

## IX. LO SPIN

Lo studio quantistico di una particella carica sottoposta all'azione di un campo magnetico pone interessanti problemi da un punto di vista sia concettuale, sia formale. L'equazione di Schrödinger per una particella viene a dipendere esplicitamente dal potenziale vettore che origina il campo magnetico e che classicamente non è osservabile. Ne risulta una sensibilità al potenziale vettore da parte della funzione d'onda che, per salvaguardare i postulati interpretativi e l'equazione di continuità associata all'equazione di Schrödinger, richiede una ridefinizione contestuale della funzione stessa quando si operino trasformazioni di gauge sui potenziali elettromagnetici. D'altra parte la dipendenza della soluzione particolare dal potenziale vettore adotta la strada a uno studio dell'effetto prodotto dal campo magnetico che va sotto il nome di effetto di Aharonov–Bohm<sup>1</sup> e che è tuttora oggetto d'indagine sperimentale e di discussione.

Un secondo aspetto importante messo in luce dall'azione del campo magnetico su di una particella carica è l'evidenza di un nuovo grado di libertà interno, chiamato *spin*, senza analogo classico, di cui sono dotate particelle come per esempio l'elettrone. L'effetto di un campo magnetico su particelle cariche in moto era ben noto anche prima dell'avvento della meccanica quantistica. In particolare le ricerche di Pieter Zeeman (1865–1943) sulle proprietà magneto–ottiche della materia ave-

---

<sup>1</sup> Yu. Aharonov e D. Bohm: *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory* [Significato dei potenziali elettromagnetici nella teoria quantistica], *Physical Review* **115** (1959) 485–491; *Further Considerations on Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory* [Ulteriori considerazioni sui potenziali elettromagnetici nella teoria quantistica], *Physical Review* **123** (1961) 1511–1524.

Tuttavia, il problema associato all'arbitrarietà del potenziale vettore era già stato affrontato nel calcolo dell'indice di rifrazione in ottica elettronica e del cammino ottico di un elettrone in presenza di campo magnetico.

W. Ehrenburg e R.E. Siday: *The refractive index in electron optics and the principles of dynamics* [L'indice di rifrazione in ottica elettronica e i principi della dinamica], *Proceedings of the Physical Society (London)* **B62** (1949) 8–21.

vano messo in luce negli anni 1896–1897 un infittirsi delle righe degli spettri atomici dovute a sdoppiamenti multipli delle righe stesse in presenza di campo magnetico <sup>2</sup>. In questa sede non è possibile entrare nei dettagli della fenomenologia di questo effetto: come hanno mostrato Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) e Joseph Larmor (1857–1942), in larga misura l'effetto è spiegabile anche in termini classici ipotizzando che l'orbita dell'elettrone sottoposta al campo magnetico si comporti come una spira percorsa da corrente <sup>3</sup>. In questo capitolo si considera l'effetto Zeeman al puro scopo di capirne soprattutto alcuni aspetti collegati con quello definito anomalo da Alfred Landé (1888–1975) <sup>4</sup> e interpretabili solo postulando il nuovo grado di libertà di spin.

L'ipotesi dello spin dell'elettrone fu introdotta nel 1925 da George Eugene Uhlenbeck (1900–1988) e Samuel Abraham Goudsmit (1902–1978) <sup>5</sup>. L'idea si basava anche sui risultati dell'esperimento, condotto da Otto Stern e Walter Gerlach (cfr. paragrafo II.5): oltre a permettere la prima misura del magnetone di Bohr, lo sdoppiamento del fascio atomico provocato dall'interazione degli elettroni con un campo magnetico chiaramente indicava la quantizzazione a due valori dei possibili orientamenti della direzione dello spin nello spazio <sup>6</sup>.

Il fisico viennese Wolfgang Pauli (1900–1958) ha studiato per primo lo spin in un ambito non relativistico, introducendolo nella formulazione quantistica come un operatore senza analogo classico e scrivendo l'equazione di Schrödinger per una particella dotata di spin in interazione col campo magnetico <sup>7</sup>. In realtà lo spin ha un'origine relativistica, messa in luce da Paul Adrien Maurice Dirac (1901–1984) nel discutere l'equazione relativistica da lui proposta per l'elettrone; una riduzione non

---

<sup>2</sup> P. Zeeman: *On the influence of magnetism on the nature of the light emitted by a substance* [Influenza del campo magnetico sulla natura della luce emessa da una sostanza], *Philosophical Magazine* **43** (1897) 226–239.

<sup>3</sup> H.A. Lorentz: *Über den Einfluss magnetischen Kräfte auf die Emission des Lichtes* [Influenza della forza magnetica sull'emissione della luce], *Annalen der Physik* **63** (1897) 278–284.

J. Larmor: *On the theory of the magnetic influence on spectra; and on the radiation from moving ions* [Teoria dell'influenza magnetica sugli spettri e sulla radiazione da parte di ioni in moto], *Philosophical Magazine* **44** (1897) 503–512.

<sup>4</sup> Lo sdoppiamento delle righe provocate dalla presenza di un campo magnetico esterno poteva essere in larga misura spiegato mediante le leggi dell'elettromagnetismo classico. Tuttavia lo sdoppiamento di alcune righe dei metalli alcalini, come le righe D<sub>1</sub> e D<sub>2</sub> del sodio, non è comprensibile classicamente, come sottolineato da Landé.

A. Landé: *Über den anomalen Zeemaneffekt. I* [Effetto Zeeman anomalo. I], *Zeitschrift für Physik* **5** (1921) 231–241; *Über den anomalen Zeemaneffekt. II* [Effetto Zeeman anomalo. II], *Zeitschrift für Physik* **7** (1921) 398–405.

<sup>5</sup> G.E. Uhlenbeck e S.A. Goudsmit: *Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons* [Sostituzione dell'ipotesi di uno sforzo non meccanico con un postulato riguardante il comportamento interno di ogni singolo elettrone], *Die Naturwissenschaften* **13** (1925) 953–954.

Per una breve storia sulle discussioni provocate da questa idea, v. Max Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Theory* (McGraw Hill, New York, 1966), p. 149–151.

<sup>6</sup> Cfr. n. 65 p. 99.

<sup>7</sup> W. Pauli: *Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons* [Meccanica quantistica dell'elettrone magnetico], *Zeitschrift für Physik* **43** (1927) 601–623.

relativistica dell'equazione di Dirac per l'elettrone in presenza di campo magnetico diventa l'equazione di Pauli <sup>8</sup>.

Lo spin ha le proprietà di un momento angolare intrinseco e si somma al momento angolare classico. Si pone perciò il problema della composizione di due momenti angolari e dello studio degli effetti di interazione tra il moto della particella e il suo grado di libertà interno di spin, responsabili di una struttura fine delle righe degli spettri atomici.

### *IX.1. Elettrone in campo magnetico e invarianza di gauge*

Nell'Esempio I.3.3 è stata studiata la hamiltoniana classica di una particella di carica  $Q$  sottoposta a un campo elettromagnetico e si è visto che la semplice sostituzione minimale (I.3.58) permette di ottenere la corrispondente hamiltoniana (I.3.57), che qui si riscrive per un elettrone di carica  $Q = -e$  ( $e > 0$ ),

$$H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - eV, \quad (1.1)$$

dove  $\mathbf{A}$  è il potenziale vettore e  $V$  il potenziale scalare del campo elettromagnetico. Una volta nota la hamiltoniana, si può scrivere l'equazione di Schrödinger nello spazio delle coordinate:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= H\Psi \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 - eV \right] \Psi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Nello sviluppare il quadrato a secondo membro occorre prestare attenzione al fatto che l'operatore  $\nabla$  in generale non commuta con  $\mathbf{A}$ , in quanto  $\mathbf{A}$  può dipendere dalle coordinate. Pertanto

$$\left( \nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi = \nabla^2 \Psi + \frac{ie}{\hbar c} \nabla \cdot (\mathbf{A} \Psi) + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi - \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} A^2 \Psi. \quad (1.3)$$

Conviene porsi nel gauge di Coulomb, che è adatto anche al caso di radiazione nel vuoto,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.4)$$

Perciò la (1.3) diventa

---

<sup>8</sup> P.A.M. Dirac: *The quantum theory of the electron [Teoria quantistica dell'elettrone]*, Proceedings of the Royal Society of London **A117** (1928) 610–624; **118** (1928) 351–361.

Lo spin

$$\left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2 \Psi = \nabla^2 \Psi + \frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A} \cdot \nabla \Psi - \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} A^2 \Psi \quad (1.5)$$

e quindi l'equazione di Schrödinger si scrive

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{ie\hbar}{mc} \mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 - eV \right] \Psi. \quad (1.6)$$

Nell'equazione di Schrödinger compaiono i potenziali  $\mathbf{A}$  e  $V$  del campo elettromagnetico e non il campo elettrico  $\mathbf{E}$  e il campo magnetico  $\mathbf{B}$ , che sono le quantità classicamente osservabili. D'altra parte i potenziali sono sempre definiti a meno di una trasformazione di gauge e gli stessi campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  sono ottenuti con i potenziali (cfr. eq. (I.3.25)):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \phi, \\ V' &= V - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove  $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$  è una funzione arbitraria purché derivabile. Perciò, in presenza degli stessi campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , la soluzione  $\Psi$  viene a dipendere dai potenziali  $\mathbf{A}$  e  $V$  utilizzati nella (1.2). Per questa ambiguità nella definizione della funzione d'onda  $\Psi$ , legata alla scelta dei potenziali del campo elettromagnetico, si potrebbe allora insinuare il dubbio che i risultati della teoria vengano a dipendere dalla scelta di  $\mathbf{A}$  e  $V$ . In realtà però questa ambiguità può essere risolta se, accanto alla trasformazione (1.7), si definisce la funzione d'onda  $\Psi'$  mediante la seguente trasformazione

$$\Psi' = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\phi\right)\Psi, \quad (1.8)$$

perché allora l'equazione di Schrödinger (1.2) resta invariata in forma. Infatti, quando si utilizzano simultaneamente le due trasformazioni (1.7) e (1.8) valgono le seguenti leggi di trasformazione

$$\begin{aligned} \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\Psi &\rightarrow \left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c}\mathbf{A}'\right)\Psi' = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\phi\right)\left(\nabla + \frac{ie}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\Psi, \\ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eV\right)\Psi &\rightarrow \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eV'\right)\Psi' = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\phi\right)\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + eV\right)\Psi. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Perciò l'uso combinato della (1.7) e della (1.8) nella (1.2), scritta per  $\Psi'$  con  $\mathbf{A}'$  e  $V'$ , fa comparire un inessenziale fattore di fase comune  $\exp(-ie\phi/\hbar c)$ .

