

Sigfrido Boffi

**IL PRINCIPIO
di
INDETERMINAZIONE**

$$\Delta p \cdot \Delta q \geq \frac{h}{4\pi}$$

QUADERNI DI FISICA TEORICA



Università degli Studi di Pavia
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

QUADERNI DI FISICA TEORICA
Collana curata da Sigfrido Boffi

Comitato Scientifico

Bruno Bertotti
Sigfrido Boffi
Italo Guarneri
Alberto Rimini
Marco Roncadelli

Sigfrido Boffi

**IL PRINCIPIO
di
INDETERMINAZIONE**

Università degli Studi di Pavia
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

Prima edizione: febbraio 1990
Prima edizione web: maggio 2009

ISBN 88-85159-03-6

INDICE

Premessa	7
§1. Introduzione	9
§2. Werner Heisenberg	12
– Lo sviluppo della meccanica quantistica	21
§3. Alcune note tecniche	39
– Il contenuto intuitivo della cinematica e della meccanica nella teoria quantistica	45
§4. Alcune osservazioni e commenti	75

PREMESSA

L'impossibilità di principio di definire, con arbitraria precisione e simultaneamente, la posizione e la quantità di moto di una particella fu riconosciuta nel 1927 da Werner Heisenberg; questo risultato sconvolge una delle ipotesi di base della meccanica classica e deriva da un'analisi critica dei metodi sperimentali di osservazione alla luce delle leggi quantistiche. Le relazioni di indeterminazione, che ne conseguono per quantità riguardanti aspetti complementari del comportamento delle particelle, rappresentano perciò un elemento caratteristico e fondamentale della meccanica quantistica; anzi, per Heisenberg, ne sono il contenuto intuitivo. Ma l'ampio dibattito da loro acceso sul significato di fenomeno fisico e sulla completezza della teoria quantistica indica che il senso comune stenta ad acquisire la nuova visione proposta da Heisenberg e qui illustrata nella traduzione del suo lavoro originale.

In questo *Quaderno*, dedicato a Heisenberg, viene anche ricordato lo sviluppo vorticoso della meccanica quantistica con le parole del discorso da lui pronunciato durante la cerimonia con cui gli fu assegnato il premio Nobel per la Fisica del 1932. Questo discorso è qui tradotto con l'autorizzazione della Fondazione Nobel, mentre il lavoro sul principio di indeterminazione è tradotto con il permesso della Springer Verlag, editrice dell'articolo sullo *Zeitschrift für Physik*. Entrambe le traduzioni avvengono col consenso della signora Elisabeth Heisenberg.

Alla preparazione del testo hanno giovato una conversazione con Jochen Heisenberg, oltre che corrispondenze epistolari con lui e con il cognato Walter Blum, e interessanti discussioni con Francesco Cannata, Italo Guarneri, Alberto Rimini, Marco Roncadelli e Berthold Schoch.

§ 1. Introduzione

“Definire la libertà morale appoggiandola sul principio d’indeterminazione, è altrettanto assurdo che dire: dal momento che non possiamo mettere tutti gli uomini in una prigione, o non li possiamo obbligare a vivere nello stesso modo dal mattino alla sera, bisogna pure concedere loro la libertà.

“Siccome il principio d’indeterminazione significa una cosa sola: che l’uomo e la scienza non sono in grado di fotografare la natura fin nelle sue ultime particolarità, è ridicolo allora voler trovare in ciò un fondamento di libertà. Una definizione di libertà non può esser basata su un fenomeno d’impotenza.

“... La matematica è un modo di descrivere i fenomeni fisici, come le regole della grammatica sono un modo di descrivere una lingua; ma le regole di grammatica non sono la lingua.”

Con queste parole il filologo Giacomo Devoto,¹ cogliendo il significato profondo del principio di indeterminazione, cercava di troncare una discussione che poteva diventare oziosa alla fine di una conferenza tenuta da Werner Heisenberg a Ginevra nel 1958.²

La scienza moderna, quale si è affermata in seguito ai contributi di Keplero, Galileo e Newton, ha delimitato il concetto di natura a quell’insieme di esperienze umane suscettibili di una descrizione matematica. I processi naturali risultano perciò accadimenti nello spazio e nel tempo, soggetti a leggi, valide in sé, indipendentemente dall’uomo che le ha scoperte: le leggi naturali rappresentano la spiegazione oggettiva della natura. La formulazione matematica si esplicita in equazioni, che regolano la dipendenza temporale delle quantità osservabili del sistema fisico in esame, e garantisce il rispetto del principio di causalità: la conoscenza completa del sistema a un certo istante

¹ Giacomo Devoto (1897–1974) è autore di una *Storia della lingua di Roma* (Cappelli, Bologna, 1940) in cui si preoccupa di ricostruire la lingua parlata a preferenza di quella letteraria. Grande specialista di linguistica italiana e di etimologia, ha rivalutato il ruolo dei dialetti in numerose opere, tra le quali si possono ricordare: l’edizione e l’illustrazione delle *Tavole di Gubbio (Tabulae Igunensiae)*, Poligrafico, Roma, 1947), un *Avviamento alla etimologia italiana* (dizionario etimologico, Le Monnier, Firenze, 1967), un importante dizionario della lingua italiana (*Civiltà di parole*, Vallecchi, Firenze, 1965) e l’opera *Il linguaggio d’Italia - Storia e strutture linguistiche italiane dalla Preistoria ai nostri giorni* (Rizzoli, Milano, 1974).

² La conferenza fa parte del ciclo di *Rencontres internationales de Genève*. Quattro di queste conferenze, tenute tra il 1952 e il 1958 da Werner Heisenberg, Max Born, Erwin Schrödinger e Pierre Auger sono state tradotte in italiano e pubblicate dalle Edizioni Scientifiche Borin-ghieri (Torino, 1959) col titolo: *Discussione sulla fisica moderna*.

permette di prevederne il comportamento futuro in modo strettamente deterministico. Compito dello scienziato è solo quello di focalizzare i componenti ultimi della materia e le loro mutue interazioni elementari; come già sostenuto da Democrito, le particelle, unica realtà immutabile, si muovono nello spazio e nel tempo, producendo gli svariati fenomeni osservabili e prevedibili in base alla risoluzione delle equazioni di moto. In questo senso il quadro della natura che così emerge dalla scienza diventa intuitivo e oggettivo.³

Esasperato nelle sue conseguenze riduzioniste e traslato sul piano filosofico, questo quadro porta a limitare l'esperienza umana a una successione di accadimenti predefiniti dalle condizioni iniziali, secondo le leggi della fisica. Dove finisce dunque il libero arbitrio?

Se invece, nello studio delle particelle elementari che costituiscono la materia sensibile, ci si accorge con Heisenberg che nel momento in cui si vuole misurare una nuova quantità fisica, l'intervento dell'osservatore è così sconvolgente da distruggere informazioni acquisite in precedenza, allora la concezione deterministica entra in crisi e occorre inventare un nuovo tipo di descrizione dei fenomeni. Anzi, occorre definire meglio il concetto di fenomeno fisico, perché non si può più prescindere da come si giunge alla conoscenza di un processo: le leggi che vengono formulate matematicamente non descrivono il comportamento delle particelle in sé, ma solo la conoscenza che ne abbiamo. Il singolo processo particolare non risulta più determinato in modo puramente causale: a partire dalla conoscenza del sistema in esame, le leggi della fisica permettono solo di fare previsioni statistiche su possibili esiti di misurazioni future. Si introduce dunque quell'elemento di aleatorietà così inaccettabile per un figlio dell'ottocento positivista qual era Einstein.⁴

Se il comportamento naturale non è riconducibile in linea di principio a uno stretto determinismo e la scienza stessa riconosce la validità di riflessioni riguardanti il fenomeno, distinto da un noumeno inafferrabile dai sensi,⁵

³ Si recupera così l'idea di Immanuel Kant (1724–1804) che la conoscenza è *intuizione* (*Anschaulichkeit*), in quanto conoscenza immediata che avviene nello spazio e nel tempo, grazie al fatto che ogni rappresentazione sensibile è determinata spazialmente e temporalmente: spazio e tempo tornano ad essere, anche in fisica, forme della sensibilità, configurandosi come modi con cui il soggetto coglie sensibilmente l'altro da sé.

