^a_n + W^\epsilon, \qquad \psi^0_{n\,k} = \psi^a_n\ \psi^\epsilon_k.$$

Risolviamo l'equazione differenziale di Schrödinger per il sistema perturbato

$$[H - W, \psi] = 0$$

con la posizione

$$\psi = \psi^0 + \lambda\psi^{(1)} + \ldots$$

Allora si ottengono le equazioni di approssimazione [168]

$$\begin{aligned}\left[H^0 - W^0_{n\,k}, \psi^{(1)}_{n\,k}\right] &= -U\psi^0_{n\,k},\\ \left[H^0 - W^0_{n\,k}, \psi^{(2)}_{n\,k}\right] &= -U\psi^{(1)}_{n\,k},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ &,\end{aligned}$$

i cui membri di sinistra coincidono. Esplicitamente le scriviamo

$$\left[H^a, \psi^{(1)}_{n\,k}\right] + \left[H^\epsilon, \psi^{(1)}_{n\,k}\right] - W^0_{n\,k}\psi^{(1)}_{n\,k} = -U\psi^0_{n\,k},$$

oppure

$$\left[H^a, \psi^{(1)}_{n\,k}\right] - \frac{h^2}{8\pi^2\mu}\nabla^2\psi^{(1)}_{n\,k} - W^0_{n\,k}\psi^{(1)}_{n\,k} = -U\psi^0_{n\,k}.$$

Cerchiamo di risolvere queste equazioni ponendo

$$\psi^{(1)}_{n\,k} = \sum_m u^{(1)}_{n\,m}(\boldsymbol{r})\psi^a_m,$$

cioè con uno sviluppo secondo le autofunzioni del solo atomo imperturbato, i cui coefficienti sono funzioni ancora indeterminate del vettore posizione $\boldsymbol{r}$ dell'elettrone [169].

Per la (1) ora è

[168] L'uso del coefficiente λ è in accordo con i consueti metodi della teoria delle perturbazioni classica: inserendo lo sviluppo in serie di potenze di λ per la funzione d'onda,

$$\psi = \psi^0 + \lambda\psi^{(1)} + \lambda^2\psi^{(2)} + \ldots,$$

nell'equazione agli autovalori

$$H\psi = W\psi,$$

con $W = W^0_{n\,k}$, e uguagliando a zero i coefficienti delle varie potenze di λ, si ottengono le equazioni ai vari ordini di approssimazione.

[169] Questa è quella che oggi comunemente viene indicata come approssimazione di Born.

$$\left[H^a, \psi^{(1)}_{n\,k}\right] = \sum_m u^{(1)}_{n\,m}(\boldsymbol{r})\,[H^a, \psi^a_m]$$
$$= \sum_m u^{(1)}_{n\,m}(\boldsymbol{r}) W^a_m \psi^a_m.$$

Sviluppiamo la funzione data dal membro di destra allo stesso modo:

$$U\psi^0_{n\,k} = \psi^\epsilon_k \cdot U\psi^a_n = \psi^\epsilon_k \sum_m U_{n\,m}\psi^a_m;$$

i coefficienti formano una matrice che corrisponde all'energia potenziale. Inserendo queste espressioni nell'equazione differenziale otteniamo

$$\sum_m \psi^a_m \left\{ u^{(1)}_{n\,m}(\boldsymbol{r}) W^a_m - \frac{h^2}{8\pi^2\mu}\nabla^2 u^{(1)}_{n\,m} - u^{(1)}_{n\,m}\left(W^a_n + W^\epsilon\right) \right\}$$
$$= -\sum_m \psi^a_m U_{n\,m}\psi^\epsilon_k.$$

Se si uguagliano i coefficienti di ψ^a_m si ricava un'equazione differenziale per $u^{(1)}_{n\,m}(\boldsymbol{r})$; moltiplicando questa per $-\frac{8\pi^2\mu}{h^2}$ e ponendo per brevità

$$V = \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\,U, \qquad V_{n\,m} = \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\,U_{n\,m}, \tag{6}$$

$$k^2_{n\,m} = \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(W^a_n - W^a_m + W^\epsilon\right) = \frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(h\nu^a_{n\,m} + W^\epsilon\right), \tag{7}$$

troviamo allora

$$\nabla^2 u^{(1)}_{n\,m} + k^2_{n\,m} u^{(1)}_{n\,m} = V_{n\,m}\psi^\epsilon_k. \tag{8}$$

Con ciò abbiamo ricondotto il problema a quello dell'urto anelastico trattato prima, in quanto anche tutte le successive approssimazioni portano alla stessa equazione d'onda. Rispetto a prima la differenza però è la seguente: a ogni transizione $(n \to m)$ dell'atomo corrisponde una particolare equazione differenziale il cui membro di destra è determinato dal corrispondente elemento di matrice dell'energia potenziale. Inoltre al posto del valore k-esimo dell'onda incidente interviene ogni volta un nuovo valore $k_{n\,m}$, corrispondente all'energia

$$W^\epsilon_{n\,m} = \frac{h^2}{8\pi^2\mu}k^2_{n\,m} = h\nu^a_{n\,m} + W^\epsilon. \tag{9}$$