La (1.8) si chiama *trasformazione di gauge di prima specie*, mentre la (1.7) è detta *trasformazione di gauge di seconda specie*.

L'applicazione simultanea delle due trasformazioni di gauge garantisce la corretta interpretazione quantistica e mantiene inalterata in forma anche l'equazione di

continuità (III.3.23) associata all'equazione di Schrödinger. Ciò si può verificare confrontando la densità di probabilità di presenza  $\rho'$  e la densità di corrente di probabilità  $\mathbf{j}'$ , corrispondenti a una  $\Psi'$  che risolve l'equazione di Schrödinger con il potenziale vettore  $\mathbf{A}'$ , con la  $\rho$  e la  $\mathbf{j}$  corrispondenti a una  $\Psi$  ottenuta col potenziale  $\mathbf{A}$ . Infatti, per un potenziale vettore  $\mathbf{A}' = 0$ , che si può pensare ottenuto da  $\mathbf{A}$  mediante la (1.7), si ha

$$\rho' = |\Psi'|^2 = |\Psi|^2 = \rho. \quad (1.10)$$

Dalla definizione di densità di corrente di probabilità si ottiene inoltre

$$\begin{aligned} \mathbf{j}' &= -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi'^* \nabla \Psi' - \Psi' \nabla \Psi'^*) \\ &= -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{e}{mc} \mathbf{A} |\Psi|^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Ma se si utilizza sulla (1.2) lo stesso procedimento che ha prodotto la (III.3.23), si può costruire l'equazione di continuità in presenza di un potenziale vettore  $\mathbf{A}$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (1.12)$$

dove

$$\rho = |\Psi|^2, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) + \frac{e}{mc} \mathbf{A} |\Psi|^2. \quad (1.14)$$

Perciò anche  $\mathbf{j} = \mathbf{j}'$  e l'equazione di continuità resta invariata.

La (1.11) si può riscrivere nel modo seguente:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left[ \Psi^* \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \Psi \right]. \quad (1.15)$$

Il confronto con l'espressione

$$\mathbf{j} = \frac{1}{m} \operatorname{Re} [\Psi^* \mathbf{p} \Psi], \quad (1.16)$$

equivalente alla (III.3.25) e valida in assenza di campo elettromagnetico, chiarisce il significato della sostituzione minimale: in entrambi i casi, al limite classico, si può far corrispondere la densità di corrente di probabilità  $\mathbf{j}$  con la velocità  $\mathbf{v}$  della particella.

*Esempio 1.1*

In questo Esempio ci si propone di verificare un'interessante proprietà di invarianza per trasformazioni di fase *locali* della funzione d'onda. Essa deriva dalla legge di trasformazione (1.9) e ha per conseguenza la necessità di introdurre il potenziale del campo elettromagnetico nell'equazione di Schrödinger per una particella carica, anche se originariamente non era previsto.

Si vuole dunque che la teoria sia invariante per una trasformazione di fase del tipo

$$\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow \Psi'(\mathbf{r}) = e^{-ie\alpha(\mathbf{r})/\hbar c} \Psi(\mathbf{r}). \quad (1.17)$$

Se la fase  $\alpha$  non dipendesse dalla posizione, non ci sarebbe nulla di nuovo: un fattore di fase costante per tutte le  $\Psi$  non modifica l'interpretazione quantistica, che coinvolge piuttosto il modulo quadrato della  $\Psi$ , indipendente da questo fattore di fase. Invece qui si pretende che la teoria non sia alterata da una trasformazione (1.17) con  $\alpha$  dipendente dalla posizione  $\mathbf{r}$ . In questo senso la (1.17) è detta *trasformazione di fase locale*.

L'equazione di Schrödinger e il calcolo di molti valori di aspettazione di operatori quantistici implicano derivazioni sulla  $\Psi$ . Per trasformazioni di fase locali queste derivazioni si trasformano in un modo che non è una semplice trasformazione di fase:

$$\nabla\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow \nabla\Psi'(\mathbf{r}) = e^{-ie\alpha(\mathbf{r})/\hbar c} \left\{ \nabla\Psi(\mathbf{r}) - \frac{ie}{\hbar c} [\nabla\alpha(\mathbf{r})] \Psi(\mathbf{r}) \right\}. \quad (1.18)$$

Se però si stabilisce di sostituire sempre  $\nabla$  con una forma di gradiente *covariante di gauge*,

$$\mathcal{D} = \nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (1.19)$$

cioè

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}' = \nabla + \frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A}'(\mathbf{r}), \quad (1.20)$$

quando

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\alpha, \quad (1.21)$$

allora

$$\mathcal{D}\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow \mathcal{D}'\Psi'(\mathbf{r}) = e^{-ie\alpha(\mathbf{r})/\hbar c} \mathcal{D}\Psi(\mathbf{r}) \quad (1.22)$$

e quantità come  $\Psi^*\mathcal{D}\Psi$  risultano invarianti per trasformazioni di fase locali. Ma la trasformazione (1.21) è la trasformazione di gauge di seconda specie (1.7) dell'elettrodinamica con  $\phi = \alpha$  e la definizione di gradiente covariante di gauge (1.19) corrisponde alla sostituzione minimale (1.3.58). Perciò la forma dell'accoppiamento tra materia e campo elettromagnetico nella hamiltoniana e quindi nell'equazione di Schrödinger (1.2) è dettata dall'invarianza per trasformazioni di fase locali.

IX.2. Effetto Aharonov-Bohm

Il fatto che i potenziali del campo elettromagnetico compaiano esplicitamente nell'equazione di Schrödinger fa pensare alla possibilità di realizzare situazioni che permettano una misura di tali potenziali.

Si immagini di limitare la regione in cui la  $\Psi$  è diversa da zero a quella in cui il campo magnetico

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.1)$$

è identicamente nullo, come all'esterno di un solenoide infinitamente lungo e impenetrabile. Ciò significa permettere che la particella, per esempio un elettrone, si muova solo nella regione in cui non c'è comunque campo magnetico. Data l'arbitrarietà su  $\mathbf{A}$ , questa situazione all'esterno del solenoide si può realizzare in due modi distinti. In un primo caso si può porre:

$$\mathbf{A} = 0. \quad (2.2)$$

La corrispondente equazione di Schrödinger è

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_0 + V \Psi_0, \quad (2.3)$$

in cui  $V$  è un eventuale potenziale scalare esterno, inessenziale nelle considerazioni seguenti.

D'altra parte, la condizione  $\mathbf{B} = 0$  può essere soddisfatta anche coinvolgendo un potenziale vettore del tipo

$$\mathbf{A} = \nabla \phi. \quad (2.4)$$

Allora l'equazione di Schrödinger acquista la forma (1.2) e la sua soluzione è

$$\Psi = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \phi\right) \Psi_0, \quad (2.5)$$

in accordo con la (1.8).

Ora, se  $\mathbf{A}$  è il gradiente di  $\phi$ , (2.4), noto  $\phi$  in un certo punto  $\mathbf{r}_0$  e ivi posto uguale a zero,

$$\phi(\mathbf{r}_0) = 0, \quad (2.6)$$

si può conoscere  $\phi(\mathbf{r})$  come circuitazione del campo conservativo  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , cioè

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (2.7)$$

Questa circuitazione non dipende dal cammino di integrazione se esso appartiene a una regione semplicemente connessa in cui  $\mathbf{B} = 0$ . Perciò la circuitazione lungo una

linea chiusa si azzerava se questo circuito non racchiude regioni in cui  $\mathbf{B}$  sia diverso da zero. Altrimenti risulta

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \equiv \Phi_S(\mathbf{B}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove  $\Phi_S(\mathbf{B})$  è il flusso del campo magnetico  $\mathbf{B}$  attraverso una superficie  $S$  qualsiasi delimitata dal circuito chiuso. Pertanto, se si suppone che il cammino da  $\mathbf{r}_0$  a  $\mathbf{r}$  si avvolge  $n$  volte intorno al solenoide, all'interno del quale è  $\mathbf{B} \neq 0$ , la (2.5) si riscrive

$$\begin{aligned} \Psi &= \exp \left[ -\frac{ie}{\hbar c} \int_{r_0}^r \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}' \right] \Psi_0 \\ &= \exp \left[ -\frac{ie}{\hbar c} n \Phi_S(\mathbf{B}) \right] \Psi_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

In tal modo la fase di  $\Psi$  resta definita a meno di multipli di  $\Phi_c(\mathbf{B})$ .

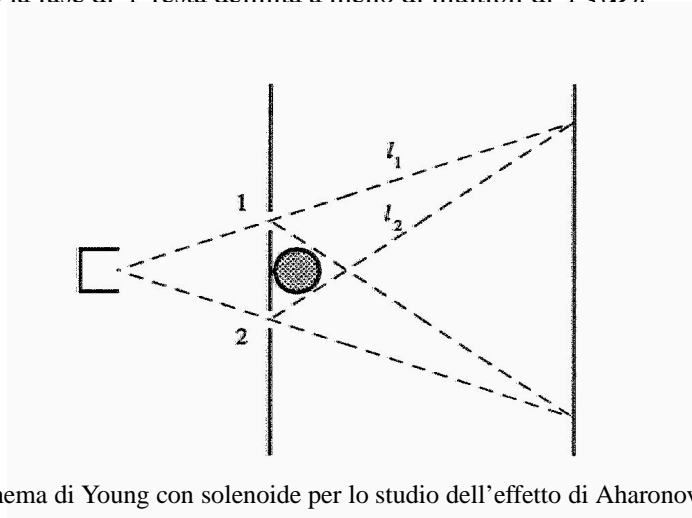


Fig. 2.1. Schema di Young con solenoide per lo studio dell'effetto di Aharonov–Bohm.