Il vocabolo tedesco *anschaulich*, deriva da *schauen* che ha il duplice significato di *vedere* e *guardare*. La preposizione *an* gli fa acquistare il significato di *intuitivo*, vocabolo che deriva dal latino *intueri* che ha un'etimologia simile a quella di *anschauen*, cioè *guardare dentro*. Pertanto *anschaulich*, che è un aggettivo ricorrente negli scritti di Heisenberg, verrà tradotto in questo quaderno con *intuitivo* e va inteso appunto in senso attivo per l'osservatore: *così chiaro che basta guardarlo*. Spesso sui dizionari il termine *anschaulich* viene proposto come *evidente*, ma *evidente* deriva da *e-video* che è associato a un atteggiamento passivo dell'osservatore, che *vede* in quanto il fenomeno *emerge* alla sua esperienza.

⁴ È nota l'affermazione di Albert Einstein (1879–1955) che “il buon Dio non gioca a dadi”, ricordata ogni volta che si discute sulle obiezioni di Einstein all'interpretazione statistica attribuibile alle leggi della meccanica quantistica.

⁵ Queste riflessioni erano già contenute nella dissertazione *De mundis sensibilis atque intelligibilis forma et principiis* che Kant scrisse nel 1770 per concorrere alla cattedra di logica

sembrerebbe dunque aprirsi uno spiraglio, anche sulla base di una realtà esclusivamente razionale, per recuperare il libero arbitrio nelle vicende umane e giustificare domande in questo senso, da porsi a Heisenberg quale artefice di un tale capovolgimento di prospettiva.

In realtà il contenuto di idee che va sotto il nome di principio di indeterminazione costituisce l'aspetto più rivoluzionario introdotto dalla meccanica quantistica nella storia della scienza e rappresenta tuttora uno scoglio talvolta insormontabile per il cosiddetto senso comune. Equivoci, come quello di confondere l'impossibilità di una descrizione oggettiva dei processi naturali con la presunta libertà d'azione dell'uomo conseguente al venir meno di una realtà deterministica, hanno afflitto la storia della filosofia degli anni '30.⁶ Ma la riluttanza ad accettare un nuovo porsi dello scienziato di fronte ai fenomeni ha caratterizzato perfino molti degli stessi protagonisti della nuova fisica.⁷ Non c'è quindi da stupirsi se anche pensatori profondi, come per esempio Karl Popper, hanno frainteso il significato del principio di indeterminazione.⁸

e metafisica nell'Università di Königsberg e hanno raggiunto la massima lucidità nella sua *Critica della ragion pura* [*Kritik der reinen Vernunft*], apparsa nel 1781. Ma Kant si occupava dei metodi del ragionamento mediante i quali la mente umana giunge a conclusioni valide riguardo al mondo naturale, arrivando a sottolineare che la conoscenza sensibile è di per sé limitata alle apparenze (fenomeno). Qui invece la limitazione è di principio, nello schema della descrizione matematica dei processi naturali.

⁶ Si pensi al dibattito sulla ricerca dell'essere scaturito dalla fenomenologia di Edmund Husserl (1859–1938) e dall'esistenzialismo di Martin Heidegger (1889–1976) e di Jean-Paul Sartre (1905–1980).

⁷ Tra i numerosissimi esempi che coinvolgono, oltre ad Einstein, anche fondatori della meccanica quantistica quali Max Planck (1858–1947), Paul Ehrenfest (1880–1933), Louis-Victor de Broglie (1892–1987) e Erwin Schrödinger (1887–1961), basti ricordare qui l'intervento di Max Born (1882–1970) in apertura alla discussione che seguì alla conferenza di Schrödinger del 1952, riportata nel citato libro sulla *Discussione sulla fisica moderna* e intitolata: *L'immagine attuale della materia*. In essa traspare uno Schrödinger riluttante ad accettare l'interpretazione statistica della meccanica quantistica e in crisi di fronte alla realtà del dualismo onda-corpuscolo, facile bersaglio quindi di Born che afferma: "la brillante esposizione di Schrödinger sullo stato attuale della fisica deve essere considerata, nonostante tutto, fondamentalmente erronea".

⁸ Karl Raimund Popper (1902–1994): *Logic der Forschung*, Julius Springer, Vienna, 1934 [traduzione inglese: *The Logic of Scientific Discovery*, Hutchinson, Londra, 1959; traduzione italiana: *La logica della scoperta scientifica*, Giulio Einaudi Editore, Torino, 1970], in particolare il cap. IX dell'edizione italiana. Si veda anche K. R. Popper: *Zur Kritik der Ungenauigkeitsrelationen* [*Critica delle relazioni di indeterminazione*], *Die Naturwissenschaften* **22** (1934) 807.

Inizialmente Popper non afferrò completamente il nuovo punto di vista, arrivando a proporre esperimenti "decisivi" rivelatisi erronei (cfr. §77 e nota a pag. 257 dell'edizione italiana). Ma egli, irriducibile realista metafisico, pur riconoscendo l'errore delle sue posizioni iniziali, non si è mai rassegnato a considerare le relazioni di indeterminazione come un limite di principio alle nostre conoscenze dei fatti naturali. A proposito della controversia sul principio di causalità e sulle conseguenze logiche dell'interpretazione fisica della meccanica quantistica, scrive Popper in una nota aggiunta nell'edizione italiana a pag. 234: "Né su questo punto, né sui punti principali della mia critica, ho cambiato opinione. Ma ho cambiato la mia interpretazione della teoria dei quanti, insieme con la mia interpretazione della teoria della probabilità". E infatti propone una nuova variante di esperimento "decisivo" in *Realism*

In questo Quaderno dedicato a Heisenberg, dopo alcune note biografiche viene presentato e discusso il suo lavoro originale del 1927, in cui vengono proposte le relazioni di indeterminazione che legano le imprecisioni dei risultati di una misurazione di posizione e di impulso di una particella. A questo lavoro viene fatto precedere il discorso da lui tenuto nel 1933 in occasione della cerimonia per il conferimento del premio che la Fondazione Nobel gli aveva assegnato nel 1932: tale discorso è una mirabile sintesi dello sviluppo travolgente della meccanica quantistica, che si completa proprio con l'enunciazione del principio di indeterminazione e la parallela interpretazione statistica proposta da Born,⁹ approfondita da Pauli¹⁰ e risolta nel principio di complementarità di Bohr.¹¹

§ 2. Werner Heisenberg

Werner Karl Heisenberg nacque da August e Annie Wecklein il 5 dicembre 1901 a Würzburg, città della Franconia bavarese bagnata dal Meno. Il padre, dopo aver insegnato lettere classiche al Maximilian Gymnasium di Monaco e avere sposato la figlia del direttore della scuola, Nikolaus Wecklein, si era trasferito a Würzburg come libero docente di Filologia Greca e Medievale alla locale Università, ma ritornò a Monaco nel 1910 per ricoprire la cattedra universitaria di Filologia Classica. Werner ebbe così la possibilità di studiare nello stesso liceo in cui avevano insegnato il padre e il nonno materno.

in quantum mechanics and a new version of the EPR experiment [Realismo in meccanica quantistica e una nuova versione dell'esperimento EPR], in Open Questions in Quantum Physics, edito da Gino Tarozzi e Alwyn van der Merwe, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1985, pp. 3-25.

⁹ Max Born (1882–1970): *Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, *Zeitschrift für Physik* **36** (1926) 863–867; *Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, *Zeitschrift für Physik* **38** (1926) 803–827.

¹⁰ Wolfgang Pauli (1900–1958): *Über Gasentartung und Paramagnetismus [Gas degenerare e paramagnetismo]*, *Zeitschrift für Physik* **41** (1927) 81. Pauli applica allo studio delle proprietà magnetiche di un gas perfetto l'interpretazione statistica delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger che Born aveva proposto nello studio dei processi d'urto.

¹¹ Niels Henrik David Bohr (1885–1962): *The quantum postulate and the recent development of atomic theory [Il postulato quantistico e il recente sviluppo della teoria atomica]*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Fisici*, Zanichelli, Bologna, 1928, p. 565–588. Questa relazione, svolta nella giornata del 16 settembre 1927 a Como durante il congresso organizzato per celebrare il centenario della morte del comasco Alessandro Volta (1745–1827), in pratica costituisce il punto d'arrivo della ricerca avviata il 14 dicembre 1900 con la comunicazione fatta da Max Planck alla Società Tedesca di Fisica riunita in Berlino per spiegare la radiazione di corpo nero (M. Planck: *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung in Normalspektrum [Teoria della legge di distribuzione energetica dello spettro normale]*, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **2** (1900) 237–245). Una versione più estesa della relazione fatta a Como si trova nell'articolo di N. Bohr: *Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik [Il postulato quantistico e il recente sviluppo della fisica atomica]*, *Die Naturwissenschaften* **16** (1928) 245–257.