Da ciò segue immediatamente la legge fondamentale qualitativa dell'urto di elettroni: l'energia dell'elettrone dopo l'urto non è in generale uguale a quella prima dell'urto, ma ne differisce per un salto d'energia $h\nu^a_{n\,m}$ dell'atomo. A ogni processo d'urto appartiene una funzione di probabilità

$$\Phi_{n\,m} = \pi^2 k^2_{n\,m} |f^\infty_0(-k_{n\,m}\boldsymbol{s})|^2, \tag{10}$$

che si può calcolare con l'aiuto delle formule (12) o (13), §6.

§8. *Conseguenze fisiche*. Mostriamo dapprima che le nostre formule riproducono correttamente il comportamento qualitativo dell'atomo durante l'urto, e cioè il fatto delle "soglie di energia" che sono sempre state riguardate come i pilastri fondamentali della teoria dei quanti e la più grossa contraddizione con la meccanica classica.

Ordiniamo i livelli energetici dell'atomo in modo che sia

$$W^a_0 < W^a_1 < W^a_2 < \dots$$

L'indice 0 indica dunque lo stato normale [170] e

$$h\nu^a_{n\,m} = W^a_n - W^a_m > 0 \quad \text{per} \quad n > m.$$

Consideriamo dapprima il caso che l'atomo all'inizio si trovi nello stato normale. Allora tutte le $\nu^a_{m0} > 0$ e dalla (9), §7, segue [171]

$$W^\epsilon_{0m} = W^\epsilon - h\nu^a_{m0}.$$

Ora, se $W^\epsilon < h\nu^a_{10}$, allora W^ϵ_{0m} diventerebbe negativo per $m > 0$, cosa che è impossibile; perciò deve essere $m = 0$, per cui

$$W^\epsilon_{00} = W^\epsilon.$$

Si verifica dunque riflessione "elastica" con funzione di conteggio Φ_{00}. Quando si lascia crescere W^ϵ fino a che sia

$$h\nu^a_{10} < W^\epsilon < h\nu^a_{20},$$

allora W^ϵ_{0m} diventa positivo solo per $m = 0$ e $m = 1$; quindi o si ha riflessione elastica con funzione di conteggio Φ_{00} oppure eccitazione risonante con funzione di conteggio Φ_{01}.

Quando W^ϵ cresce ulteriormente, finché è

$$h\nu^a_{20} < W^\epsilon < h\nu^a_{30},$$

[170] Cioè quello fondamentale.

[171] Per definizione è $\nu^a_{mn} = -\nu^a_{n\,m}$.

si verificano tre casi: riflessione elastica con funzione di conteggio Φ_{00}, eccitazione del primo salto quantico con funzione di conteggio Φ_{01}, eccitazione del secondo salto quantico con funzione di conteggio Φ_{02}. In modo uguale si va avanti.

Ora consideriamo il caso in cui l'atomo inizialmente sia nel secondo stato quantico $(n = 1)$; allora è $\nu_{10}^a > 0$ e $\nu_{1m}^a < 0$ per $m = 2, 3, \ldots$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} W_{10}^\epsilon &= W^\epsilon + h\nu_{10}^a, \\ W_{11}^\epsilon &= W^\epsilon, \\ W_{1m}^\epsilon &= W^\epsilon - h\nu_{m1}^a, \quad m = 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

Se ora $W^\epsilon < h\nu_{21}^a$, allora W_{1m}^ϵ è negativo per $m = 2, 3 \ldots$; perciò si dà solo o un urto di seconda specie, con acquisto da parte dell'elettrone dell'energia $h\nu_{10}^a$ e funzione di conteggio Φ_{10}, oppure riflessione elastica con funzione di conteggio Φ_{11}.

Se

$$h\nu_{21}^a < W^\epsilon < h\nu_{31}^a,$$

allora si aggiunge a questi processi anche l'eccitazione dello stato $n = 2$ con funzione di conteggio Φ_{12}. E così via.

Nel caso generale in cui l'atomo inizialmente sia nello stato n, per

$$W^\epsilon < h\nu_{n+1,n}^a$$

si hanno solo la riflessione elastica $\Phi_{n\,n}$ e urti di seconda specie, in cui l'atomo si diseccita verso gli stati $0, 1, \ldots, n-1$ e cede all'elettrone i valori di energia $h\nu_{n\,0}^a$, $h\nu_{n\,1}^a$,... $h\nu_{n\,,n-1}^a$, con funzione di conteggio $\Phi_{n\,0}$, $\Phi_{n\,1}$,... $\Phi_{n\,,n-1}$. Se W^ϵ cresce oltre $h\nu_{n+1,n}^a$ intervengono eccitazioni con funzione di conteggio $\Phi_{n\,,n+1}$,$\Phi_{n\,,n+2}$,$\Phi_{n\,,m}$, se