Si può allora pensare ad un esperimento alla Young in grado di rivelare l'eventuale presenza o meno del campo magnetico all'interno del solenoide attraverso gli effetti del suo potenziale vettore sull'equazione di Schrödinger. Si disponga un solenoide estremamente sottile come in fig. 2.1, immediatamente alle spalle dello schermo con le due fenditure 1 e 2. Si indichino con  $\Psi_{01}$  e  $\Psi_{02}$  le funzioni d'onda che, in assenza di campo magnetico all'interno del solenoide, si riferiscono al cammino  $l_1$  o  $l_2$ , con passaggio degli elettroni attraverso la fenditura 1 o la fenditura 2, rispettivamente. Esse possono essere poste nella forma (cfr. la formula di Feynman (VII.5.19)):

$$\Psi_{01,2} = \Psi_{1,2}^{(0)} e^{iS_{1,2}/\hbar}, \quad (2.10)$$



dove  $S_{1,2}$  rappresenta l'azione relativa a uno dei due cammini  $l_{1,2}$  che si possono percorrere per raggiungere lo schermo successivo, a partire da una delle due fenditure. Perciò, in assenza di campo magnetico all'interno del solenoide, la funzione d'onda risulta

$$\Psi_0 = \Psi_{01} + \Psi_{02}, \quad (2.11)$$

con conseguente formazione di frange di interferenza che modulano la densità di probabilità di rivelare gli elettroni sullo schermo successivo. La condizione per la localizzazione dei massimi di tale frange è la solita condizione che deriva dalla differenza di fase (e di azione) introdotta dai diversi cammini percorsi:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(l_1 - l_2) = 2\pi n. \quad (2.12)$$

Con campo magnetico acceso all'interno del solenoide le corrispondenti funzioni d'onda  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  sono:

$$\begin{aligned} \Psi_1(\mathbf{r}) &= \exp \left[ -\frac{ie}{\hbar c} \left( \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}' \right)_1 \right] \Psi_{01}(\mathbf{r}), \\ \Psi_2(\mathbf{r}) &= \exp \left[ -\frac{ie}{\hbar c} \left( \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}' \right)_2 \right] \Psi_{02}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Perciò, quando sono aperte entrambe le fenditure, la funzione d'onda è:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_1 + \Psi_2 \\ &= \exp \left[ -\frac{ie}{\hbar c} \left( \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}' \right)_1 \right] \left\{ \Psi_{01} + \exp \left[ -\frac{ie}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}' \right] \Psi_{02} \right\} \\ &= \exp \left[ -\frac{ie}{\hbar c} \left( \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}' \right)_1 \right] \left\{ \Psi_{01} + \exp \left[ -\frac{ie}{\hbar c} \Phi_S(\mathbf{B}) \right] \Psi_{02} \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Allora, accendendo la corrente nel solenoide e avendo  $\mathbf{B} \neq 0$  al suo interno, la condizione di massimo viene influenzata dallo sfasamento addizionale introdotto nella (2.14) dal flusso di campo magnetico:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(l_1 - l_2) - \frac{e}{\hbar c} \Phi_S = 2\pi n. \quad (2.15)$$

Pertanto, sebbene le particelle cariche non attraversino la regione in cui è  $\mathbf{B} \neq 0$ , si prevede un'alterazione delle frange di interferenza che permetterebbe di determinare il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  della (2.4). Questo fenomeno, di natura prettamente quantistica, va sotto il nome di *effetto Aharonov-Bohm*.

Sperimentalmente, la situazione è di difficile realizzazione, perché, per evitare effetti di bordo, il solenoide deve essere molto lungo e sottile <sup>9</sup>. Tecniche di interferometria olografica applicate a un fascio di elettroni che attraversa un biprisma sembrano meglio adatte <sup>10</sup>. Comunque, nonostante qualche controversia, l'effetto sembra essere accertato <sup>11</sup>. Resta il fatto che la presenza dei potenziali nell'equazione di Schrödinger può essere eliminata con opportuni accorgimenti: per esempio il termine *locale* dipendente da  $\mathbf{A}$  nell'equazione di Schrödinger può essere sostituito in modo equivalente da un termine *non locale* mediante la relazione

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \frac{\nabla' \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.16)$$

facendo così ricomparire in modo esplicito il campo magnetico che è l'unica quantità misurabile in termini classici <sup>12</sup>. Allo stesso tempo però l'uso della (2.16) evidenzia l'intrinseca non località del formalismo quantistico che è all'origine di molti aspetti impreveduti e paradossali sulla base di una visione classica.

### IX.3. Effetto Zeeman

In questo paragrafo viene considerato il moto di un elettrone nell'atomo sottoposto a un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse  $z$ :

$$\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z, \quad (3.1)$$

$$B = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (3.2)$$

Si può senz'altro scegliere il potenziale vettore nella forma (cfr. Esercizio I.3.3):

$$\mathbf{A} \equiv (A_x, A_y, A_z) = \left(-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0\right), \quad (3.3)$$

che riproduce la (3.2). Allora, per quanto visto in (1.1), l'equazione di Schrödinger per l'elettrone di un atomo sottoposto al campo magnetico esterno (3.1) coinvolge la hamiltoniana

<sup>9</sup> Il primo esperimento è dovuto a R.G. Chambers: *Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux* [Spostamento delle frange di interferenza d'elettrone da parte di un flusso magnetico racchiuso], *Physical Review Letters* **5** (1960) 3–5.

<sup>10</sup> A. Tonomura, T. Matsuda, R. Suzuki, A. Fukuhara, N. Osakabe, H. Umezaki, J. Endo, K. Shinagawa, Y. Sugita, H. Fujiwara: *Observation of Aharonov–Bohm Effect by Electron Holography* [Osservazione dell'effetto Aharonov–Bohm per mezzo di olografia elettronica], *Physical Review Letters* **48** (1982) 1443–1446.

<sup>11</sup> Per una recente rassegna sulla situazione teorica e sperimentale, si veda il testo di M. Peshkin e A. Tonomura: *The Aharonov–Bohm Effect*, *Lecture Notes in Physics* **340**, Springer, Berlino, 1989.

<sup>12</sup> S. Mandelstam: *Quantum Electrodynamics without Potentials* [Elettrodinamica quantistica senza potenziali], *Annals of Physics* **19** (1962) 1–24.

*Effetto Zeeman*

$$H = \frac{1}{2m} \left[ \left( p_x - \frac{e}{2c} B y \right)^2 + \left( p_y + \frac{e}{2c} B x \right)^2 + p_z^2 \right] - eV, \quad (3.4)$$

che si può riscrivere nella forma

$$H = H_0 + \frac{e}{2mc} B L_z + \frac{e^2}{8mc^2} B^2 (x^2 + y^2), \quad (3.5)$$

con

$$H_0 = \frac{1}{2m} p^2 - eV. \quad (3.6)$$

La hamiltoniana  $H_0$  rappresenta la hamiltoniana dell'elettrone imperturbato in assenza di campo magnetico. I termini aggiuntivi nella (3.5) possono considerarsi una perturbazione introdotta dal campo magnetico. Come nel caso classico, il termine lineare in  $B$  nella hamiltoniana rappresenta il contributo paramagnetico (cfr. Esercizio I.3.4): esso deriva dall'interazione magnetica di un momento magnetico orbitale  $\boldsymbol{\mu}$ ,

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2mc} \mathbf{L}, \quad (3.7)$$

cui corrisponde l'energia di interazione

$$-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = \omega_L L_z, \quad (3.8)$$

dove la frequenza  $\omega_L$  è proporzionale all'intensità del campo magnetico:

$$\omega_L = \frac{e}{2mc} B. \quad (3.9)$$

La situazione ricorda quella in cui l'orbita, che l'elettrone percorre in un modello classico, venga assimilata ad una spirale percorsa da corrente che, sottoposta all'azione del campo magnetico, si vede associato un momento magnetico: il momento angolare orbitale dell'elettrone precessa intorno alla direzione di  $\mathbf{B}$  come un giroscopio, la cui velocità angolare di precessione  $\omega_L$ , nota come *frequenza di Larmor*, è data dalla (3.9). La quantità  $e/2mc$  viene detta, in accordo con la (3.7), *rapporto giromagnetico* e interviene nella definizione del magnetone di Bohr:

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2mc} = 5.788\,382\,63(52) \times 10^{-5} \text{ eV T}^{-1}. \quad (3.10)$$

Il secondo termine aggiuntivo nella (3.5) è quadratico nel campo magnetico  $\mathbf{B}$  e corrisponde al contributo diamagnetico classico provocato dal momento magnetico indotto da  $\mathbf{B}$  (cfr. Esercizio I.3.4). Per campi magnetici poco intensi la sua efficacia è modesta e in generale trascurabile rispetto al termine paramagnetico, i cui effetti sullo spettro di  $H_0$  invece possono essere studiati col metodo delle perturbazioni indipendenti dal tempo. In particolare, al primo ordine in  $B$  la correzione  $E^{(1)}$  ai livelli imperturbati di  $H_0$  si ottiene dal valore di aspettazione della (3.8):

Lo spin

$$E^{(1)} = \omega_L \langle L_z \rangle, \quad (3.11)$$

Se  $V$  in  $H_0$  è a simmetria sferica, gli autostati di  $H_0$  hanno come buoni numeri quantici i numeri  $(n, l, m)$  e, al primo ordine in  $B$ , la perturbazione provocata dal campo magnetico non modifica gli stati, ma solo l'energia. La (3.11) fornisce in questo caso

$$E^{(1)} = m \hbar \omega_L. \quad (3.12)$$

Dalla (3.12) appare ora chiara l'azione di separazione prodotta dal campo magnetico sui livelli degeneri con uguale  $l$  e diverso  $m$ : ogni livello degeneri si separa in  $2l + 1$  livelli distanziati di  $\hbar \omega_L$ . Pertanto le righe dello spettro in presenza di campo magnetico si modificano di conseguenza, dando origine a quello che è noto come *effetto Zeeman*.

Però sperimentalmente anche i livelli con  $l = m = 0$ , che a priori non sarebbero influenzati dalla presenza del termine paramagnetico (3.12), subiscono uno sdoppiamento in due livelli, come se in origine costituissero un doppietto degeneri. È questo fenomeno che è all'origine di quello che si chiama *effetto Zeeman anomalo*.

*Esercizio 3.1*

Valutare al primo ordine in  $B^2$  il contributo del termine diamagnetico per lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, esplorando l'eventuale possibilità di attribuire a questo termine la responsabilità dell'effetto Zeeman anomalo.

#### IX.4. Gli operatori di spin

Per spiegare l'effetto Zeeman anomalo occorre postulare un nuovo grado di libertà per l'elettrone, senza analogo classico. Tale grado di libertà è descrivibile in termini quantistici come un momento angolare, denominato col vocabolo inglese *spin* (= *trottola*) e indicato col simbolo  $s$ . Conseguentemente l'elettrone possiede anche un momento magnetico intrinseco proporzionale a  $s$ , così come il momento magnetico orbitale  $\boldsymbol{\mu}$  è proporzionale a  $\mathbf{L}$  secondo la (3.7).