Superati gli anni difficili della guerra e della repubblica bavarese¹² e conseguito il diploma ginnasiale, Werner non si iscrisse immediatamente all'Università. Di ritorno da un viaggio di vacanze con amici cadde ammalato e fu costretto a letto per lungo tempo. “Però, durante questi mesi cruciali m’imbattei in un’opera affascinante, ancorché impegnativa: *Spazio, tempo e materia*, del famoso matematico Hermann Weyl, in cui si cercava di dar forma matematica alla teoria della relatività. Si trattava di matematica e di concetti ad alto livello di astrazione: la difficoltà del discorso mi turbò e mi eccitò.”¹³ Perciò Werner volle iscriversi a matematica e fu presentato dal padre a Ferdinand von Lindemann (1852–1939). Ma, giunto nello studio di Lindemann e spaventato dal cagnolino che abbaiava furiosamente più che dall’aspetto del grande matematico che era riuscito a spiegare la quadratura del cerchio con la scoperta della trascendenza del numero π , decise che era meglio tentare lo studio della fisica. Così nel 1920 Werner si iscrisse all’Università di Monaco, dove studiò fisica sotto la guida di Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868–1951) fino al 1923.

L’atmosfera del corso di fisica era stimolante: vi insegnavano fisica sperimentale Wilhelm Wien (1864–1928), chimica fisica Karl Ferdinand Herzfeld (1892–1978), analisi matematica Artur Rosenthal (1887–1959) e teoria delle funzioni Alfred Pringsheim (1850–1941); tra gli assistenti di Sommerfeld c’erano Gregor Wentzel (1898–1978) e Wolfgang Pauli (1900–1958), col quale il quasi coetaneo Werner stabilì un rapporto reciproco di stima e amicizia durato tutta la vita.

Nel giugno del 1922 il giovane Werner si è fatto così apprezzare da Sommerfeld da essere prescelto per accompagnarlo a Göttingen, dove Niels Bohr avrebbe tenuto un ciclo di conferenze sulla struttura atomica.¹⁴ Qui, una sua obiezione a Bohr su un calcolo di Kramers¹⁵ indusse Bohr a invitarlo a fare

¹² Il “socialdemocratico indipendente” Kurt Eisner (1867–1919) era stato il promotore di un movimento rivoluzionario e scissionista in Baviera, e in particolare a Monaco, alla fine del primo conflitto mondiale: i disordini continuarono per qualche mese anche dopo la morte violenta di Eisner e l’intervento delle truppe governative.

Sono di questi anni, durante il servizio militare, le letture de *La critica della ragion pura* di Kant e del *Timeo* di Platone, che tanta parte avranno per Heisenberg nella ricerca di un’armonia tra valori spirituali e conquiste scientifiche.

¹³ Così ricorda quegli anni W. Heisenberg: *Der Teil und das Ganze*, Piper, Monaco, 1969. La traduzione inglese di A. J. Pomerans (*Physics and Beyond*, Harper and Row, New York, 1971) è stata tradotta in italiano da Marco e Dida Paggi: *Fisica e oltre. Incontri con i protagonisti 1920–1965*, Boringhieri, Torino, 1984.

Il libro è interessante per ricostruire il clima intellettuale in cui ha vissuto e operato l’autore. Il testo citato da Heisenberg è quello di Hermann Weyl (1885–1955): *Raum, Zeit, Materie*, Springer, Berlino, 1918, di cui la quarta edizione del 1921 venne tradotta in inglese e riprodotta successivamente in edizione americana: *Space Time Matter*, Dover Publ., 1950.

¹⁴ Questo ciclo di seminari è divenuto famoso in seguito come *Bohr Festspiele [Bohr Festival]*.

¹⁵ Hendrik Anthony Kramers (1894–1952): *Über den Einfluss eines elektrischen Feldes auf die Feinstruktur der Wasserstofflinien [Influenza del campo elettrico sulla struttura fina delle righe dello spettro dell’idrogeno]*, *Zeitschrift für Physik* 3 (1920) 199–223. In questo

quattro passi con lui sulla vicina collina chiamata Hainberg. L'incontro, durato circa tre ore, ebbe una profonda influenza sulla formazione di Heisenberg, come lui stesso ricorda nel volume dedicato a Bohr.¹⁶ Secondo Bohr occorre sempre privilegiare i fenomeni reali piuttosto che analizzare le ipotesi di base della teoria, in modo da ottenere le relazioni tra le quantità fisiche prima per via intuitiva e solo dopo derivarle in modo formale: “Bohr – dice Heisenberg – era soprattutto un filosofo, non un fisico, ma capiva che la filosofia naturale nella nostra epoca ha un peso, solo se ogni dettaglio può essere sottoposto al riscontro inesorabile dell'esperimento”.

Nell'autunno del 1922 Heisenberg si trasferisce a Göttingen come assistente di Born, in sostituzione di Pauli che, dopo un anno trascorso a Göttingen, era andato ad Amburgo. Ritournerà a Monaco solo per la conclusione degli studi e la sofferta discussione della tesi di dottorato nel luglio del 1923.¹⁷

L'Università di Göttingen, fondata nel 1734 dall'Elettore di Hannover Georg August come espressione e stimolo della rinascita culturale tedesca e dopo essere stata uno dei centri più attivi dell'illuminismo, vide svilupparsi una straordinaria attività in matematica che, iniziata con l'arrivo di Karl Friedrich Gauss (1777–1855) nel 1795, continuò per tutto il XIX secolo fino a David Hilbert (1862–1943), giunto a Göttingen nel 1895.¹⁸ Con Hilbert non solo continuò la tradizione matematica,¹⁹ ma venne favorito anche lo sviluppo della fisica, che pure in quell'Università aveva trovato illustri cultori come Georg Christoph Lichtenberg (1742–1799) e Wilhelm Eduard Weber (1804–1891).

Nel 1920, in seguito al trasferimento da Göttingen a Zurigo da parte di Debye²⁰ e grazie all'interessamento di Hilbert, furono chiamati a Göttingen

lavoro Kramers studia quello che è noto come effetto Stark quadratico, un problema affrontato indipendentemente anche da Sommerfeld: *Über den Starkeffekt zweiter Ordnung [Sull'effetto Stark del secondo ordine]*, *Annalen der Physik* **65** (1921) 36–40. Su invito di Sommerfeld, Heisenberg aveva fatto una presentazione del lavoro di Kramers nel corso dei seminari interni a Monaco e quindi ne conosceva bene i dettagli.

¹⁶ W. Heisenberg: *Quantum Theory and Its Interpretation [Teoria quantistica e sua interpretazione]*, in *Niels Bohr: his life and work as seen by his friends and colleagues*, edito da Stefan Rozental, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1967, p. 94–108.

¹⁷ W. Heisenberg: *Über die Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen [Stabilità e turbolenza delle correnti in un liquido]*, *Annalen der Physik* **74** (1924) 577–627. La commissione d'esame era composta, oltre che da Sommerfeld e Wien, dal matematico Oskar Perron (1880–1975) e dall'astronomo Hugo von Seeliger (1849–1924); nonostante la prova sperimentale totalmente negativa sostenuta con Wien, la bontà della tesi fu premiata *cum laude*.

¹⁸ A Gauss, prima di Hilbert, succedettero Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833–1872), Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), Felix Klein (1849–1925).

¹⁹ Furono con Hilbert a Göttingen, tra gli altri, personalità come Hermann Minkowski (1864–1909), Hermann Weyl (1885–1955), Amalie Emmy Noether (1882–1935) e Richard Courant (1888–1972).

²⁰ Petrus Josephus Wilhelmus Debye, premio Nobel per la Chimica nel 1936 per il contributo alla conoscenza della struttura molecolare mediante diffrazione di raggi X nei gas, aveva

James Franck (1882–1964) e Max Born (1882–1970). Franck, già noto per aver dimostrato l'esistenza dei livelli energetici negli atomi,²¹ ebbe la responsabilità delle ricerche sperimentali; Born, che aveva già lavorato a Göttingen dalla fine del 1908 all'inizio del 1915, prima con Minkowski e poi a contatto con Debye e Hilbert,²² ebbe l'incarico di dirigere le ricerche teoriche.