$$h\nu_{n+1,n}^a < W^\epsilon < h\nu_{m+1,n}^a.$$

Il compito successivo sarebbe la discussione della formula per la funzione di conteggio (10), §7; ma qui ci vogliamo accontentare di una considerazione completamente provvisoria e anche a buon diritto contestabile. Assumiamo che il potenziale U sia sviluppato in serie di potenze di r^{-1}; per un atomo neutro allora in prima approssimazione si ha il termine di dipolo

$$U(x, y, z) = \frac{e}{r^3}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{r}), \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{B}(q)$ è il momento elettrico dell'atomo. A questo assegnamo la matrice $B_{n\,m}$. Allora per la (6), §7, è

$$V_{n\,m} = \frac{8\pi^2 \mu e}{h^2} \left(B_{n\,m} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \right). \tag{2}$$

Naturalmente questa ipotesi può non essere corretta per gli elettroni che passano a considerevole distanza dall'atomo. Perciò limitiamo le nostre considerazioni a quegli elettroni per cui è $r > r_0$ [12)] [172] e quindi per la (13), §6, scriviamo

$$f_0^\infty(-k_{n\,m}\boldsymbol{s}) = \\ = \frac{1}{4\pi^2 i k_{n\,m}} \int_{r_0}^\infty \rho\, d\rho \left\{ F_{n\,m}(\rho \boldsymbol{s})\, e^{-i\rho k_{n\,m}} - F_{n\,m}(-\rho \boldsymbol{s})\, e^{i\rho k_{n\,m}} \right\}.$$

Ora assumiamo che gli elettroni incidenti costituiscano un fascio parallelo, corrispondente a un'onda piana; allora

$$F_{n\,m}(\rho \boldsymbol{s}) = V_{n\,m}\, e^{ik\rho s_z} = \frac{8\pi^2 \mu e}{h^2} (B_{n\,m}, \boldsymbol{s}) \frac{e^{ik\rho s_z}}{\rho^2}.$$

Ora si ottiene

$$i\pi k_{n\,m} f_0^\infty(-k_{n\,m}\boldsymbol{s}) = 4\pi \frac{\mu e}{h^2} (B_{n\,m}, \boldsymbol{s}) A, \tag{3}$$

dove per $s_z = \cos\theta$

$$A = \int_{r_0}^\infty \frac{d\rho}{\rho} \cos[\rho(k\cos\theta - k_{n\,m})], \tag{4}$$

oppure

$$A = -C_i(r_0[k\cos\theta - k_{n\,m}]), \tag{5}$$

dove $C_i(x)$ indica il coseno integrale [13)] [173].

Per la (10), §7, la funzione di conteggio diventa

---

12) L'esclusione di urti centrali significa che provvisoriamente si trascura l'interpretazione di un gruppo particolarmente interessante di fenomeni, e cioè la penetrabilità degli atomi da parte di elettroni lenti (effetto Ramsauer).

172 Cfr. n. 58 p. 26.

13) E. Jahnke e F. Emde, *Funktionentafeln*, Lipsia, 1909, p. 19.

173 Il coseno integrale è così definito:

$$C_i(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt.$$

Eugen Jahnke e Fritz Emde: *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*, Teubner, Berlino e Lipsia, 1909; edizione ampliata e tradotta in inglese: *Tables of Functions with Formulae and Curves*, Dover, New York, 1945.

$$\Phi_{n\,m} = \frac{16\pi^2\mu^2e^2}{h^4}|B_{n\,m}, \boldsymbol{s}|^2A^2. \tag{6}$$

Mediando infine su tutte le posizioni degli atomi, si annullano i valori medi dei prodotti di due componenti di $B_{n\,m}$ e i valori medi dei quadrati delle componenti diventano uguali a $\frac{1}{3}|P_{n\,m}|^2$, dove P indica il modulo del momento elettrico. Perciò si ottiene

$$\Phi_{n\,m} = \frac{16\pi^2\mu^2e^2}{3h^4}|P_{n\,m}|^2A^2. \tag{7}$$

Vogliamo brevemente discutere questa espressione per la funzione di conteggio.

Innanzi tutto si vede che nella nostra approssimazione la funzione di conteggio è proporzionale a $|P_{n\,m}|^2$, cioè per $m \neq n$ ai coefficienti della probabilità di transizione $b_{n\,m}$ della teoria della radiazione di Einstein, che corrispondono ai processi di assorbimento e di emissione indotta in presenza di campo di radiazione (non alle probabilità dell'emissione spontanea di radiazione $a_{n\,m} = (8\pi h\nu^3_{n\,m}/c^3)b_{n\,m}$) [14)] [174].

Il conteggio delle riflessioni elastiche è proporzionale a $|P_{n\,n}|^2$, una quantità che in ottica non è operativa. Gli elementi diagonali della matrice $P_{n\,m}$ diventano in generale nulli [15)], eccetto che nei pochi casi in cui esiste un effetto Stark lineare (come per l'atomo di idrogeno) [175]. Pauli mi ha comunicato di

---

14) J.H. van Vleck, Phys. Rev. **23**, 330, 1924; Journ. Opt. Soc. Amer. **9**, 27, 1924. M. Born e P. Jordan, Zs. f. Phys. **33**, 479, 1925.