In generale conviene introdurre il *rapporto giromagnetico* tra momento magnetico e momento angolare mediante la relazione

$$\boldsymbol{\mu}_s = -g \frac{e}{2mc} \mathbf{s}, \quad (4.1)$$

dove il numero  $g$  entra nella definizione del rapporto giromagnetico:

$$\text{rapporto giromagnetico} = -g \frac{e}{2mc}. \quad (4.2)$$

Esso ha per esempio i seguenti valori:

Gli operatori di spin

$$g = \begin{cases} 1, & \text{per il momento angolare orbitale } \mathbf{L}, \\ 2, & \text{per lo spin } s \text{ dell'elettrone,} \\ 5.58, & \text{per lo spin del protone } (m = m_p), \\ -3.86, & \text{per lo spin del neutrone } (m = m_n). \end{cases} \quad (4.3)$$

*Esercizio 4.1*

Scrivere il termine introdotto dall'ipotesi dello spin nella hamiltoniana di una particella carica posta in campo magnetico.

Con la definizione (4.1), in presenza di campo magnetico lo spin introduce un'energia di interazione  $-\boldsymbol{\mu}_S \cdot \mathbf{B}$ . Il suo contributo è analogo alla (3.11) e, per rendere conto dei dati sperimentali, in particolare quelli dell'esperimento di Stern–Gerlach, deve essere pari a  $\pm \frac{1}{2}g \hbar \omega_L$ . Ciò indica che  $s_z$  può avere solo gli autovalori  $\pm \frac{1}{2} \hbar$ . Allo stesso tempo però questo fatto ha conseguenze notevoli sulle proprietà matematiche degli operatori di spin. Infatti deve essere

$$s_x^2 = s_y^2 = s_z^2 = \frac{1}{4} \hbar^2 \quad (4.4)$$

e in generale, per una direzione qualsiasi indicata dal versore  $\hat{n}$ ,

$$(\mathbf{s} \cdot \hat{n})^2 = \frac{1}{4} \hbar^2, \quad (4.5)$$

cioè

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \hbar^2 &= (s_x n_x + s_y n_y + s_z n_z)^2 \\ &= s_x^2 n_x^2 + s_y^2 n_y^2 + s_z^2 n_z^2 + (s_x s_y + s_y s_x) n_x n_y \\ &\quad + (s_y s_z + s_z s_y) n_y n_z + (s_x s_z + s_z s_x) n_x n_z \\ &= \frac{1}{4} \hbar^2 + (s_x s_y + s_y s_x) n_x n_y \\ &\quad + (s_y s_z + s_z s_y) n_y n_z + (s_x s_z + s_z s_x) n_x n_z. \end{aligned}$$

Quindi, data l'arbitrarietà di  $\hat{n}$ , si deve avere:

$$\begin{cases} s_x s_y + s_y s_x = 0, \\ s_y s_z + s_z s_y = 0, \\ s_x s_z + s_z s_x = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Introducendo il simbolo

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \quad (4.7)$$

per indicare l'*anticommutatore* tra i due operatori  $A$  e  $B$ , le (4.4) e le (4.6) si possono compendiare nelle seguenti relazioni di anticommutazione per le componenti dello spin:

Lo spin

$$\{s_i, s_j\} = \frac{1}{2} \hbar^2 \delta_{ij}. \quad (4.8)$$

Accanto a queste relazioni di anticommutazione naturalmente vanno anche considerate le normali regole di commutazione valide per il momento angolare, in quanto tale è per ipotesi anche lo spin. Perciò si ha anche

$$[s_i, s_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} s_k. \quad (4.9)$$

L'evidenza sperimentale impone per l'elettrone, così come per il protone e il neutrone, uno spin il cui modulo quadrato,

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2, \quad (4.10)$$

ha autovalori

$$\hbar^2 s(s+1) = \frac{3}{4} \hbar^2 \quad (4.11)$$

e quindi  $s = \frac{1}{2}$ . Si realizza dunque la possibilità di autovalori con  $j$  semintero, prevista nell'Esempio VI.1.4, equazione (VI.1.61). Nel caso dello spin  $s = \frac{1}{2}$  qui in considerazione, spesso conviene tenere già conto del fattore  $\frac{1}{2} \hbar$  e definire un nuovo operatore di spin  $\sigma$ , secondo la relazione

$$s = \frac{1}{2} \hbar \sigma. \quad (4.12)$$

In tal caso le (4.8) e (4.9) diventano

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad (4.13)$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (4.14)$$

Come caso particolare della (4.13) si ottiene

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1, \quad (4.15)$$

con la conseguenza che, per esempio, gli autovalori di  $\sigma_z$  sono  $\pm 1$ .

*Esercizio 4.2*

Verificare la relazione

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (4.16)$$

*Gli operatori di spin*

*Esercizio 4.3*

Dati gli operatori vettoriali  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  che commutano con  $\boldsymbol{\sigma}$ , verificare le seguenti relazioni:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} - i\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A}, \quad (4.17)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} + i\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A}, \quad (4.18)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (4.19)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}] = -2i\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{A}. \quad (4.20)$$

*Esercizio 4.4*

Verificare che gli operatori

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad (4.21)$$

sono operatori di proiezione. Scegliendo  $\hat{\mathbf{n}}$  diretto come l'asse  $z$ , verificare che  $P_{\pm}$  proietta sull'autostato di  $\sigma_z$  appartenente all'autovalore  $\pm 1$ .

*Esercizio 4.5*

Verificare che gli operatori  $U_i = e^{i\alpha\sigma_i}$ , con  $i = x, y, z$ , si possono esprimere nella forma

$$U_i = e^{i\alpha\sigma_i} = \mathbb{1} \cos \alpha + i \sigma_i \sin \alpha. \quad (4.22)$$

Volendo costruire una rappresentazione per gli operatori di spin, si osserva che il sistema completo di operatori che commutano in questo caso è dato da  $\sigma^2$  e  $\sigma_z$  (o un'altra qualsiasi delle componenti di  $\boldsymbol{\sigma}$ ) e che lo spazio in cui questi operatori operano deve essere uno spazio lineare complesso bidimensionale, indicato con  $\mathcal{C}^2$ . I vettori in questo spazio vengono spesso indicati col nome di *spinori* e i vettori di base di questo spazio si possono indicare come dei ket i cui rappresentativi in notazione matriciale hanno l'aspetto di un vettore colonna con due righe (cfr. eq. (C.3)),

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (4.23)$$

che corrispondono agli autovettori di  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_z \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (4.24)$$

In questo spazio il più generale stato è uno spinore che si ottiene da una sovrapposizione degli spinori di base (4.23):

$$c_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}. \quad (4.25)$$

Per soddisfare la (4.24),  $\sigma_z$  deve avere forma diagonale e quindi risulta

$$\sigma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (4.26)$$

Per trovare i rappresentativi di  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  conviene procedere in modo simile a quanto fatto nell'Esempio VI.1.4, definendo gli operatori

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y). \quad (4.27)$$

In questo caso, fruendo delle (4.13) e (4.14), si verificano le seguenti relazioni:

$$\sigma_+^2 = \sigma_-^2 = 0, \quad (4.28)$$

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z, \quad (4.29)$$

$$[\sigma_z, \sigma_{\pm}] = \pm 2\sigma_{\pm}. \quad (4.30)$$

In particolare la (4.30), analoga alla (VI.1.54), mostra che  $\sigma_+$  ( $\sigma_-$ ) ha l'effetto di aumentare (diminuire) l'autovalore di  $\sigma_z$ . Infatti è

$$\sigma_z \sigma_{\pm} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \sigma_{\pm} (\sigma_z \pm 2) \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}. \quad (4.31)$$

Allora, se  $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ , l'azione di  $\sigma_z \pm 2$  provoca la moltiplicazione per 3 o per  $-1$ , per cui  $\sigma_+ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$  è autostato di  $\sigma_z$  appartenente a un inesistente autovalore 3 e  $\sigma_- \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$  è autostato di  $\sigma_z$  appartenente all'autovalore  $-1$ . Dunque  $\sigma_+ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = 0$  e  $\sigma_- \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$  è proporzionale a  $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ . Similmente si dimostra che  $\sigma_+ \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$  è proporzionale a  $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$  e  $\sigma_- \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = 0$ .

A questo punto è facile trovare la rappresentazione di  $\sigma_{\pm}$  che rispetti questa loro proprietà di alzare e abbassare la terza componente dello spin:

$$\sigma_+ = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.32)$$

Dalla definizione (4.27) si ottiene così anche la rappresentazione di  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ :



*Gli operatori di spin*

$$\sigma_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.33)$$

Le matrici (4.26) e (4.33) sono dette *matrici di Pauli*.

*Esercizio 4.6*

Trovare autostati e autovalori dell'operatore  $\alpha\sigma_x + \beta\sigma_y + \gamma\sigma_z$ , dove  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$  e  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  sono le matrici di Pauli.

*Esercizio 4.7*

Verificare che, sulla base degli autostati di  $\sigma_z$ , gli autostati dell'operatore  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$  sono

$$\begin{vmatrix} \cos \frac{1}{2}\theta e^{-i\phi} \\ \sin \frac{1}{2}\theta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\sin \frac{1}{2}\theta e^{-i\phi} \\ \cos \frac{1}{2}\theta \end{vmatrix}, \quad (4.34)$$

dove  $\theta$  e  $\phi$  sono gli angoli polari del vettore  $\hat{\mathbf{n}}$ .

*Esercizio 4.8*

Verificare che le matrici di Pauli sono a traccia nulla.

*Esercizio 4.9*

Verificare che la più generale matrice  $2 \times 2$  può essere espressa come combinazione lineare di quattro matrici  $2 \times 2$  fondamentali, costituite per esempio dalla matrice identità e dalle tre matrici di Pauli:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_0 \mathbb{1} + a_1 \sigma_x + a_2 \sigma_y + a_3 \sigma_z. \end{aligned} \quad (4.35)$$

*Esercizio 4.10*

Tenendo presente il risultato dell'Esercizio 4.5 e dell'Esercizio precedente, esprimere gli operatori  $U_x, U_y, U_z$  in forma di matrici  $2 \times 2$ .

*Esercizio 4.11*

Ricordando la (VI.5.21), che cosa rappresentano gli operatori  $U_x = e^{i\alpha\sigma_x}, U_y = e^{i\alpha\sigma_y}, U_z = e^{i\alpha\sigma_z}$ ?