A Göttingen Heisenberg impara da Born a padroneggiare il formalismo matematico nella descrizione di un fenomeno fisico, un aspetto che completa la sua formazione cominciata come allievo di Sommerfeld, il quale invece privilegiava l'intuito fisico e l'aderenza al fatto sperimentale. Con Born, e più ancora durante i sette mesi passati a Copenhagen da Bohr con una borsa Rockefeller, tra la fine del 1924 e l'aprile del 1925, Heisenberg si immerge nelle problematiche di fisica atomica che maggiormente mettevano in crisi la fisica classica: l'esistenza di due livelli "stabili" dell'atomo di elio (orto- e para-elio), l'effetto Zeeman anomalo, l'uso del principio di corrispondenza nella formulazione delle nuove leggi atomiche, la costruzione di modelli di teoria dei quanti per la spiegazione degli spettri atomici e della dispersione della luce.²³

Nel giugno del 1925, mentre era intento allo studio quantistico dell'oscillatore anarmonico, fu colto da un violentissimo attacco di febbre allergica e costretto a prendersi una vacanza di due settimane su un'isola praticamente senza vegetazione del mare del Nord, Helgoland, al centro dell'omonimo golfo in cui sfocia l'estuario dell'Elba. La vacanza fu tutt'altro che tale: lavorando anche di notte, Heisenberg fondò la nuova teoria dell'atomo.

Il principio di base della nuova teoria è quello di fare intervenire solo ciò che si può realmente osservare, cioè la radiazione atomica. Nelle relazioni matematiche devono entrare solo quantità fisicamente osservabili, come le fre-

sviluppato il metodo con Paul Scherrer (1890–1969) durante i sei anni di permanenza a Göttingen.

²¹ J. Franck e G. L. Hertz: *Über Zusammenstöße zwischen langsamen Elektronen und Gasmolekülen [Urti tra elettroni lenti e molecole di gas]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **15** (1913) 373–390, 613–620; *Über Zusammenstöße zwischen langsamen Elektronen und den Molekülen des Quecksilberdampfes und die Ionisierungsspannung desselben [Urti tra elettroni lenti e molecole di vapori di mercurio e tensione di ionizzazione dello stesso]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **16** (1913) 457–467.

Per queste ricerche James Franck e Gustav Ludwig Hertz (1887–1975, nipote di Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894), scopritore delle onde elettromagnetiche) ricevettero nel 1926 il premio Nobel per la Fisica del 1925.

²² È di questo periodo la serie di lavori con Theodor von Kármán (1881–1963) sulla dinamica reticolare di un cristallo e sui calori specifici nei solidi.
N. Born e Th. von Kármán: *Über Schwingungen von Raumgittern [Vibrazioni di un reticolo spaziale]*, Physikalische Zeitschrift **13** (1912) 297–309; *Zur Theorie der spezifischen Wärme [Teoria del calore specifico]*, Physikalische Zeitschrift **14** (1913) 15–19.

²³ Per i dettagli su queste ricerche, si veda il testo di Jagdish Mehra e Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory*, vol. 2, *The Discovery of Quantum Mechanics. 1925*, Springer Verlag, New York, 1982.

quenze quantistiche degli spettri atomici, e non le orbite elettroniche classiche, con i loro raggi e periodi di rotazione, che non sono osservabili e che invece erano alla base del sistema atomico planetario della ormai insoddisfacente teoria di Bohr–Sommerfeld.²⁴ Il risultato è che quantità meccaniche, come la posizione e l'impulso dell'elettrone, non devono essere più rappresentate da numeri ordinari, ma da strutture matematiche astratte, costituite da una tabella di numeri a infinite righe e infinite colonne.

Di ritorno a Göttingen, incoraggiato dal consenso entusiasta di Pauli, Heisenberg consegnò a Born il testo manoscritto del suo nuovo lavoro²⁵ e se ne andò a Leiden da Ehrenfest,²⁶ a Cambridge da Fowler,²⁷ per poi rilassarsi in una vera, meritata vacanza fino a metà settembre sulle montagne intorno a Monaco.

Durante il mese di agosto Born, dopo aver immediatamente riconosciuto

²⁴ Si può notare che in questo approccio Heisenberg si è lasciato guidare da un principio di base simile a quello utilizzato da Einstein nel formulare la teoria della relatività eliminando concetti, quali la velocità assoluta e la simultaneità di due eventi in posti diversi, che non hanno possibilità di riscontro sperimentale. Cfr. M. Born: *Die statistische Deutung der Quantenmechanik [L'interpretazione statistica della meccanica quantistica]*, in *Les Prix Nobel en 1954*, Imprimerie Royale P.A. Norstedt & Söner, Stoccolma, 1955. Discorso pronunciato l'11 dicembre 1954 in occasione del ricevimento del premio Nobel per la Fisica, oggetto del Quaderno: *L'interpretazione statistica della meccanica quantistica*, in questa collana.

²⁵ *Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen [Reinterpretazione di relazioni cinematiche e meccaniche secondo la teoria dei quanti]*, *Zeitschrift für Physik* **33** (1925) 879–893. Il lavoro fu spedito da Born stesso alla rivista, che lo ricevette il 29 luglio 1925.

²⁶ L'Università di Leiden era uno dei centri sperimentali più interessanti: vi avevano operato scienziati come Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), premio Nobel per la Fisica nel 1902 con Pieter Zeeman (1865–1943) per gli studi compiuti insieme sull'influenza del magnetismo sui fenomeni di radiazione, e Heike Kamerlingh-Onnes (1853–1926), organizzatore di uno specializzato laboratorio criogenico e premio Nobel per la Fisica nel 1913 per gli studi della materia alle basse temperature e per la produzione di elio liquido.

²⁷ A Cambridge, una delle più vecchie e prestigiose Università europee, famosa fin dai tempi in cui vi insegnò Isaac Newton (1642–1727), si erano avvicinati, tra gli altri, Henry Cavendish (1731–1810), George Gabriel Stokes (1819–1903), James Clerk Maxwell (1831–1879) e, in tempi più recenti, John William Strutt (Lord Rayleigh) (1842–1919), premio Nobel per la Fisica nel 1904 per la scoperta dell'argo, e Joseph John Thomson (1856–1940), premio Nobel per la Fisica nel 1906 per gli studi sulla conduzione nei gas e la scoperta dell'elettrone. Qui, nel laboratorio intitolato a Cavendish, giunse anche Niels Bohr nel 1911 prima di andare a Manchester da Rutherford e sviluppare il suo modello atomico.

Quando Heisenberg arriva nel luglio del 1925, il laboratorio è diretto da Ernest Rutherford of Nelson (1871–1937), tornato a Cambridge nel 1919. Premio Nobel per la Chimica nel 1908, grazie ai risultati delle sue esperienze sulla disintegrazione degli elementi e la chimica della sostanze radioattive, e noto per le indagini sulla diffusione di particelle α da parte di nuclei atomici, Rutherford è assistito, per le ricerche sperimentali, da James Chadwick (1891–1974), futuro premio Nobel per la Fisica nel 1935 per la scoperta del neutrone, e dal genero Ralph Howard Fowler (1889–1844), che era supervisore dell'attività di fisica teorica del giovane Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), giunto a Cambridge l'anno prima.

A Cambridge il 28 luglio 1925 Heisenberg tenne un seminario sull'effetto Zeeman e non accennò al suo recente lavoro se non alla fine nelle discussioni private, ma spedì poi a Fowler una copia delle bozze del suo articolo. E proprio da Fowler Dirac ne ricevette il testo, che

che le strutture matematiche di Heisenberg obbedivano a una legge di moltiplicazione non commutativa tipica del calcolo matriciale da lui studiato in gioventù, sviluppò ulteriormente la teoria in collaborazione con l'altro suo allievo Ernst Pascual Jordan (1902–1980),²⁸ tenendo costantemente informato Heisenberg dei loro progressi. Al rientro dalle vacanze, Heisenberg andò a Copenhagen, dove era stato nominato Lettore di Fisica Teorica, ma, grazie a un servizio postale di un'efficienza che oggi non si ardisce di pensare, riuscì lo stesso a mantenere i contatti con Bohr e Jordan. I tre arrivarono a una completa elaborazione dello schema matriciale della meccanica quantistica,²⁹ prima che Born lasciasse l'Europa per raggiungere Boston, dove era stato invitato al Massachusetts Institute of Technology per il semestre invernale 1925–26.³⁰

Dopo un anno passato a Copenhagen da Bohr,³¹ Heisenberg viene nominato, a soli 26 anni, Professore di Fisica Teorica all'Università di Lipsia e, nel 1932, insignito del premio Nobel per la Fisica “per la creazione della meccanica quantistica, la cui applicazione ha portato tra l'altro alla scoperta delle forme allotropiche dell'idrogeno”.³²

lo convinse a tentarne degli sviluppi.

²⁸ Jordan era stato allievo di Richard Courant (1888–1972) a Göttingen e lo aveva aiutato nella redazione del primo volume del testo di R. Courant e D. Hilbert: *Methoden der mathematischen Physik*, Springer, Berlino, 1924, la cui seconda edizione del 1931 è tradotta in inglese (*Methods of Mathematical Physics*, Interscience, New York, 1953). In questo volume veniva trattato anche il calcolo matriciale.