174 J.H. van Vleck: *The specific heat of an elastic gyroscopic model of the hydrogen molecule [Il calore specifico di un modello giroscopico elastico della molecola di idrogeno]*, Physical Review **23** (1924) 308; *A Correspondence Principle for Absorption [Un principio di corrispondenza per l'assorbimento]*, Journal of the Optical Society of America and Reviews of Scientific Instruments **9** (1924) 27–30.
Per John Hasbrouck van Vleck, cfr. n. 60 p. 26. Nel secondo dei lavori citati viene calcolato il ritmo di assorbimento di energia da parte di un elettrone su di un'orbita molteplicemente periodica posta nel campo di radiazione, precedendo così l'analogo calcolo di Kramers già citato.

15) Per un oscillatore armonico per esempio essi sono nulli, per uno anarmonico sono diversi da zero.

175 L'effetto Stark consiste nella separazione di righe dello spettro provocate dall'applicazione di un campo elettrico ed è quindi analogo a quello provocato dal campo magnetico e già messo in evidenza nel 1895 da Pieter Zeeman (1865–1943). Esso fu previsto teoricamente da Woldemar Voigt (1850–1919), che però stimò la separazione troppo piccola per essere messa in evidenza. Invece l'effetto fu misurato indipendentemente e contemporaneamente da Johannes Stark (1874–1957) e da Antonino Lo Surdo (1880–1949). Stark fu premiato col Nobel per la Fisica del 1919.
W. Voigt: *Über das elektrische Analogon des Zeeman-Effektes [Analogo elettrico dell'effetto Zeeman]*, Annalen der Physik **4** (1901) 197–208.
J. Stark: *Beobachtung über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien [Osservazione dell'effetto del campo elettrico sulle righe spettrali]*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin) (1913) 932–946; Annalen der Physik **43**

essere riuscito a derivare l'annullarsi dei termini diagonali del momento di quadrupolo e dei momenti di ordine superiore per i termini s degli alcalini e gli stati normali dei gas nobili e delle terre rare, un risultato che riflette esattamente la simmetria sferica della regione d'azione dell'atomo [176]. La nostra approssimazione quindi non basta per il calcolo delle riflessioni elastiche, per cui occorre spingere l'approssimazione un passo più avanti. Ciò è innanzi tutto necessario per avere la possibilità di verificare la nostra teoria con la grande quantità di osservazioni (Lenard a altri) sul libero cammino degli elettroni nei gas non eccitati [177]. Senza un preciso calcolo si può capire che la funzione di conteggio viene determinata da termini che sono del quarto ordine in $P_{n\,m}$. Questi termini naturalmente sono molto più piccoli di $|P_{n\,m}|^2$. Perciò possiamo capire che la sezione normale dell'atomo ($n = 0$) per elettroni lenti è molto più piccola (dell'ordine di grandezza degli effetti "cinetici" nei gas) di quella per elettroni veloci, che possono produrre eccitazione [16)].

(1914) 965–982.
A. Lo Surdo: *Sul fenomeno analogo a quello di Zeeman nel campo elettrico*, Atti della Reale Accademia dei Lincei **22** (1913) 664–666.

[176] L'effetto Stark lineare esiste solo in sistemi dotati di momento di dipolo permanente, altrimenti per ragioni di simmetria legate alla conservazione della parità l'effetto lineare si azzera e occorre considerare quello quadratico, proporzionale alla potenza quarta di $P_{n\,m}$, come dirà tra breve Born. Pauli aveva affrontato il problema già nella sua spiegazione dell'atomo di idrogeno alla luce della meccanica delle matrici.
Wolfgang Pauli: *Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik [Lo spettro dell'idrogeno dal punto di vista della nuova meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **36** (1926) 336–363.