IX.5. Evoluzione temporale di uno stato di spin

Gli operatori di spin, essendo associati a gradi di libertà intrinseci, commutano con gli operatori di posizione e di impulso. Pertanto quando si vuole costruire la funzione d'onda  $\Psi$  di un sistema con spin si deve tenere presente che questa funzione d'onda dipende da variabili spaziali e da variabili di spin, tra di loro indipendenti. Utilizzando la notazione (4.25), si può caratterizzare la  $\Psi$  come uno spinore sotto forma di vettore colonna,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+(\mathbf{r}, t) \\ \Psi_-(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \Psi_+(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi_-(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

in cui  $\Psi_{\pm}(\mathbf{r}, t)$  è l'ampiezza di probabilità di trovare la particella all'istante  $t$  in  $\mathbf{r}$  con spin parallelo (antiparallelo) rispetto all'asse  $z$ . Alternativamente, indicando con  $|\chi(\sigma)\rangle$  il vettore di spin (4.25), lo stato  $|\Psi\rangle$  totale può essere espresso come il prodotto tra il ket  $|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle$  e uno spinore del tipo (4.25), che si può indicare con il ket  $|\chi(\sigma)\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = |\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle |\chi(\sigma)\rangle. \quad (5.2)$$

Il vettore  $|\chi(\sigma)\rangle$  è un elemento dello spazio lineare complesso  $\mathcal{C}^{2s+1} \equiv \mathcal{C}^2$ , mentre il vettore  $|\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle$  appartiene a  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ ; la (5.2) indica allora che lo stato complessivo  $|\Psi\rangle$  risulta un elemento dello spazio che si ottiene facendo il prodotto diretto  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{C}^{2s+1}$ .

Naturalmente l'evoluzione temporale dello stato  $|\Psi\rangle$  deve essere governata dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle, \quad (5.3)$$

dove ora  $H$  è un operatore che opera nello spazio  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{C}^{2s+1}$ . Nello schema (5.1)  $H$  è da considerarsi una matrice  $2 \times 2$  nello spazio di spin  $\mathcal{C}^2$  con elementi che operano in  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ . Come ogni matrice  $2 \times 2$ ,  $H$  può essere sviluppata sulla base delle matrici di Pauli e della matrice identità:

$$H = \frac{1}{2}(W_0 \mathbb{1} + \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (5.4)$$

dove in generale  $W_0$  e  $\mathbf{W}$  risultano funzioni degli operatori di posizione e di impulso.

*Esercizio 5.1*

Verificare che l'equazione di Schrödinger per un elettrone in presenza di campo magnetico diventa l'equazione di Pauli:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V(r) + \mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right\} \Psi. \quad (5.5)$$

*Esempio 5.1*

In questo Esempio si mostra che, una volta assunta l'esistenza dello spin dell'elettrone, l'equazione di Pauli (5.5) potrebbe essere ricavata in meccanica quantistica non relativistica sulla sola base di proprietà generali della hamiltoniana<sup>13</sup>.

Si assuma la hamiltoniana libera,

$$H = \frac{p^2}{2m},$$

e si introducano gli operatori di proiezione  $P_{\pm}$  definiti nella (4.21), scegliendo  $\hat{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ :

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1} \pm \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right). \quad (5.6)$$

Questi operatori proiettano lo spin parallelo o antiparallelo alla direzione di moto dell'elettrone secondo quello che si suole indicare l'*elicità* (positiva o negativa) dell'elettrone: perciò  $P_{\pm}$  vengono detti *operatori di elicità*. Risulta

$$[P_{\pm}, H] = 0. \quad (5.7)$$

Allora lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  associato a  $H$  per l'azione di  $P_{\pm}$  si decompone in due sottospazi che restano invariati durante il moto dell'elettrone libero:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ + \mathcal{H}_-, \quad \mathcal{H}_{\pm} = P_{\pm} \mathcal{H}, \quad (5.8)$$

$$\Psi = \Psi_+ + \Psi_- \in \mathcal{H}, \quad \Psi_{\pm} = P_{\pm} \Psi \in \mathcal{H}_{\pm}. \quad (5.9)$$

D'altra parte, per la (4.19) e ricordando che  $\mathbf{p} \times \mathbf{p} = 0$ , l'equazione agli autovalori per  $H$  può anche scriversi

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{2m}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} - \sqrt{E} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2m}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \sqrt{E} \right] \Psi = 0. \quad (5.10)$$

Eseguito la sostituzione minimale  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}$  e sviluppando successivamente il prodotto tra operatori entro le parentesi quadrate, la (5.10) diventa proprio la (5.5), nell'ipotesi di un elettrone soggetto esclusivamente a un campo magnetico statico  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Il termine di momento magnetico intrinseco dell'elettrone scaturisce dunque come risultato della pura sostituzione minimale.

Si consideri lo spinore,

$$|\chi(\sigma)\rangle = c_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}, \quad (5.11)$$

con

---

<sup>13</sup> A. Galindo e C. Sanchez del Rio: *Intrinsic Magnetic Moment as a Nonrelativistic Phenomenon [Momento magnetico intrinseco come un fenomeno non relativistico]*, American Journal of Physics **29** (1961) 582–584.

Lo spin

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1. \quad (5.12)$$

Esso rappresenta uno stato di spin in cui c'è la probabilità  $|c_1|^2$  di trovare lo spin allineato secondo l'asse  $z$  e la probabilità  $|c_2|^2$  di trovarlo allineato in direzione opposta. La dipendenza temporale dei coefficienti  $c_1$  e  $c_2$  viene determinata dall'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \begin{vmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{vmatrix} = H \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}. \quad (5.13)$$

In presenza di campo magnetico, questa equazione coincide con quella di Pauli (5.5). Trascurando per il momento i gradi di libertà spaziali, la (5.13) diventa

$$i\hbar \begin{vmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{vmatrix} = \mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}, \quad (5.14)$$

che per un elettrone sottoposto a un campo magnetico uniforme diretto come l'asse  $z$  si scrive

$$i\hbar \begin{vmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{vmatrix} = \hbar\omega_L \sigma_z \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{vmatrix}, \quad (5.15)$$

con  $\omega_L$  dato dalla (3.9). Perciò

$$i \begin{vmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{vmatrix} = \omega_L \begin{vmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{vmatrix},$$

cioè

$$\dot{c}_1 = -i\omega_L c_1, \quad \dot{c}_2 = i\omega_L c_2,$$

da cui

$$c_1(t) = c_1(0) e^{-i\omega_L t}, \quad c_2(t) = c_2(0) e^{i\omega_L t}. \quad (5.16)$$

Allora se inizialmente lo spin puntava nella direzione  $\hat{n}$  e quindi lo stato (5.11) all'istante  $t = 0$  era espresso dal primo spinore della (4.34), all'istante  $t$  si trova

$$|\chi(\sigma, t)\rangle = \begin{vmatrix} e^{-i\omega_L t} \cos \frac{1}{2}\theta e^{-i\phi} \\ e^{i\omega_L t} \sin \frac{1}{2}\theta \end{vmatrix}. \quad (5.17)$$

Il valore di aspettazione dello spin su questo stato risulta

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle &\equiv (\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle, \langle \sigma_z \rangle) \\ &= (\cos(2\omega_L t + \phi) \sin \theta, \sin(2\omega_L t + \phi) \sin \theta, \cos \theta). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Questo risultato indica che la componente  $z$  dello spin, parallela al campo magnetico, si mantiene costante nel tempo, mentre le componenti normali al campo magnetico

variano periodicamente con pulsazione doppia della frequenza di Larmor. Il vettore di spin dunque compie una *precessione* intorno alla direzione del campo magnetico (fig. 5.1) con frequenza doppia di quella con cui precederebbe il momento angolare: questo fattore 2 è dovuto al rapporto giromagnetico  $g = 2$  dell'elettrone.

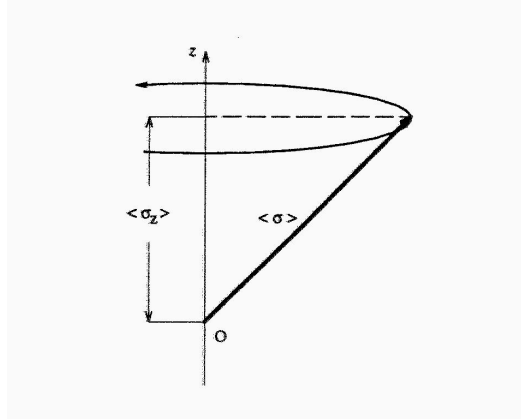


Fig. 5.1. Precessione di spin in campo magnetico.

*Esempio 5.2*

In questo Esempio viene costruito l'operatore di inversione temporale  $\mathcal{T}$  per una particella dotata di spin. Il problema si riconduce alla determinazione dell'operatore unitario  $U$  che compare nella definizione (VI.7.10) di  $\mathcal{T}$ .

Lo spin ha le caratteristiche di un momento angolare, per cui per inversione temporale deve avere un comportamento simile. Secondo la (VI.7.14) deve essere dunque:

$$s \rightarrow s' = \mathcal{T}s\mathcal{T}^{-1} = -s. \quad (5.19)$$

D'altra parte, si ha

$$K\mathbf{r}K = \mathbf{r}, \quad K\mathbf{p}K = -\mathbf{p}, \quad (5.20)$$

mentre per le matrici di spin si può sempre sceglierne due reali, per esempio  $s_x$  e  $s_z$ , e una immaginaria pura, per esempio  $s_y$ :

$$Ks_xK = s_x, \quad Ks_yK = -s_y, \quad Ks_zK = s_z. \quad (5.21)$$

Tenendo presente che per la (VI.7.10) si ha

$$U = \mathcal{T}K, \quad U^{-1} = K\mathcal{T}^{-1}, \quad (5.22)$$

la (5.20) e la (5.21) impongono

$$U\mathbf{r}U^{-1} = \mathbf{r}, \quad U\mathbf{p}U^{-1} = \mathbf{p}, \quad (5.23)$$

*Lo spin*

$$Us_xU^{-1} = -s_x, \quad Us_yU^{-1} = s_y, \quad Us_zU^{-1} = -s_z. \quad (5.24)$$

La (5.23) e la (5.24) sono le relazioni di trasformazione per una rotazione di  $\pi$  intorno all'asse  $y$ . Perciò, a meno di un fattore di fase costante che non ha significato fisico e può essere scelto uguale a uno, si trova

$$U = e^{-i\pi s_y/\hbar}. \quad (5.25)$$

Di conseguenza l'operatore di inversione temporale per una particella con spin risulta

$$\mathcal{T} = e^{-i\pi s_y/\hbar} K, \quad (5.26)$$

che per una particella a spin  $\frac{1}{2}$  diventa

$$\mathcal{T} = -i\sigma_y K. \quad (5.27)$$

L'evoluzione temporale può essere studiata altrettanto bene introducendo l'operatore densità  $\rho$ , definito nel paragrafo VII.7 e regolato dall'equazione di moto di Liouville–von Neumann (VII.7.18). Nello spazio di spin  $\mathcal{C}^2$ , l'operatore densità è una matrice  $2 \times 2$ , i cui elementi nel caso puro (5.11) sono espressi in accordo con la (VII.7.1). Perciò  $\rho$  risulta

$$\rho = \begin{vmatrix} |c_1|^2 & c_1 c_2^* \\ c_1^* c_2 & |c_2|^2 \end{vmatrix}, \quad (5.28)$$

con

$$\text{Tr } \rho = 1, \quad (5.29)$$

$$\rho^2 = \rho. \quad (5.30)$$

Come ogni matrice  $2 \times 2$ , la  $\rho$  può essere sviluppata sulla base delle matrici di Pauli e della matrice identità. Dato che  $\rho$  è hermitiana<sup>14</sup> e a traccia unitaria, deve essere

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (5.31)$$

dove le componenti  $P_x, P_y, P_z$  del vettore  $\mathbf{P}$  risultano numeri reali,

$$P_x = 2 \text{Re}(c_1^* c_2), \quad P_y = 2 \text{Im}(c_1^* c_2), \quad P_z = |c_1|^2 - |c_2|^2, \quad (5.32)$$

e il vettore  $\mathbf{P}$  è in realtà un versore:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = 1. \quad (5.33)$$

---

<sup>14</sup> Ricordiamo che in uno spazio di Hilbert a numero finito di dimensioni *hermitiano* e *autoaggiunto* sono sinonimi.

