Spazio di Hilbert

David Hilbert (1862–1943)

stato del sistema $\Leftrightarrow \Psi \in \mathcal{L}^2$ $\quad \left(\int d\boldsymbol{r} \Psi^*(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r}) = 1 \right)$

spazio $\mathcal{L}^2 =$ spazio vettoriale (lineare) complesso

i.e. $\quad \forall\ \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow \Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 \in \mathcal{L}^2$

$\mathcal{L}^2$ strutturato in spazio di Hilbert definendo il prodotto scalare tra due classi di funzioni $f, g \in \mathcal{L}^2$:

$$\boxed{\langle f|g\rangle = \int d\boldsymbol{r}\, f^*(\boldsymbol{r})\, g(\boldsymbol{r})}$$

proprietà:

- $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle^*$
- $\langle f|a_1 g_1 + a_2 g_2\rangle = a_1\langle f|g_1\rangle + a_2\langle f|g_2\rangle$
- $\langle a_1 f_1 + a_2 f_2|g\rangle = a_1^*\langle f_1|g\rangle + a_2^*\langle f_2|g\rangle$
- $\langle f|g\rangle = 0 \Rightarrow f, g$ ortogonali
- $\langle f|f\rangle \geq 0$ norma di f $\quad$ ($= 0$ se e solo se $f \equiv 0$)