Secondo quanto riferito da Max Jammer (*The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw Hill, New York, 1966, p. 207–209), durante un viaggio in treno verso Hannover Born raccontava a un collega che Pauli non aveva accettato la sua idea di un lavoro comune per dare fondamento matematico alla proposta di Heisenberg; fu allora che Jordan, seduto nello stesso scompartimento, si offrì di collaborare.

M. Born e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik [Meccanica quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **34** (1925) 858–888, ricevuto dalla rivista il 27 settembre 1925.

²⁹ M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik II [Meccanica quantistica II]*, *Zeitschrift für Physik* **35** (1926) 557–615, ricevuto dalla rivista il 16 novembre 1925.

³⁰ Qui Born frui della competenza matematica di Norbert Wiener (1894–1964), futuro padre della cibernetica, per dare una formulazione più rigorosa dell'approccio di Göttingen alla fisica atomica.

M. Born e N. Wiener: *A new foundation of the laws of quantization of periodic and aperiodic phenomena [Una nuova fondazione delle leggi di quantizzazione dei fenomeni periodici e non periodici]*, *Journal of Mathematics and Physics*, Massachusetts Institute of Technology, **5** (1926) 84–98; *Eine neue Formulierung der Quantengesetze für periodische und nicht periodische Vorgänge [Una nuova formulazione per i processi periodici e non periodici]*, *Zeitschrift für Physik* **36** (1926) 174–187, ricevuto dalla rivista il 5 gennaio 1926.

³¹ Un anno fruttuosissimo: è a Copenhagen che riconosce la relazione di indeterminazione che intercorre tra variabili canonicamente coniugate e ne discute con Bohr e i colleghi dell'Istituto, partecipando in modo sostanziale alla definizione di quella che poi va sotto il nome di “interpretazione di Copenhagen” della meccanica quantistica.

W. Heisenberg: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik [Il contenuto intuitivo della cinematica e della meccanica nella teoria quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **43** (1927) 172–198. È il lavoro presentato in questo *Quaderno*.

³² Così infatti si legge nella motivazione del Comitato della Fondazione Nobel.

Il 1932 è un anno eccezionale per la fisica. Vengono scoperti il positone³³ e il neutrone;³⁴ entra in funzione il ciclotrone di Berkeley³⁵ e viene elaborata la teoria quantistica per particelle a spin qualsiasi da parte di Ettore Majorana (1906–1938).³⁶ Heisenberg si dedica allora allo studio dei nuclei atomici, considerandoli costituiti da nucleoni, cioè particelle indistinguibili tra di loro, che si possono presentare nella veste di protoni e neutroni; tra i nucleoni si esercitano delle forze che originano proprio dalla loro indistinguibilità e che sono legate all'invarianza del sistema per lo scambio delle loro coordinate. Heisenberg pensa alle coordinate di spin,³⁷ mentre Majorana pensa alle coordinate spaziali.³⁸ Oggi le forze di scambio sono chiamate perciò forze di Heisenberg–Majorana.

Nell'aprile 1937 Werner Heisenberg sposa Elisabeth Schumacher, figlia di Hermann Schumacher, professore di Economia Nazionale all'Università di Berlino. La nuova famiglia si ingrandisce rapidamente con la nascita dei gemelli Maria e Wolfgang nel 1938, seguiti da Jochen (1939), Martin (1940), Barbara (1942), Christine (1944) e Verena (1950).

Nel 1941 Heisenberg si trasferisce a Berlino a dirigere l'Istituto di Fisica intitolato al Kaiser Wilhelm. Per decisione governativa nel settembre 1939 l'Istituto era divenuto il centro di studio del progetto Uranio per le applicazioni militari dell'energia nucleare, una forma di energia la cui potenzialità era

³³ Carl David Anderson (1905–1991): *The Positive Electron [L'elettrone positivo]*, *Physical Review* **43** (1932) 491–494. Anderson aveva costruito una camera di Wilson con Robert Andrews Millikan (1868–1953) per studiare la radiazione cosmica scoperta da Victor Franz Hess (1883–1964). Una traccia fotografica, registrata il 2 agosto 1932, indicava la rivelazione di una particella cosmica di carica positiva: ciò confermava l'intuizione di Dirac nel proporre che le soluzioni a energia negativa della sua equazione relativistica corrispondessero a una particella del tutto simile all'elettrone, eccetto che per l'opposta carica elettrica. Per questo furono insigniti del Premio Nobel per la Fisica: Dirac nel 1933, insieme con Schrödinger, e Anderson nel 1936, insieme con V. F. Hess.

³⁴ J. Chadwick: *Possible Existence of a Neutron [Possibile esistenza di un neutrone]*, *Nature* **129** (1932) 312. Chadwick fu il primo a rivelare una particella della stessa massa del protone, ma privo di carica elettrica, chiamandola neutrone, anche se i coniugi Frédéric Joliot (1900–1958) e Irène Joliot–Curie (1897–1956) lo avevano incontrato qualche mese prima senza riconoscerlo. Chadwick perciò ottenne il premio Nobel per la Fisica nel 1935, mentre essi ricevettero nello stesso anno il premio Nobel per la Chimica per la sintesi di nuovi elementi radioattivi.

³⁵ È la prima macchina acceleratrice di particelle, costruita da Ernest Orlando Lawrence (1901–1958), premio Nobel per la Fisica nel 1939: con essa sarà possibile studiare la radioattività artificiale e cominciare l'indagine sui nuclei atomici.

³⁶ E. Majorana: *Teoria relativistica di particelle con momento intrinseco arbitrario*, *Nuovo Cimento* **9** (1932) 335–344.

³⁷ H. Heisenberg: *Über den Bau der Atomkerne [Sulla struttura dei nuclei atomici]*, *Zeitschrift für Physik* **77** (1932) 1–11; **78** (1932) 156–164; **80** (1933) 587–596.

³⁸ E. Majorana: *Über die Kerntheorie [Sulla teoria dei nuclei]*, *Zeitschrift für Physik* **82** (1933) 137–145; *Sulla teoria dei nuclei*, *La Ricerca Scientifica* **4** (1933) 559–565. A convincerlo a pubblicare il lavoro fu proprio Heisenberg, presso il quale Majorana fu indotto da Fermi ad andare per un breve periodo.

stata intravista sia in Germania, sia negli Stati Uniti d'America subito dopo la scoperta della fissione del nucleo di uranio nel dicembre 1938.³⁹ La situazione politica internazionale era già chiara da tempo e molti fisici europei avevano varcato l'oceano per una scelta di libertà. Nell'estate del 1939 Heisenberg tenne alcune lezioni alle Università di Ann Arbor (Michigan) e Chicago, dove incontrò Enrico Fermi (1901–1954), fuggito negli USA nel dicembre 1938 direttamente da Stoccolma dopo avere ritirato il premio Nobel.⁴⁰ Alle insistenze di Fermi che lo incoraggiava a emigrare, Heisenberg, con dignità e fermezza, rifiuta l'idea perché non vuole sentirsi un traditore nei confronti dei suoi più giovani collaboratori;⁴¹ si imbarca quindi sulla nave semivuota che lo riporta in Europa, accompagnato dall'augurio di Fermi di potersi incontrare a guerra finita.⁴²

Durante la seconda guerra mondiale lavorò al progetto Uranio, dirigendone, con scarsi risultati, la sezione teorica. È di questo periodo invece una serie di lavori sulla cosiddetta matrice S , che, introdotta da lui per la descrizione dei processi d'urto, risultò di grande importanza per la teoria quantistica dei

³⁹ Otto Hahn (1879–1968) e Fritz Strassmann (1902–1980): *Über den Nachweis und das Verhalten der bei der Bestrahlung des Urans mittels Neutronen entstehenden Erdalkalimetalle [Prova e comportamento dei metalli alcalino-terrosi prodotti dall'irraggiamento dell'uranio per mezzo di neutroni]*, *Die Naturwissenschaften* **27** (1939) 11–15.

La spiegazione del fenomeno di fissione è dovuta a Lise Meitner (1878–1968) e a Otto Robert Frisch (1904–1979): *Disintegration of Uranium by Neutrons: a New Type of Nuclear Reaction [Disintegrazione dell'uranio: un nuovo tipo di reazione nucleare]*, *Nature* **143** (1939) 239–240.

Il modello utilizzato è quello di un nucleo atomico assimilabile a una goccia di liquido che, in seguito all'immissione di energia di un neutrone incidente, si deforma a tal punto da spezzarsi in due; tale modello era stato proposto da N Bohr e John Archibald Wheeler (1911–2008): *The Mechanism of Nuclear Fission [Il meccanismo della fissione nucleare]*, *Physical Review* **56** (1939) 426–450.