[177] Philipp Eduard Anton von Lenard (1862–1947) portò a termine un'accurata analisi dell'effetto fotoelettrico che fu la base sperimentale per la teoria di Einstein. Con i suoi studi sulle collisioni tra elettroni e atomi Lenard aveva anche contribuito in modo essenziale alle prime conoscenze sulla dinamica atomica. Per i suoi lavori sui raggi catodici fu insignito del premio Nobel per la Fisica nel 1905.
P. Lenard: *Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht [Produzione di raggi catodici mediante luce ultravioletta]*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Wien) **108** (1899) 1649-1666; *Über die Lichtelektrische Wirkung [L'effetto fotoelettrico]*, Annalen der Physik **8** (1902) 149–198; *Über die Beobachtung langsamer Kathodenstrahlen mit Hilfe der Phosphoreszenz und über die Sekundärentstehung von Kathodenstrahlen [Osservazione di raggi catodici lenti con l'aiuto della fosforescenza e formazione di raggi catodici secondari]*, Annalen der Physik **12** (1903) 449–490; *Über die Absorption von Kathodenstrahlen verschiedener Geschwindigkeit [Assorbimento di raggi catodici di diverse velocità]*, Annalen der Physik **12** (1903) 714–744.
Ma anche Franck e Hertz, dopo aver confermato l'ipotizzata esistenza di stati stazionari per gli elettroni negli atomi, si erano dedicati allo studio dell'urto di elettroni lenti su atomi con indagini parallele a quelle che portarono a scoprire il già citato effetto Ramsauer.
J. Franck e G. Hertz: *Über Kinetik von Elekronen und Ionen in Gases [Cinetica degli elettroni e degli ioni nei gas]*, Physikalische Zeitschrift **17** (1916) 409–416; *Die Bestätitung der Bohrschen Atomtheorie im optischen Spektrum durch Untersuchungen der unelastischen Zusammenstösse langsamer Elektronen mit Gasmolekülen [Conferma della teoria atomica di Bohr dello spettro ottico mediante studio degli urti anelastici di elettroni lenti con molecole di gas]*, Physikalische Zeitschrift **20** (1919) 132-143.

[16)] Una letteratura su ciò si trova nel libro appena apparso di J. Franck e P. Jordan, *Anregung von Quantensprüngen durch Stosse* (Berlino, J. Springer, 1926).

La dipendenza della funzione di conteggio dalla direzione viene determinata dalla funzione A^2 secondo la (5). Essa corrisponde chiaramente a un *fenomeno di diffrazione*.

Questa conseguenza della teoria di de Broglie è stata tratta già da circa un anno da W. Elsasser [17)] [178]. Nel prendere sul serio la rappresentazione ondulatoria egli concluse che gli elettroni lenti dovevano essere deviati dagli atomi in modo tale che la loro distribuzione dopo l'urto corrispondesse circa all'intensità della luce diffratta da una sferetta [18)] [179]. Con ciò egli collegò le osservazioni di Ramsauer sul libero cammino degli elettroni [19)] con l'esperimento di Davisson e Kunsman [20)] [180] sulla distribuzione angolare degli elettroni riflessi da una piastra di platino. Nel frattempo la correttezza delle considerazioni è stata dimostrata sperimentalmente da Dymond [21)] [181], che ha osservato direttamente la comparsa di massimi di interferenza prodotti da elettroni riflessi da elio. È necessaria una verifica successiva delle nostre formule

---

[17)] W. Elsasser, Die Naturwiss. **13**, 711, 1925. La relazione dimensionale che è alla base delle considerazioni di Elsasser riposa sulla formula di de Broglie per la lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{\sqrt{2\mu W}}.$$

Per raggi da 300 Volt si ha circa $\lambda = 7 \times 10^{-9}$ cm, e quindi onde di dimensioni atomiche.

[178] Cfr. n. 45 a p. 22.

[18)] K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss., p. 293, 1901; G. Mie, Ann. d. Phys. **25**, 377, 1908; P. Debye, Ann. d. Phys. **30**, 57, 1909.

[179] Karl Schwarzschild (1873–1916) fu uno dei primi a studiare teoricamente la radiazione emessa o assorbita dagli elettroni negli atomi. Si dedicò poi a studi di relatività generale, dando la soluzione delle equazioni fondamentali di Einstein con la scoperta della cosiddetta "singolarità di Schwarzschild".
Gustav Mie (1868–1957) calcolò rigorosamente con l'elettrodinamica classica la diffrazione di luce da parte di particelle sferiche sia dielettriche che conduttrici. L'asimmetria della distribuzione di intensità, nota come effetto Mie, è importante nello studio degli aggregati, siano essi molecole in soluzione o ammassi nel mezzo interstellare.
G. Mie: *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen [Contributi all'ottica di mezzi torbidi, specialmente di soluzioni metalliche colloidali],* Annalen der Physik **25** (1908) 377–445.
P. Debye: *Der Lichtdruck auf Kugeln von beliebigen Material [La pressione di luce su sfere di un materiale qualsiasi]*, Annalen der Physik **30** (1909) 57–136.

[19)] C. Ramsauer, Ann. d. Phys. **64**, 513, 1921; **66**, 546, 1921; **72**, 345, 1923. Per ulteriore letteratura si veda l'articolo di R. Minkowski e H. Sponer in Ergebnisse der exakten Wissenschaften, terzo volume (Berlino, J. Springer, 1924), p. 67.

[20)] Davisson e Kunsman, Phys. Rev. **22**, 243, 1923.

[180] Clinton Joseph Davisson e Charles Henry Kunsman: *The scattering of low speed electrons by platinum and magnesium [Diffusione di elettroni di bassa velocità da parte di platino e magnesio],* Physical Review **22** (1923) 243–258.

[21)] Dymond, Nature (in corso di pubblicazione; per la conoscenza di questo lavoro sono grato a uno sguardo dato a una lettera indirizzata da Dymond a J. Franck).