Per riconoscere il significato fisico di  $\mathbf{P}$  si valuti per esempio il valore di aspettazione di  $\sigma_x$ :

$$\begin{aligned}\langle \sigma_x \rangle &= \text{Tr} (\rho \sigma_x) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \sigma_x + \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \text{Tr} (\boldsymbol{\sigma} \sigma_x) \\ &= \frac{1}{2} P_x \text{Tr} (\sigma_x^2),\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che le matrici di Pauli sono a traccia nulla. Essendo poi  $\sigma_x^2 = \mathbb{1}$ , si ha infine

$$\langle \sigma_x \rangle = P_x. \quad (5.34)$$

Perciò in generale  $\mathbf{P}$  fornisce il valore di aspettazione dello spin:

$$\mathbf{P} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \text{Tr} (\rho \boldsymbol{\sigma}). \quad (5.35)$$

Inoltre lo spinore (5.11) risulta autostato di  $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ :

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} |\chi(\sigma)\rangle = |\chi(\sigma)\rangle. \quad (5.36)$$

Dunque  $\mathbf{P}$  può essere indicato a buon diritto come un versore che punta nella direzione dello spin del sistema descritto dalla (5.11): esso viene chiamato *versore di polarizzazione* dello stato (5.11).

*Esercizio 5.2*

Utilizzando le (5.32) verificare la (5.36).

Nel caso miscela l'operatore densità è dato dalla (VII.7.11), ma è ancora una matrice  $2 \times 2$  nello spazio di spin  $\mathcal{C}^2$ , come nel caso puro: ancora si può quindi definire un vettore di polarizzazione  $\mathbf{P}$  attraverso un'equazione analoga alla (5.31). Tuttavia ora la  $\rho$  non è idempotente (cfr. eq. (VII.7.15)) e  $\mathbf{P}$  non è più un versore. Dalla condizione

$$0 \leq \text{Tr} (\rho^2) \leq (\text{Tr} \rho)^2 = 1, \quad (5.37)$$

che deriva dal fatto che  $\rho$  è un operatore autoaggiunto, definito positivo e a traccia unitaria, segue

$$0 \leq P \leq 1. \quad (5.38)$$

Se  $P = 0$ ,  $\rho = \frac{1}{2} \mathbb{1}$ , il sistema è *non polarizzato*. Se  $P = 1$ , allora  $\rho^2 = \rho$  e gli autovalori di  $\rho$  sono 0 oppure 1: in questo caso il sistema è *polarizzato* e non può che essere descritto da un caso puro del tipo (5.11), corrispondente all'autovalore 1 di  $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ . In generale, per  $P < 1$  il sistema è *parzialmente polarizzato* e corrisponde a un caso miscela con polarizzazione  $P$ .

*Esercizio 5.3*

Scrivere l'operatore densità nel caso di un fascio di elettroni polarizzato al 70% nella direzione dell'asse  $z$  e al 30% nella direzione dell'asse  $x$ .

*Esempio 5.3*

Si vuole stabilire l'equazione di evoluzione del versore di polarizzazione per il caso puro (5.11). Dalla (5.35) e dall'equazione di Liouville-von Neumann riferita al caso puro, eq. (VII.7.6), si ha

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= i \hbar \frac{d\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle}{dt} \\ &= i \hbar \text{Tr} \left( \frac{d\rho}{dt} \boldsymbol{\sigma} \right) \\ &= \text{Tr} ([H, \rho] \boldsymbol{\sigma}) \\ &= \text{Tr} (\rho [\boldsymbol{\sigma}, H]), \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata l'invarianza della traccia rispetto a una permutazione ciclica dell'ordine con cui compaiono gli operatori sotto il segno di traccia (cfr. eq. (C.27)). Esprimendo  $\rho$  e  $H$  sotto forma di matrici con le (5.31) e (5.4) e tenendo presente la (4.20), si ottiene

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \frac{1}{2} \text{Tr} (\rho [\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}]) \\ &= -i \text{Tr} (\rho \boldsymbol{\sigma}) \times \mathbf{W}. \end{aligned}$$

Perciò

$$\hbar \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{W} \times \mathbf{P}. \quad (5.39)$$

*Esercizio 5.4*

Verificare che il modulo di  $\mathbf{P}$  si mantiene costante, cioè

$$\frac{d\mathbf{P}^2}{dt} = 0. \quad (5.40)$$

*Esercizio 5.5*

Verificare che se  $\mathbf{W}$  è un vettore costante,  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{P}$  e  $(d\mathbf{P}/dt)^2$  sono costanti del moto.

*Esercizio 5.6*

Ritrovare il risultato (5.18) a partire dalla (5.39).



IX.6. Composizione di due momenti angolari

Il fatto che lo spin sia rappresentato da un operatore che ha le stesse proprietà di un momento angolare, pur agendo su variabili diverse da quelle spaziali, suggerisce l'idea di un momento angolare risultante dalla somma del momento di spin  $s$  e del momento angolare orbitale  $L$ . Di conseguenza si impone il problema di costruire l'appropriata rappresentazione.

In modo totalmente generale, si possono considerare due operatori  $\mathbf{J}_1$  e  $\mathbf{J}_2$ , corrispondenti a due momenti angolari che, come gli operatori  $L$  e  $s$ , commutano tra di loro, cioè

$$[J_{1i}, J_{2j}] = 0. \quad (6.1)$$

In queste condizioni l'insieme di operatori  $J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}$  è un insieme di operatori autoaggiunti che commutano. Pertanto esiste un insieme completo di autostati simultanei dei quattro operatori, che possono essere individuati mediante i relativi autovalori. Con ovvio significato dei simboli, si ha:

$$\begin{cases} J_1^2 |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_1(j_1 + 1) |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle, \\ J_{1z} |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = \hbar m_1 |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle, \\ J_2^2 |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_2(j_2 + 1) |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle, \\ J_{2z} |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = \hbar m_2 |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle. \end{cases} \quad (6.2)$$

D'altra parte, si verifica subito che l'operatore

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 \quad (6.3)$$

è ancora un momento angolare, cioè

$$[J_i, J_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} J_k. \quad (6.4)$$

Inoltre si verifica facilmente che valgono le seguenti regole di commutazione:

$$[J^2, J_i] = 0, \quad (6.5)$$

$$[J^2, J_1^2] = [J^2, J_2^2] = 0. \quad (6.6)$$

Siccome è

$$2\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 = J^2 - J_1^2 - J_2^2, \quad (6.7)$$

si ha anche

$$[J^2, \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2] = [J_1^2, \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2] = [J_2^2, \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2] = 0. \quad (6.8)$$

Lo spin

Perciò anche l'insieme di operatori  $J^2, J_z, J_1^2, J_2^2$  è un insieme di operatori autoaggiunti che commutano e possiedono un insieme completo di autostati simultanei:

$$\begin{cases} J_1^2 |j_1 j_2; jm\rangle = \hbar^2 j_1(j_1 + 1) |j_1 j_2; jm\rangle, \\ J_2^2 |j_1 j_2; jm\rangle = \hbar^2 j_2(j_2 + 1) |j_1 j_2; jm\rangle, \\ J^2 |j_1 j_2; jm\rangle = \hbar^2 j(j + 1) |j_1 j_2; jm\rangle, \\ J_z |j_1 j_2; jm\rangle = \hbar m |j_1 j_2; jm\rangle. \end{cases} \quad (6.9)$$

Naturalmente esistono dei limiti di variabilità dei numeri quantici in gioco. Per gli stati (6.2) valgono le relazioni

$$|m_1| \leq j_1, \quad |m_2| \leq j_2, \quad (6.10)$$

con  $j_1$  e  $j_2$  che possono assumere valori interi (compreso lo zero) e seminteri in accordo con la (VI.1.61). Allora, una volta fissati  $j_1$  e  $j_2$ , il sottospazio corrispondente agli stati (6.2) è un sottospazio a  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  dimensioni.

Per gli stati (6.9) valgono le relazioni

$$m = m_1 + m_2, \quad |m| \leq j. \quad (6.11)$$

Inoltre è

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2. \quad (6.12)$$

D'altra parte, siccome è

$$\sum_{r=0}^n (2r + 1) = \frac{n+1}{2} [(2n+1) + 1] = (n+1)^2,$$

si ottiene che la dimensionalità del sottospazio corrispondente agli stati (6.9) risulta

$$\begin{aligned} \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) &= \sum_{j=0}^{j_1+j_2} (2j+1) - \sum_{j=0}^{|j_1-j_2|-1} (2j+1) \\ &= [(j_1+j_2)+1]^2 - [(|j_1-j_2|-1)+1]^2 \\ &= (2j_1+1)(2j_2+1), \end{aligned}$$

cioè, al variare di  $(jm)$  per  $(j_1 j_2)$  fissati, gli stati (6.9) percorrono lo stesso sottospazio degli stati (6.2).

Nella rappresentazione (6.2), in cui lo stato è caratterizzato dai buoni numeri quantici  $(j_1 m_1 j_2 m_2)$ , i due vettori  $\mathbf{J}_1$  e  $\mathbf{J}_2$  precedono in modo indipendente intorno a  $O$ , mantenendo fisso il valore della loro componente lungo  $z$  e lasciando indeterminato  $\mathbf{J}$  (fig. 6.1). Invece nella rappresentazione (6.9), i due vettori  $\mathbf{J}_1$  e  $\mathbf{J}_2$  sono accoppiati per dare un vettore risultante  $\mathbf{J}$  che precede intorno a  $O$  con la sua componente lungo  $z$  fissata, mentre le componenti lungo  $z$  di  $\mathbf{J}_1$  e  $\mathbf{J}_2$  restano indeterminate (fig. 6.2).