⁴⁰ La moglie Laura, di origine ebrea, veniva emarginata dalle leggi razziali, recentemente varate dal governo italiano a imitazione di quanto avveniva in Germania.

⁴¹ Così ricorda nel libro *Fisica e oltre, l.c.*: “Non ho molta scelta. Bisogna essere coerenti con se stessi: ognuno di noi è nato e cresciuto in un certo ambiente, parla una certa lingua e pensa secondo schemi ben definiti: solo all'interno di questo ambiente si sentirà a casa sua e lavorerà al massimo delle sue possibilità. La storia c'insegna che ogni paese, prima o poi, è dilaniato da guerre e rivoluzioni: non è pensabile che tutta quanta la popolazione emigri all'estero ogni volta che c'è questo rischio. Bisogna imparare a prevenire le catastrofi: non basta fuggirle. Anzi, forse tutti dovrebbero sfidare le tempeste che minacciano la patria: in questo modo si sarebbe d'esempio e si incoraggerebbero gli altri a eliminare il marcio prima che si diffonda. Ma forse questo è eccessivo. Infatti il singolo spesso può fare poco o nulla, malgrado le sue migliori intenzioni, per evitare che la massa imbocchi la strada sbagliata. . . “Per me ho già deciso, anni fa, che sarei rimasto in Germania: forse ho sbagliato, ma non cambierò idea adesso.”

⁴² Il 23 agosto 1939 la Germania nazista e l'Unione delle Repubbliche Sovietiche Socialiste, fino a pochi giorni prima violentemente avverse, firmano il famoso patto di non aggressione, che in un annesso protocollo prevede la spartizione della Polonia e l'annessione all'URSS delle repubbliche baltiche della Lituania, della Lettonia e dell'Estonia. La Polonia sarà invasa dalle truppe naziste il successivo primo settembre.

campi e lo studio delle interazioni tra le particelle elementari.⁴³

Prigioniero in Inghilterra insieme con altri scienziati tedeschi alla fine del conflitto mondiale, tornò in Germania nel 1946 a riorganizzare l'Istituto di Fisica di Göttingen, reintonandolo a Max Planck, col supporto dell'omonima fondazione istituita per favorire la ricerca scientifica nel quadro della ricostruzione tedesca postbellica. Presidente del Consiglio Tedesco delle Ricerche (Deutscher Forschungsrat) dal 1949 al 1951 e Presidente della Fondazione Alexander von Humboldt dal 1953,⁴⁴ si dedicò a ricerche di fisica del plasma e dei processi termonucleari in collaborazione con il Centro Europeo di Ricerche Nucleari (CERN) di Ginevra, divenendone anche Presidente del Comitato di Politica Scientifica.

Nel 1958 si trasferì all'Istituto Max Planck di Monaco.

Insignito della Gran Croce di Germania per i Servizi Federali, Cavaliere dell'Ordine al Merito d'Inghilterra (per la Pace), membro dell'Accademia Pontificia delle Scienze e dell'Accademia dei Lincei, Werner Heisenberg morì a Monaco il primo febbraio 1976.

⁴³ W. Heisenberg: *Die "beobachtbaren Größen" in der Theorie der Elementarteilchen [Le "grandezze osservabili" nella teoria delle particelle elementari]*, *Zeitschrift für Physik* **120** (1943) 513–538; **120** (1943) 673–702; **123** (1944) 93–112. Ancora una volta Heisenberg si richiama alle quantità osservabili per costruire una teoria!

⁴⁴ Il naturalista Alexander von Humboldt (1769–1859), grande amico del poeta Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832), del quale condivideva gli ideali di libertà, si era prodigato nell'aiutare i bisognosi mettendo al servizio dell'umanità la sua scienza. La Fondazione fu a lui intitolata, in quanto aveva lo scopo di assistere gli scienziati di tutto il mondo che desiderassero trascorrere un periodo di permanenza in Germania per svolgervi le loro ricerche e contribuire alla rinascita della Fisica tedesca. In questo, Heisenberg svolse un importante ruolo, simile a quello di Edoardo Amaldi (1908–1989) in Italia.

Lo sviluppo della meccanica quantistica † 45

La meccanica quantistica, su cui devo qui riferire, originò, nel suo contenuto formale, dal tentativo di perfezionare il principio di corrispondenza di Bohr in uno schema matematico chiuso mediante la precisazione dei suoi enunciati. I punti di vista fisicamente nuovi, che distinguono la meccanica quantistica dalla fisica classica, furono preparati dagli studi di vari ricercatori impegnati nell'analisi delle difficoltà emerse dalla teoria di Bohr della struttura atomica e dalla teoria della radiazione della luce.⁴⁶

† di W.Heisenberg: *Nobel-Vortrag*, in *Les Prix Nobel en 1933*, Imprimerie Royale P.A.Norstedt & Söner, Stoccolma, 1935. Testo della conferenza pronunciata a Stoccolma l'11 dicembre 1933 in occasione del ricevimento del Premio Nobel per la Fisica per l'anno 1932.

⁴⁵ Viene qui utilizzato per la traduzione il testo originale in tedesco riportato nel libretto che ogni anno la Fondazione Nobel pubblica per registrare la cerimonia del conferimento. Esiste anche una traduzione inglese (*The development of quantum mechanics*), comparsa nel libro a cura della stessa Fondazione: *Nobel Lectures in Physics 1922–1941*, Elsevier Publ. Co., Amsterdam, 1965, p. 290–301. Il titolo italiano qui proposto deriva dall'edizione inglese. Le note non caratterizzate da un numero d'ordine progressivo sono quelle del testo originale.

⁴⁶ Niels Bohr era stato insignito del premio Nobel per la Fisica nel 1922 per le sue ricerche sulla struttura degli atomi e della radiazione da loro emessa, come si legge nella motivazione. Di fatto i suoi lavori del 1913 (*On the constitution of atoms and molecules [Sulla struttura degli atomi e delle molecole]*, *Philosophical Magazine* **26** (1913) 1–25, 476–502, 857–875) costituiscono la base della teoria dei quanti, che nell'arco di dieci anni riesce a dare ragione delle caratteristiche fondamentali degli spettri atomici.

I postulati della teoria vengono illustrati nel lavoro di N.Bohr: *Über die Anwendung der Quantentheorie auf den Atombau. I. Die Grundpostulate der Quantentheorie [Applicazione della teoria dei quanti alla struttura atomica. I. I postulati fondamentali della teoria dei quanti]*, *Zeitschrift für Physik* **13** (1923) 117–165.

Essi riguardano i sistemi atomici chiusi e sono essenzialmente due. Il primo ipotizza l'esistenza di stati stazionari stabili, definiti dalla quantizzazione dell'azione relativa al moto chiuso, e implica il principio adiabatico, in base al quale l'azione resta costante anche se c'è una perturbazione esterna che provoca una transizione tra stati stazionari. Il principio adiabatico era stato messo a fuoco da Paul Ehrenfest (1880–1933): *Over adiabatische veranderingen van een stelsel in verband met de theorie der quanta [Cambiamenti adiabatici di un sistema in connessione con la teoria dei quanti]*, *Verslag der Kongelige Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* **25** (1916) 412–433; *Adiabatische Invarianten und Quantentheorie [Invarianti adiabatici e teoria dei quanti]*, *Annalen der Physik* **51** (1916) 327–352; *On adiabatic changes of a system in connection with the quantum theory [Cambiamenti adiabatici di un sistema in connessione con la teoria dei quanti]*, *Philosophical Magazine* **33** (1917) 500–513. Il secondo postulato definisce la frequenza della radiazione emessa o assorbita durante la transizione mediante la differenza di energia tra gli stati iniziale e finale dell'atomo. Da questo postulato emerge il principio di corrispondenza, proposto da Bohr come principio ispiratore nella costruzione della nuova teoria dei quanti, in modo da riottenere, sotto opportune condizioni, i risultati della fisica classica. È significativo che a questo lavoro, che doveva essere il primo di una serie con lo scopo dichiarato di un'esposizione sistematica dei risultati della teoria dei quanti, non seguì mai più la seconda

Nel 1900, durante lo studio della legge della radiazione di corpo nero che aveva trovato, Planck scoprì nei fenomeni ottici un fenomeno discontinuo totalmente sconosciuto alla fisica classica che, pochi anni dopo, trovò la sua formulazione più pregnante nell'ipotesi di Einstein dei quanti di luce.⁴⁷ L'impossibilità di unificare la teoria di Maxwell con le descrizioni espresse in modo intuitivo nell'ipotesi dei quanti di luce convinse in seguito i ricercatori che una comprensione dei fenomeni di radiazione fosse possibile solo a prezzo di un'ampia rinuncia alla loro descrizione intuitiva. Il fatto, già trovato da Planck e utilizzato da Einstein, Debye e altri, che l'elemento di discontinuità rivelatosi nei fenomeni di radiazione gioca un ruolo importante anche nei processi materiali,⁴⁸ trovò la sua espressione formale nei postulati fondamentali della teoria dei quanti di Bohr, che, insieme con le condizioni di quantizzazione di Bohr–Sommerfeld per la struttura atomica,⁴⁹ portarono a un'interpretazione

parte, superata dagli eventi.