[181] E.G. Dymond: *Scattering of electrons in helium [Diffusione di elettroni in elio]*, Nature **118** (1926) 336–337.

alla luce dei dati osservati.

§9. *Osservazioni conclusive*. Sulla base delle considerazioni qui presentate vorrei esprimere l'opinione che la meccanica quantistica permette di formulare e risolvere non solo il problema degli stati stazionari, ma anche quello dei processi di transizione. In ciò la formulazione di Schrödinger sembra di gran lunga quella in grado di giustificare lo stato dei fatti nel modo più semplice; inoltre, essa rende possibile la conservazione delle consuete rappresentazioni di spazio e tempo in cui gli eventi si svolgono nel modo più normale. D'altra parte la teoria proposta non corrisponde al requisito della determinazione causale del singolo evento. Nella mia precedente comunicazione ho sottolineato questo indeterminismo in modo del tutto particolare in quanto mi sembra nel miglior accordo con la prassi dello sperimentatore. Ma naturalmente nulla vieta che chiunque non si voglia sentire tranquillo su questo punto faccia l'ipotesi che ci siano altri parametri, non ancora introdotti nella teoria, che determinano il singolo evento [182]. Nella meccanica classica questi sono le "fasi" del moto, per esempio le coordinate delle particelle a un certo istante. Mi sembra in primo luogo inverosimile che quantità corrispondenti a queste fasi si possano inserire liberamente nella nuova teoria; ma Frenkel [183] mi ha comunicato che forse ciò è possibile. Comunque ciò possa essere, questa possibilità non altererebbe alcunché nel caso dell'indeterminismo pratico nei processi d'urto, in quanto non si riesce proprio a dare i valori delle fasi; inoltre si dovrebbero ottenere le stesse formule della teoria "senza fasi" qui presentata.

Vorrei credere che le leggi di moto dei quanti di luce si possano trattare in modo totalmente analogo [22)]. Solo che nel problema fondamentale della radiazione libera non si ha alcun processo periodico nel tempo, ma un processo di smorzamento, quindi non un problema di condizioni al contorno, ma di condizioni iniziali per le equazioni d'onda accoppiate della funzione ψ di

---

[182] È preconizzata, ma secondo il punto di vista di un artefice della meccanica delle matrici, l'idea di de Broglie (e più tardi di David Bohm) dell'esistenza di variabili nascoste che consenta un recupero della descrizione deterministica. Per una discussione delle idee di de Broglie, cfr. in questa collana il Quaderno *Onde di materia e onde di probabilità*.

[183] Jakov Il'ich Frenkel (1894–1952), lavorando a Leningrado (S. Pietroburgo), diede importanti contributi allo studio della struttura della materia, elaborando la prima teoria dei metalli basata sulla meccanica quantistica. È noto il "difetto di Frenkel", costituito dalla perturbazione introdotta in una matrice cristallina dall'interazione tra un'interstiziale e la corrispondente vacanza. È anche autore di un testo fondamentale sulla teoria cinetica dei liquidi e di un'esposizione della meccanica quantistica in due volumi.
J. Frenkel: *Kinetic Theory of Liquids*, Clarendon Press, Oxford, 1946.
J. Frenkel: *Wave Mechanics. Elementary Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1936; seconda ed., Dover, New York, 1950.
J. Frenkel: *Wave Mechanics. Advanced General Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1934; seconda ed., Dover, New York, 1950.

[22)] Le difficoltà incontrate finora nell'introduzione dei "campi fantasma" in ottica mi sembrano in parte basati sull'assunzione fatta tacitamente che il centro delle onde e la particella emittente si debbano trovare nello stesso posto. Ma questo già almeno nell'effetto Compton non è sicuramente il caso ed è probabile che in generale non lo si ritroverà più.

Schrödinger e del campo elettromagnetico. Studiare le leggi di questo accoppiamento è ben un problema urgentissimo; per quanto ne so, vi si lavora da più parti [23)] [184]. Una volta formulate queste leggi, sarà forse possibile delineare una teoria razionale del tempo di vita degli stati, della probabilità di transizione in processi di radiazione, dello smorzamento e della larghezza di riga.

---

23) Si veda, per esempio, la trattazione appena apparsa di O. Klein, Zs. f. Phys. **37**, 895, 1926.

184 È il tentativo di dare una teoria unificata quantistica che includa il campo elettromagnetico nella relatività generale, estendendo lo spazio delle configurazioni a cinque dimensioni: il formalismo è tuttora interessante e va sotto il nome di teoria di Kaluza–Klein dai nomi del matematico Theodor Kaluza (1885–1954) e di Oskar Benjamin Klein (1894–1977).
O. Klein: *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie [Teoria dei quanti e teoria della relatività in cinque dimensioni]*, Zeitschrift für Physik **37** (1926) 895–906.