Composizione di due momenti angolari

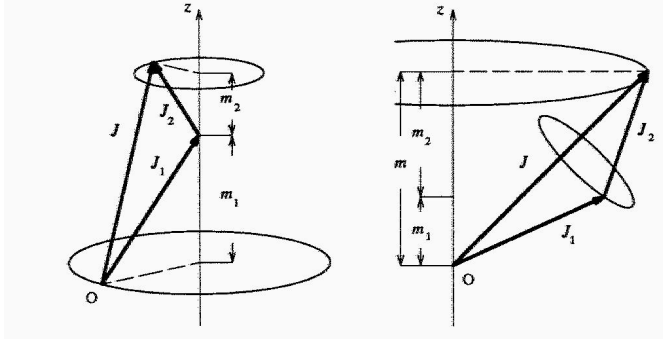


Fig. 6.1

Fig. 6.2

Queste due rappresentazioni sono evidentemente *equivalenti*: deve essere possibile passare dall'una all'altra mediante una trasformazione unitaria. La trasformazione è resa esplicita utilizzando la spettralizzazione dell'identità nel sottospazio in considerazione:

$$|j_1 j_2; j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j_1 j_2; j m\rangle. \quad (6.13)$$

I coefficienti della trasformazione (6.13),

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j m) \equiv \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j_1 j_2; j m\rangle, \quad (6.14)$$

rappresentano gli elementi della cercata trasformazione unitaria e sono chiamati *coefficienti di Clebsch–Gordan*<sup>15</sup>.

Dall'ortonormalità degli stati,

$$\langle j_1 j_2; j' m' | j_1 j_2; j m\rangle = \delta_{j j'} \delta_{m m'}, \quad (6.15)$$

segue la corrispondente condizione di ortogonalità per i coefficienti di Clebsch–Gordan:

$$\sum_{m_1 m_2} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j m) (j_1 j_2 m_1 m_2 | j' m') = \delta_{j j'} \delta_{m m'}. \quad (6.16)$$

La trasformazione lineare (6.13) è invertibile:

$$\begin{aligned} |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle &= \sum_{j m} |j_1 j_2; j m\rangle \langle j_1 j_2; j m | j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \\ &= \sum_{j m} (j_1 j_2 m_1 m_2 | j m) |j_1 j_2; j m\rangle. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Allora dall'ortonormalità degli stati,

$$\langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j_1 m'_1; j_2 m'_2\rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}, \quad (6.18)$$

<sup>15</sup> Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833–1872), Paul Gordan (1837–1912).

segue un'altra condizione di ortogonalità per i coefficienti di Clebsch–Gordan:

$$\sum_{jm} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) (j_1 j_2 m'_1 m'_2 | jm) = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}. \quad (6.19)$$

In tutte queste considerazioni i coefficienti di Clebsch–Gordan sono stati assunti reali. Infatti si può dimostrare che lo sono, a meno di un fattore di fase arbitrario che si può porre uguale a uno. Le due condizioni (6.16) e (6.19) confermano altresì che la trasformazione che connette le due rappresentazioni è unitaria.

Un'espressione esplicita dei coefficienti di Clebsch–Gordan è la seguente <sup>16</sup>:

$$\begin{aligned} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) &= \delta_{m, m_1+m_2} \Delta(j_1 j_2 j) \left[ \frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!(j_1-j_2+j)!(-j_1+j_2+j)!}{(j_1+j_2+j+1)!} \right]^{1/2} \\ &\times [(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j+m)!(j-m)!]^{1/2} \\ &\times \sum_n \frac{(-1)^n}{n!(j_1+j_2-j-n)!(j_1-m_1-n)!(j_2+m_2-n)!(j-j_2+m_1+n)!(j-j_1-m_2+n)!}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

dove  $\Delta(j_1 j_2 j) = 0$  se non è soddisfatta la condizione (6.12). La delta di Kronecker e la  $\Delta(j_1 j_2 j)$  garantiscono quella che viene chiamata la *proprietà triangolare* dei coefficienti di Clebsch–Gordan, in base alla quale i coefficienti sono automaticamente nulli se non sono rispettate le (6.11) e la (6.12).

Un'utile relazione di ricorrenza tra i coefficienti di Clebsch–Gordan si ottiene per applicazione degli operatori  $J_{\pm}$  a entrambi i membri della (6.13) e usufruendo delle relazioni (VI.1.65):

$$\begin{aligned} &\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm \pm 1) \\ &= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \mp 1)} (j_1 j_2 m_1 \mp 1, m_2 | jm) \\ &\quad + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \mp 1)} (j_1 j_2 m_1 m_2 \mp 1 | jm). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Esistono alcune relazioni di simmetria per i coefficienti di Clebsch–Gordan, di cui le più usate sono le seguenti:

$$\begin{aligned} (j_1 j_2 m_1 m_2 | jm) &= (-)^{j_1+j_2-j} (j_1 j_2 - m_1 - m_2 | j - m), \\ &= (-)^{j_1+j_2-j} (j_2 j_1 m_2 m_1 | jm), \\ &= (-)^{j_1-m_1} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}} (j_1 j m_1 - m | j_2 - m_2). \end{aligned} \quad (6.22)$$

<sup>16</sup> G. Racah: *Theory of Complex Spectra. II [Teoria degli spettri complessi. II]*, Physical Review **62** (1942) 438–462.

Composizione di due momenti angolari

Tab. 1. Coefficienti di Clebsch–Gordan  $(j_1 \frac{1}{2} m_1 m_2 | j m)$

$j$	$m_2 = \frac{1}{2}$	$m_2 = -\frac{1}{2}$
$j_1 + \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{j_1+m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\frac{j_1-m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$
$j_1 - \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{j_1-m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$	$\sqrt{\frac{j_1+m+\frac{1}{2}}{2j_1+1}}$

Tab. 2. Coefficienti di Clebsch–Gordan  $(j_1 1 m_1 m_2 | j m)$

$j$	$m_2 = 1$	$m_2 = 0$	$m_2 = -1$
$j_1 + 1$	$\sqrt{\frac{(j_1+m)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m+1)(j_1+m+1)}{(2j_1+1)(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{(2j_1+1)(2j_1+2)}}$
$j_1$	$-\sqrt{\frac{(j_1+m)(j_1-m+1)}{2j_1(j_1+1)}}$	$\frac{m}{\sqrt{j_1(j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1+m+1)}{2j_1(j_1+1)}}$
$j_1 - 1$	$\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1-m+1)}{2j_1(2j_1+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(j_1-m)(j_1+m)}{j_1(2j_1+1)}}$	$\sqrt{\frac{(j_1+m+1)(j_1+m)}{2j_1(2j_1+1)}}$

I valori di alcuni coefficienti di Clebsch–Gordan di uso frequente sono riportati in Tab. 1 e Tab. 2. Esistono tabulazioni più ampie<sup>17</sup> che ricorrono agli associati simboli a 3- $j$  di Wigner, definiti dalla relazione:

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j m) = (-)^{j_1-j_2+m} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

I simboli a 3- $j$  di Wigner hanno proprietà di simmetria di più facile memorizzazione:

<sup>17</sup> M. Rotenberg, R. Bivins, N. Metropolis e J.K. Wooten, jr.: *The 3-j and 6-j Symbols*, The Technology Press, MIT, Cambridge, Mass., 1959.

Lo spin

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_3 & j_1 & j_2 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix} \\ &= (-)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

*Esercizio 6.1*

Sapendo che è  $(j0m0|jm) = 1$ , valutare  $(jjm - m|00)$ .

*Esercizio 6.2*

Conoscendo il risultato dell'Esercizio precedente e utilizzando le proprietà di ortogonalità dei coefficienti di Clebsch–Gordan, verificare il seguente risultato:

$$\sum_m (jJm0|jm) = \delta_{J0}(2j+1). \quad (6.26)$$

### IX.7. Interazione spin-orbita

La presenza dello spin ha conseguenze anche sulla hamiltoniana che descrive il moto di un elettrone in un atomo, in quanto l'elettrone in movimento vede a sua volta il nucleo atomico in moto e ne subisce il campo magnetico. Se il moto relativo fosse rettilineo e uniforme, secondo la legge di Ampère–Laplace il campo magnetico visto dall'elettrone sarebbe (nel sistema di Gauss, cfr. Tab. D.2.):

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{mc} \mathbf{p} \times \nabla \phi. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Il momento magnetico di spin dell'elettrone perciò provoca un termine addizionale nella hamiltoniana:

$$H' = -\boldsymbol{\mu}_S \cdot \mathbf{B} = g \frac{e}{2m^2 c^2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} \times \nabla \phi. \quad (7.2)$$

Nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{C}^{2s+1}$ , cioè nello spazio che si ottiene facendo il prodotto diretto tra lo spazio delle posizioni e lo spazio di spin,  $H'$  deve essere uno scalare: la sua forma è proprio la più semplice che si possa costruire

a partire dai possibili ingredienti, che sono l'impulso  $\mathbf{p}$ , lo spin  $s$  e il potenziale  $V(r) = -e\phi(r)$ . Ponendo

$$-e\nabla\phi(r) \equiv \nabla V(r) = \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{r}, \quad (7.3)$$

si ottiene infine

$$H' = g a \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} s \cdot \mathbf{L}, \quad (7.4)$$

dove il coefficiente  $a$  risulta positivo:

$$a = \frac{1}{2m^2 c^2}. \quad (7.5)$$

In realtà, se si tiene conto che il moto relativo elettrone-nucleo non è rettilineo e uniforme e in linea di principio deve essere trattato relativisticamente, si ottiene nella (7.4) un coefficiente che per l'elettrone ( $g = 2$ ) è due volte più piccolo<sup>18</sup>:

$$H' = a \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} s \cdot \mathbf{L}. \quad (7.6)$$

La hamiltoniana  $H'$  dunque rappresenta fisicamente l'interazione tra il momento magnetico di spin dell'elettrone e il campo magnetico  $\mathbf{B}$  "visto" dall'elettrone stesso nel suo moto nel campo elettrostatico generato dal nucleo atomico. D'altra parte, in condizioni simili, una qualunque particella con momento magnetico di spin può subire l'interazione (7.4) tra il suo spin  $s$  e il suo momento angolare orbitale  $\mathbf{L}$ . Essa perciò viene detta *interazione spin-orbita*. È curioso che per i nucleoni all'interno del nucleo atomico il coefficiente  $a$  risulta negativo.

La conseguenza più importante dell'interazione spin-orbita è che lo stato che descrive la particella deve includere anche lo spin. Accanto allo spazio di Hilbert  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$  occorre considerare anche lo spazio complesso a  $2s + 1$  dimensioni  $\mathcal{C}^{2s+1}$ : lo stato totale è un elemento dello spazio prodotto  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{C}^{2s+1}$ .