Le difficoltà cui Heisenberg allude sono costituite principalmente dall'effetto Zeeman, dallo spettro dell'atomo di elio e dalla mancanza di una soddisfacente teoria della dispersione della luce.

⁴⁷ Un'accurata analisi dell'effetto fotoelettrico fu completata nel 1902 da Philipp Eduard Anton von Lenard (1862–1947): *Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolette Licht* [Produzione di raggi catodici mediante luce ultravioletta], *Wiener Berichte* **108** (1899) 1649–1666; *Über die Lichtelektrische Wirkung* [L'azione fotoelettrica], *Annalen der Physik* **8** (1902) 149–198.

I risultati di Lenard, per i quali meritò il premio Nobel nel 1905, indicavano che l'energia degli elettroni emessi per effetto fotoelettrico dalla sostanza colpita dalla radiazione è indipendente dall'intensità della radiazione incidente, mentre il numero di elettroni emessi aumenta con tale intensità e l'energia del singolo elettrone aumenta col diminuire della lunghezza d'onda della radiazione.

Questi risultati, incomprensibili secondo le leggi dell'elettromagnetismo classico, furono interpretati da A. Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt* [Un punto di vista euristico riguardante la produzione e la trasformazione di luce], *Annalen der Physik* **17** (1905) 132–148.

L'idea di Einstein, premiata essa pure dal Nobel nel 1921, completava l'ipotesi di Planck sulla discretizzazione dell'energia di una radiazione introducendo esplicitamente il quanto di luce: l'energia del singolo elettrone emesso risulta dalla differenza tra il quanto elementare di luce $h\nu$ che ne ha provocato l'espulsione e l'energia necessaria per estrarre l'elettrone stesso dal materiale.

⁴⁸ Heisenberg si riferisce qui agli studi di Einstein e di Debye sui calori specifici dei solidi, la cui dipendenza dalla temperatura non era prevedibile sulla base della fisica classica; invece l'introduzione di un quanto elementare associato a ogni frequenza di vibrazione del reticolo cristallino permetteva di riprodurre l'andamento dei calori specifici alle basse temperature.

A. Einstein: *Die Planksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme* [La teoria della radiazione di Planck e la teoria del calore specifico], *Annalen der Physik* **22** (1906) 180–190; P. Debye: *Zur Theorie der spezifischen Wärmen* [Teoria dei calori specifici], *Annalen der Physik* **39** (1912) 789–839.

Ma anche i già citati studi di Born e von Kármán sui reticoli cristallini rientrano in questo ambito di idee; si veda, p. es., M. Born e Th. von Kármán: *Zur Theorie der spezifischen Wärme* [Teoria del calore specifico], *Physikalische Zeitschrift* **14** (1913) 15–19.

⁴⁹ A. Sommerfeld: *Zur Quantentheorie der Spektrallinien* [Teoria quantistica delle righe spettrali], *Annalen der Physik* **51** (1916) 1–94, 125–167. Questi lavori generalizzano le condizioni di Bohr per la definizione delle orbite elettroniche possibili negli atomi.

qualitativa delle proprietà chimiche e ottiche degli atomi. L'accettazione di questi postulati fondamentali della teoria dei quanti si trovava in contrasto inconciliabile con l'applicazione della meccanica classica ai sistemi atomici, che per altro, almeno nei suoi enunciati qualitativi, sembrava indispensabile per la comprensione delle proprietà atomiche. Questa circostanza era un nuovo argomento per supporre che una comprensione dei processi naturali, in cui la costante di Planck gioca un ruolo essenziale, potesse essere raggiunta solo mediante un'ampia rinuncia alla loro descrizione intuitiva. La fisica classica sembrava il caso limite intuitivo di una microfisica in linea di principio non intuitiva, che si può realizzare tanto più esattamente, quanto più la costante di Planck tende a zero rispetto alle variabili d'azione del sistema. Da questa interpretazione della meccanica classica come caso limite della meccanica quantistica ebbe origine anche il principio di corrispondenza di Bohr, che, almeno in modo qualitativo, tradusse nella meccanica quantistica una serie di conclusioni della meccanica classica. In connessione con il principio di corrispondenza fu inoltre discussa la possibilità che le leggi della meccanica quantistica potessero essere in linea di principio di natura statistica; in particolare questa possibilità si manifestò chiaramente nella derivazione della legge della radiazione di Planck fatta da Einstein.⁵⁰ Infine l'analisi della relazione tra teoria della radiazione e teoria atomica, ad opera di Bohr, Kramers e Slater,⁵¹ portò alla seguente situazione scientifica.

Secondo i postulati fondamentali della teoria dei quanti un sistema atomico è capace di assumere stati stazionari discreti e quindi valori di energia discreti; in termini energetici per l'atomo, l'emissione e l'assorbimento di luce da parte di un tale sistema si verificano improvvisamente, a guisa di impulsi. D'altra parte le proprietà intuitive della radiazione emessa sono descritte da un campo d'onda, la cui frequenza è legata alla differenza di energia dell'atomo nello stato iniziale e finale mediante la relazione:

$$E_1 - E_2 = h\nu.$$

Ad ogni stato stazionario dell'atomo appartiene un insieme di parametri che forniscono la probabilità di transizione per radiazione da uno stato a un altro. Non esiste una connessione diretta tra la radiazione emessa classicamente

⁵⁰ A. Einstein: *Zur Quantentheorie der Strahlung [Teoria quantistica della radiazione]*, *Physikalische Zeitschrift* **18** (1917) 121–128.

⁵¹ N. Bohr, H. A. Kramers e John Clarke Slater (1900–1976): *The quantum theory of radiation [Teoria quantistica della radiazione]*, *Philosophical Magazine* **47** (1924) 785–822. L'idea principale del lavoro, che costituisce una brillante applicazione del principio di corrispondenza, è quella di associare all'atomo una *nuvola* di oscillatori virtuali, ciascuno dei quali è dotato di una delle frequenze che l'atomo può assorbire o emettere. Si poteva così descrivere la dispersione della luce ricorrendo solo a minime correzioni della teoria classica della dispersione: una tuttavia era essenziale e imponeva che l'energia si conservasse solo in media, come risultato di un processo statistico.

da un elettrone orbitante e quei parametri che definiscono la probabilità di emissione; tuttavia, mediante il principio di corrispondenza di Bohr, a ogni transizione atomica si può assegnare un termine determinato dello sviluppo di Fourier della traiettoria classica, e la probabilità della relativa transizione obbedisce qualitativamente a leggi analoghe a quelle cui obbedisce l'intensità di quelle componenti di Fourier. Sebbene dunque il confronto dell'atomo con un sistema planetario di elettroni negli studi di Rutherford, Bohr, Sommerfeld e altri portasse a un'interpretazione qualitativa delle proprietà ottiche e chimiche dell'atomo, la fondamentale differenza dello spettro atomico dallo spettro classico di un sistema di elettroni impone l'abbandono del concetto di orbita dell'elettrone e la rinuncia a una descrizione intuitiva dell'atomo.

Un importante stimolo alla revisione del concetto di orbita dell'elettrone è fornito anche dagli esperimenti necessari alla sua determinazione sperimentale. Se infatti ci si domanda in qual modo si possa osservare il percorso di un elettrone nella sua orbita nell'atomo, l'idea più ovvia sarà allora quella di osservare la traiettoria mediante un microscopio di potere risolutivo estremo. Dato che comunque si deve illuminare l'oggetto in questo microscopio con luce di lunghezza d'onda estremamente piccola, la prima eccitazione luminosa, che dalla sorgente di luce raggiunge l'elettrone e finisce nel nostro occhio, scaglia l'elettrone completamente fuori dalla sua orbita, in accordo con le leggi dell'effetto Compton.⁵² Perciò della traiettoria sarebbe osservabile di volta in volta un punto solo.