§ **Appendice: cronologia di articoli significativi**

Data di ricezione e di pubblicazione degli articoli

Articolo	Ricevuto	Pubblicato
H 1	29 luglio 1925	18 settembre 1925
B J	27 settembre 1925	28 novembre 1925
D 1	7 novembre 1925	1 dicembre 1925
BHJ	16 novembre 1925	4 febbraio 1926
B W	5 gennaio 1926	12 marzo 1926
P 1	17 gennaio 1926	27 marzo 1926
D 2	22 gennaio 1926	1 marzo 1926
S 1	27 gennaio 1926	13 marzo 1926
S 2	23 febbraio 1926	6 aprile 1926
S E	18 marzo 1926	4 maggio 1926
D 3	27 marzo 1926	1 maggio 1926
D 4	29 aprile 1926	2 giugno 1926
S 3	10 maggio 1926	13 luglio 1926
S I	giugno 1926	9 luglio 1926
S 4	21 giugno 1926	5 settembre 1926
B 1	25 giugno 1926	10 luglio 1926
B 2	21 luglio 1926	14 settembre 1926
D 5	26 agosto 1926	1 ottobre 1926
B 3	16 ottobre 1926	6 dicembre 1926
F	23 ottobre 1926	8 dicembre 1926
M	25 ottobre 1926	8 dicembre 1926
D 6	2 dicembre 1926	1 gennaio 1927
P 2	16 dicembre 1926	10 febbraio 1927
D 7	2 febbraio 1927	1 marzo 1927
H 2	23 marzo 1927	31 maggio 1927
D 8	4 aprile 1927	2 maggio 1927
D 9	28 giugno 1927	23 agosto 1927

Le sigle relative agli articoli corrispondono all'elenco che segue.

In questa Appendice vengono elencati, con la data del loro ricevimento da parte della rivista e quella della loro pubblicazione, quegli articoli che sono ritenuti i più significativi per lo sviluppo di idee che hanno portato all'odierna intrepretazione statistica della meccanica quantistica. L'elenco è limitato agli articoli su riviste pubblicati nell'arco di due anni, a partire dal primo lavoro di Heisenberg che dà origine alla meccanica delle matrici per chiudere con quello di Dirac sui processi d'urto che riformula i lavori di Born nello spazio degli impulsi. Nell'elenco compaiono anche alcuni lavori normalmente tralasciati, ma che hanno avuto un certo ruolo per gli argomenti discussi in questo Quaderno. La rapida successione cronologica degli articoli di questo elenco, oltre che impressionare lo storico per la velocità con cui si è verificato il riorientamento di prospettiva una volta imbattuta la strada giusta, può aiutare a stabilire anche priorità e concatenazione di idee, anche se naturalmente i vari autori spesso erano tra di loro in contatto anche epistolare e si incontravano periodicamente per seminari e conferenze.

Articoli

H 1 W. Heisenberg: *Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen [Reinterpretazione di relazioni cinematiche e meccaniche in termini di teoria dei quanti]*, Zeitschrift für Physik **33** (1925) 879-893

BJ M. Born e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik [Meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **34** (1925) 858–888

D 1 P.A.M. Dirac: *The Fundamental Equations of Quantum Mechanics [Le equazioni fondamentali della meccanica quantistica]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 109** (1925) 642–653

BHJ M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik II [Meccanica quantistica II]*, Zeitschrift für Physik **35** (1926) 557–615

B W M. Born e N. Wiener: *Eine neue Formulierung der Quantengesetze für periodische und nicht periodische Vorgänge [Una nuova formulazione per i processi periodici e non periodici]*, Zeitschrift für Physik **36** (1926) 174–187

P 1 W. Pauli: *Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neueren Quantenmechanik [Lo spettro dell'idrogeno dal punto di vista della nuova meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **36** (1926) 336–363

D 2 P.A.M. Dirac: *Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom [Meccanica quantistica e un'indagine preliminare dell'atomo di idrogeno]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 110** (1926) 561–579

S 1 E. Schrödinger: *Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung) [Quantizzazione come problema agli autovalori (prima comunicazione)]*, Annalen der Physik **79** (1926) 361–376

S 2 E. Schrödinger: *Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung) [Quantizzazione come problema agli autovalori (seconda comunicazione)]*, Annalen der Physik **79** (1926) 489–527

S E E. Schrödinger: *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen [Relazione tra la meccanica quantistica di Heisenberg-Born-Jordan e la mia]*, Annalen der Physik **79** (1926) 734–756

D 3 P.A.M. Dirac: *The Elimination of the Nodes in Quantum Mechanics [L'eliminazione dei nodi in meccanica quantistica]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 111** (1926) 281–305

D 4 P.A.M. Dirac: *Relativity Quantum Mechanics with an Application to Compton Scattering [Meccanica quantistica relativistica con un'applicazione alla diffusione Compton]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 111** (1926) 405–423

S 3 E. Schrödinger: *Quantisierung als Eigenwertproblem (Dritte Mitteilung) [Quantizzazione come problema agli autovalori (terza comunicazione)]*, Annalen der Physik **80** (1926) 437–490

S I E. Schrödinger: *Der stetige Übergang von der Mikro– zur Makromechanik [Il passaggio continuo dalla micro– alla macromeccanica]*, Die Naturwissenschaften **14** (1926) 664–666