D'altra parte è

$$s \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - s^2), \quad (7.7)$$

dove  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + s$  è il momento angolare totale. Perciò

$$[H', J^2] = [H', L^2] = [H', s^2] = 0. \quad (7.8)$$

Se anche il termine originale  $H_0$  della hamiltoniana commuta con  $J^2$ ,  $L^2$  e  $s^2$ , gli autostati della hamiltoniana totale  $H = H_0 + H'$  si possono porre nella forma

---

<sup>18</sup> A causa del moto non uniforme e non rettilineo, lo spin compie una rotazione, detta *precessione di Thomas*, responsabile del fattore  $\frac{1}{2}$ .  
Llewellyn Hilleth Thomas (n. 1903): *The motion of the spinning electron [Il moto dell'elettrone rotante]*, Nature **117** (1926) 514.

Lo spin

$$|ls; jm\rangle = \sum_{m_l m_s} (ls; m_l m_s | jm) |lm_l\rangle |sm_s\rangle, \quad (7.9)$$

dove i coefficienti di Clebsch–Gordan permettono di costruire la rappresentazione in cui sono diagonali  $L^2$ ,  $s^2$  e  $J^2$  (oltre che  $J_z$ ) a partire da stati  $|lm_l\rangle \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$  e  $|sm_s\rangle \in \mathcal{C}^{2s+1}$ .

Il vantaggio di usare gli stati (7.9) è evidente: oltre ad essere autostati di  $H_0$  per ipotesi, essi sono anche autostati di  $H'$ , in quanto

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{L} |ls; jm\rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] |ls; jm\rangle. \quad (7.10)$$

In particolare, per  $s = \frac{1}{2}$ , si ha

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{L} |ls; jm\rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 \begin{cases} l, & \text{per } j = l + \frac{1}{2}, \\ -(l+1), & \text{per } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (7.11)$$

Pertanto, al primo ordine della teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo,  $H'$  introduce una correzione ai livelli energetici di  $H_0$ , senza modificarne gli stati. Tale correzione risulta

$$\Delta E \equiv \langle ls; jm | H' | ls; jm \rangle = a \left\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right\rangle \frac{1}{2} \hbar^2 \begin{cases} l, & \text{per } j = l + \frac{1}{2}, \\ -(l+1), & \text{per } j = l - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (7.12)$$

dove il valore di aspettazione di  $(1/r)dV/dr$  è calcolabile se si sceglie il sistema e si conosce  $V$ . Per l'atomo idrogenoide ( $V(r) = -Ze^2/r$ ) gli autostati sono della forma

$$|nl \frac{1}{2}; jm\rangle = \sum_{m_l m_s} (l \frac{1}{2} m_l m_s | jm) |nlm_l\rangle | \frac{1}{2} m_s \rangle. \quad (7.13)$$

Quindi

$$\left\langle \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right\rangle = Ze^2 \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle, \quad (7.14)$$

dove



$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle &= \sum_{m_l m_s} \sum_{m'_l m'_s} (l \frac{1}{2} m_l m_s | j m) (l \frac{1}{2} m'_l m'_s | j m) \langle \frac{1}{2} m_s | \frac{1}{2} m'_s \rangle \langle n l m_l | \frac{1}{r^3} | n l m'_l \rangle \\
 &= \sum_{m_l m_s} \sum_{m'_l m'_s} (l \frac{1}{2} m_l m_s | j m) (l \frac{1}{2} m'_l m'_s | j m) \delta_{m_s m'_s} \\
 &\quad \times \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \langle n l m_l | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \frac{1}{r^3} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | n l m'_l \rangle \\
 &= \sum_{m_l m_s} \sum_{m'_l m'_s} (l \frac{1}{2} m_l m_s | j m) (l \frac{1}{2} m'_l m'_s | j m) \delta_{m_s m'_s} \\
 &\quad \times \int d\mathbf{r} f_{nl}^*(r) Y_{lm_l}^*(\theta, \phi) \frac{1}{r^3} f_{nl}(r) Y_{lm'_l}(\theta, \phi) \\
 &= \sum_{m_l m_s} (l \frac{1}{2} m_l m_s | j m) (l \frac{1}{2} m_l m_s | j m) \int dr f_{nl}^*(r) \frac{1}{r} f_{nl}(r).
 \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è eseguito l'integrale angolare e si sono utilizzate le delta. Inoltre, in virtù della (6.16) le somme sui coefficienti di Clebsch-Gordan si possono ora eseguire, ottenendo

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \int dr f_{nl}^*(r) \frac{1}{r} f_{nl}(r). \quad (7.15)$$

Inserendo le funzioni radiali dell'atomo idrogenoide (cfr. eq. (V.8.40)), si ottiene infine il risultato:

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{Z^3}{a_0^3 [l(l+1)(l + \frac{1}{2})n^3]}, \quad (7.16)$$

dove  $a_0 = \hbar^2 / me^2$  è il raggio di Bohr.

Pertanto la correzione energetica (7.12) diventa ( $\alpha = e^2 / \hbar c \simeq 1/137$ ):

$$\Delta E = \frac{Z^4 \alpha^4 m c^2}{4l(l+1)(l + \frac{1}{2})n^3} \begin{cases} l, & \text{per } j = l + \frac{1}{2}, \\ -(l+1), & \text{per } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (7.17)$$

In realtà l'interazione spin-orbita è un effetto relativistico. Perciò, se lo si considera, occorre coerentemente considerare anche l'espressione relativistica classica per l'energia in funzione dell'impulso e modificare di conseguenza la hamiltoniana. Il primo termine correttivo alla hamiltoniana non relativistica, che deriva da uno sviluppo dell'energia in serie di  $v/c = p/mc$  (cfr. eq. (III.3.10)), è:

$$H_r = -\frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3 c^2}. \quad (7.18)$$

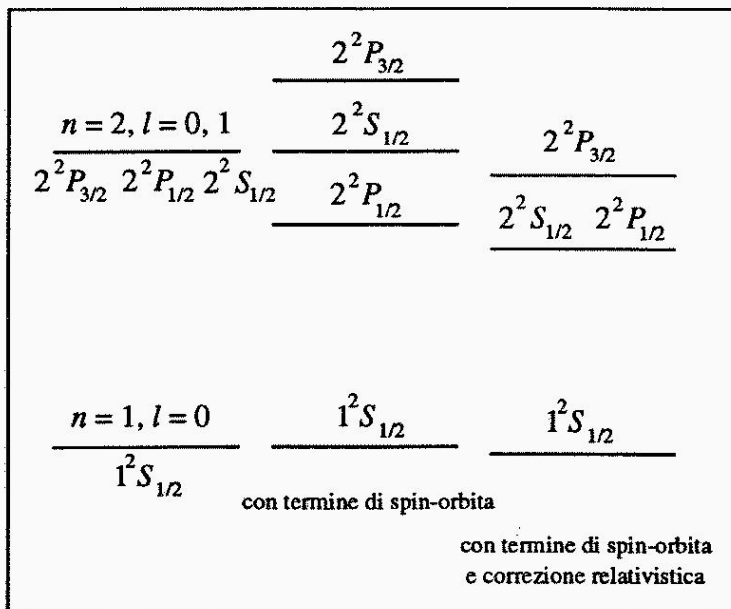


Fig. 7.1. I primi livelli dell'atomo di idrogeno alterati dal contributo dell'interazione spin-orbita e da effetti relativistici.

*Esercizio 7.1*

Calcolare la correzione relativistica all'energia dei livelli dell'atomo idrogenoide al primo ordine in  $v/c = p/mc$ , verificando il seguente risultato:

$$\Delta E = \frac{Z^2 \alpha^2}{n} E_n \left[ \frac{1}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right], \quad (7.19)$$

dove

$$E_n = -\frac{Z^2 \alpha^2}{2n^2} mc^2 \quad (7.20)$$

sono gli autovalori (V.8.17) per l'energia dell'atomo idrogenoide non relativistico.

Il calcolo è facilitato considerando la hamiltoniana totale  $H = H_0 + H_r$ , dove  $H_0$  è la hamiltoniana non relativistica dell'atomo idrogenoide col potenziale (V.8.1) e  $H_r$  è data dalla (7.18) con  $p^4 = [2m(H_0 - V)]^2$ .

Considerando dunque anche  $H_r$ , la correzione ai livelli  $E_n$  dell'atomo idrogenoide (7.20) diventa ora:

$$\Delta E = \frac{Z^2 \alpha^2}{n} E_n \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right). \quad (7.21)$$

La situazione per i primi livelli dell'atomo di idrogeno ( $Z = 1$ ) è raffigurata in fig. 7.1. Anche il livello  $n = 1$  ( $n^{2s+1}L_j = 1^2S_{1/2}$ ), pur non essendo influenzato dalla correzione di spin-orbita, si abbassa un po' per effetto relativistico. Sperimental-

mente i livelli  $2^2S_{1/2}$  e  $2^2P_{1/2}$  sono distanziati di  $5.81 \times 10^{-6}$  eV. Tale spostamento, noto come *spostamento di Lamb* (*Lamb shift*), è dovuto a effetti di elettrodinamica quantistica che non possono essere qui considerati <sup>19</sup>.

---

<sup>19</sup> L'americano Willis Eugene Lamb jr. (n. 1913) fu insignito del premio Nobel per la Fisica nel 1955 per la scoperta della struttura fine dello spettro dell'atomo di idrogeno, condividendo il premio con il tedesco Polykarp Kusch (n. 1911) che aveva determinato il momento magnetico dell'elettrone. Lo stesso Lamb riconobbe di avere ripreso l'idea da un lavoro di Luigi Giulotto (1911–1986) che studiava gli effetti relativistici sulle righe dello spettro dell'atomo di idrogeno.

L. Giulotto: *Struttura fine nella  $H_\alpha$* , Ricerca Scientifica e Ricostruzione, Anno 17 (1947) 209–216; *Fine Structure of  $H_\alpha$*  [*Struttura fine nella riga  $H_\alpha$* ], Physical Review **71** (1947) 562.

W.E. Lamb, jr. e R.C. Retherford: *Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method* [*Struttura fine dell'atomo di idrogeno con un metodo a microonde*], Physical Review **72** (1947) 241–243; *Fine Structure of the Hydrogen Atom. Part I.* [*Struttura fine dell'atomo di idrogeno. Parte I.*], Physical Review **79** (1950) 549–572; *Fine Structure of the Hydrogen Atom. Part II.* [*Struttura fine dell'atomo di idrogeno. Parte II.*], Physical Review **81** (1951) 222–232.