S 4 E. Schrödinger: *Quantisierung als Eigenwertproblem (Vierte Mitteilung) [Quantizzazione come problema agli autovalori (quarta comunicazione)]*, Annalen der Physik **81** (1926) 109–139

B 1 M. Born: *Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge (Vorläufige Mitteilung) [Meccanica quantistica dei processi d'urto (Comunicazione preliminare)]*, Zeitschrift für Physik **36** (1926) 863–867

B 2 M. Born: *Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, Zeitschrift für Physik **38** (1926) 803–827

D 5 P.A.M. Dirac: *On the Theory of Quantum Mechanics [Sulla teoria della meccanica quantistica]*, Proceeding of the Royal Society of London **A 112** (1926) 661–677

B 3 M. Born: *Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik [Il principio adiabatico nella meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **40** (1927) 167–192

F E. Fermi: *Zur Wellenmechanik des Stossvorgänges [Meccanica ondulatoria del processo d'urto]*, Zeitschrift für Physik **40** (1927) 399–402

M E. Madelung: *Quantentheorie in hydrodynamischer Form [Teoria quantistica in forma idrodinamica]*, Zeitschrift für Physik **40** (1927) 322–326

D 6 P.A.M. Dirac: *The Physical Interpretation of the Quantum Mechanics [L'interpretazione fisica della meccanica quantistica]*, Proceeding of the Royal Society of London **A 113** (1926) 621–641

P 2 W. Pauli: *Über Gasentartung und Paramagnetismus [Gas degenere e paramagnetismo]*, Zeitschrift für Physik **41** (1927) 81–102

D 7 P.A.M. Dirac: *The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation [La teoria quantistica dell'emissione e dell'assorbimento di* *radiazione]*, Proceeding of the Royal Society of London **A 114** (1927) 243–265

H 2 W. Heisenberg: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik [Il contenuto intuitivo della cinematica e della meccanica nella teoria quantistica]*, Zeitschrift für Physik **43** (1927) 172–198

D 8 P.A.M. Dirac: *The Quantum Theory of Dispersion [La teoria quantistica della dispersione]*, Proceeding of the Royal Society of London **A 113** (1926) 621–641

D 9 P.A.M. Dirac: *Über die Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, Zeitschrift für Physik **44** (1927) 585–595

QUADERNI DI FISICA TEORICA
Collana curata da Sigfrido Boffi

1. Le onde di de Broglie
2. Onde di materia e onde di probabilità
3. Il principio di indeterminazione
4. La meccanica delle onde
5. Paradosso EPR e teorema di Bell
6. I cammini di Feynman
7. L'interpretazione statistica della meccanica quantistica

QUADERNI DI FISICA TEORICA
Collana curata da Sigfrido Boffi

Dopo un primo biennio, in cui ha rivisto con maggiori dettagli e approfondimenti lo sviluppo della fisica classica e ha imparato a destreggiarsi con alcuni aspetti del formalismo matematico necessario, lo studente del Corso di Laurea in Fisica è costretto ad affrontare un nuovo modo di descrivere la natura che ormai il ricercatore professionale ha fatto suo da oltre mezzo secolo, ma che tuttora risulta estraneo al cosiddetto senso comune. L'impatto è principalmente difficile nel corso di Istituzioni di Fisica Teorica, che è tradizionalmente dedicato all'esposizione dei metodi teorici della meccanica quantistica così come si sono sviluppati nella prima metà del nostro secolo. Sembra perciò utile proporre, con questa collana di "*Quaderni di Fisica Teorica*", un tema, o un autore, attraverso la lettura commentata di uno o più articoli originali. Lo studente si accorgerà allora che le teorie organicamente presentate nei suoi manuali, necessarie per la pratica scientifica attuale, sono piuttosto il risultato di un lungo travaglio di idee, tentativi, successi, difficoltà, e infine di scelte, che sono sempre presenti nell'avventura dell'uomo animato dal desiderio invincibile di capire. Sarà dunque preparato, al termine dei suoi studi durante i quali si è impadronito in breve tempo dei risultati fondamentali ottenuti nell'arco di secoli, ad affrontare a sua volta, come giovane ricercatore, un cammino pieno di trabocchetti, ma anche ricco di soddisfazioni.

L'INTERPRETAZIONE STATISTICA DELLA MECCANICA QUANTISTICA

Vengono presentati, tradotti in italiano e commentati, i due lavori che Max Born scrisse nel 1926 subito dopo la comparsa della seconda comunicazione di Schrödinger con la proposta dell'equazione d'onda. I lavori trattano i processi d'urto e sono per questo ritenuti ancor oggi fondamentali, ma allo stesso tempo suggeriscono la corretta interpretazione della funzione d'onda di Schrödinger. Uno sguardo retrospettivo alla genesi di questa interpretazione viene inoltre offerto dal testo del discorso tenuto da Born nel 1954 in occasione del ricevimento del premio Nobel per la Fisica.

ISBN 88–85159–07–9