In questa situazione si deduceva che per prima cosa occorre abbandonare del tutto l'idea di orbita elettronica, sebbene fosse legittimata dagli esperimenti di Wilson,⁵³ e successivamente indagare, per così dire, quanto del concetto di orbita elettronica potesse essere trasferito nella meccanica quantistica.

⁵² Arthur Holly Compton (1892–1962): *A quantum theory of scattering of X-rays by light elements [Teoria quantistica della diffusione di raggi X da parte di elementi leggeri]*, Physical Review **21** (1923) 483–502; A. H. Compton e A. W. Simon: *Directed quanta of scattered X-rays [Quanti direzionati di raggi X diffusi]*, Physical Review **26** (1925) 289–299. La variazione di lunghezza d'onda dei raggi X diffusi veniva spiegata da Compton come dovuta al quanto di luce che, urtando un elettrone atomico, si comporta come una particella di energia $h\nu$ e impulso di modulo $h\nu/c$. Tra l'altro la visualizzazione dell'effetto Compton nell'esperimento di Compton e Simon permetteva di mostrare che l'energia e l'impulso si conservano nelle singole interazioni elementari e non in media come nella teoria di Bohr, Kramers e Slater.

⁵³ Lo scozzese Charles Thomson Rees Wilson (1869–1959) aveva inventato nel 1912 una speciale camera a nebbia, in grado di visualizzare la traccia lasciata da particelle cariche nell'attraversare un gas soprassaturo, grazie ai nuclei di condensazione provocati dalla ionizzazione degli atomi del gas: *On an expansion apparatus for making visible the tracks of ionising particles in gases and some results obtained by its use [Un apparato di espansione che rende visibili le tracce di particelle ionizzanti nei gas e alcuni risultati ottenuti col suo uso]*, Proceedings of the Royal Society of London **A87** (1912) 277–292. Questo dispositivo rese possibile dimostrare la validità dell'interpretazione dell'effetto Compton e gli valse la condivisione del premio Nobel del 1927 insieme con Compton.

Nella teoria classica assegnare la frequenza, l'ampiezza e la fase di tutte le onde luminose emesse dall'atomo sarebbe completamente equivalente ad assegnarne l'orbita elettronica. Siccome dall'ampiezza e dalla fase di un'onda emessa si possono dedurre senza ambiguità i coefficienti dei relativi termini nello sviluppo di Fourier dell'orbita elettronica, l'orbita dell'elettrone deriva completamente dalla conoscenza di tutte le ampiezze e fasi. Similmente, anche in meccanica quantistica il complesso di tutte le ampiezze e fasi della radiazione emessa dall'atomo può essere considerato come una descrizione completa del sistema atomico, sebbene non sia possibile una sua interpretazione nel senso di un'orbita d'elettrone che provoca la radiazione. Perciò in meccanica quantistica al posto della coordinata dell'elettrone interviene un insieme di parametri che corrispondono ai coefficienti di Fourier del moto classico lungo la traiettoria. Però questi parametri non sono più assegnati in base all'energia dello stato e al numero della relativa oscillazione armonica, ma piuttosto appartengono di volta in volta a due stati stazionari dell'atomo e costituiscono una misura della probabilità di transizione dell'atomo da uno stato stazionario all'altro. Un tale insieme di coefficienti può essere paragonato a una matrice, come quella che compare nell'algebra lineare. In modo assolutamente analogo, a ogni grandezza della meccanica classica, per esempio l'impulso o l'energia dell'elettrone, si può assegnare una corrispondente matrice nella meccanica quantistica.⁵⁴ Per procedere da qui a una pura rappresentazione dei fatti empirici, era necessario collegare con delle leggi le matrici assegnate alle diverse grandezze, come le corrispondenti grandezze della meccanica classica sono legate tra di loro dalle equazioni di moto.⁵⁵ A questo punto, nel desiderio di una corrispondenza quanto più stretta possibile tra meccanica classica e quantistica, se si cercava di prendere l'addizione e la moltiplicazione delle serie di Fourier come modello per l'addizione e la moltiplicazione dei complessi della teoria quantistica, il prodotto di due grandezze espresse da matrici sembrava doversi rappresentare nel modo più naturale mediante il prodotto matriciale nel senso dell'algebra lineare – un'ipotesi che era stata già suggerita dal formalismo della teoria della dispersione di Kramers e Ladenburg.⁵⁶

⁵⁴ La traduzione in matrici dell'intuizione di Heisenberg qui ricordata, si basa sul riconoscimento che le quantità osservabili non si riferiscono a *uno* stato stazionario dell'atomo che emette o assorbe radiazione, bensì a *due* stati contemporaneamente, i due stati coinvolti nella transizione: se allora tutte le quantità di un certo tipo, associate ai due stati implicati, vengono ordinate per righe e colonne in una tabella, in cui le righe si riferiscono allo stato iniziale e le colonne allo stato finale, si ottiene una matrice che, *nel suo complesso*, rappresenta la quantità osservabile.

⁵⁵ W. Heisenberg: *Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen [Reinterpretazione di relazioni cinematiche e meccaniche secondo la teoria dei quanti]*, *Zeitschrift für Physik* **33** (1925) 879–893. È principalmente per questo lavoro che Heisenberg è a Stoccolma a pronunciare questo discorso.

⁵⁶ Il lavoro di Ladenburg aveva già ispirato in parte quello di Bohr, Kramers e Slater, ma era

Sembrò allora coerente adottare in meccanica quantistica semplicemente le equazioni di moto della fisica classica, considerandole come relazioni tra le matrici che rappresentavano le variabili classiche. Anche le condizioni di quantizzazione di Bohr–Sommerfeld si lasciavano esprimere con una relazione tra le matrici della teoria quantistica e, insieme con le equazioni di moto, erano sufficienti per definire tutte le matrici e quindi le proprietà degli atomi osservabili sperimentalmente.

È merito di Born, Jordan e Dirac l'aver sviluppato in una teoria coerente e utilizzabile praticamente lo schema matematico così delineato.⁵⁷ Questi ricercatori osservarono innanzi tutto che le condizioni di quantizzazione potevano essere descritte come relazioni di commutazione tra le matrici che rappresentano gli impulsi e le coordinate dell'elettrone e ottennero con ciò le equazioni (p_r matrici d'impulso, q_r matrici di coordinata):

$$p_r q_s - q_s p_r = \frac{h}{2\pi i} \delta_{rs}; \quad q_r q_s - q_s q_r = 0; \quad p_r p_s - p_s p_r = 0.$$

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{per } r = s, \\ 0 & \text{per } r \neq s. \end{cases}$$

Per mezzo di queste relazioni di commutazione essi riuscirono a dimostrare anche in meccanica quantistica le leggi che erano alla base della meccanica classica: la costanza nel tempo dell'energia, dell'impulso e del momento angolare.

Lo schema matematico così risultante ha alla fine anche un'analogia formale molto ampia con la teoria classica, differenziandosi da questa esteriormente per le relazioni di commutazione, per mezzo delle quali del resto si

poco conosciuto da Heisenberg, che lo riscoprì solo dopo la pubblicazione di un lavoro di Kramers. (cfr. la discussione di questi aspetti in Jagdish Mehra e Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Mechanics*, vol. 2, *The Discovery of Quantum Mechanics. 1925*, Springer Verlag, New York, 1982, pp. 170–189.

Rudolf Walther Ladenburg (1882–1952): *Die quantentheoretische Deutung der Zahl der Dispersionselektronen [Interpretazione del numero di elettroni di dispersione secondo la teoria dei quanti]*, *Zeitschrift für Physik* **4** (1921) 451–468.

H. A. Kramers: *The law of dispersion and Bohr's theory of spectra [La legge di dispersione e la teoria di Bohr sugli spettri]*, *Nature* **113** (1924) 673–674.

⁵⁷ M. Born e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik [Meccanica quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **34** (1925) 858–888, ricevuto dalla rivista il 27 settembre 1925; P. A. M. Dirac: *The fundamental equations of quantum mechanics [Le equazioni fondamentali della meccanica quantistica]*, *Proceedings of the Royal Society of London* **A109** (1925) 642–653, ricevuto dalla rivista il 7 novembre 1925; M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik. II [Meccanica quantistica. II]*, *Zeitschrift für Physik* **35** (1926) 557–615, ricevuto dalla rivista il 16 novembre 1925.

Mentre Dirac lavorava indipendentemente sul primo lavoro di Heisenberg, Born e Jordan ne perfezionavano il contenuto durante le vacanze di Heisenberg, per poi arrivare alla stesura del lavoro di collaborazione a tre.

possono derivare le equazioni di moto dalla funzione di Hamilton.⁵⁸

Tuttavia nelle conseguenze fisiche si manifestano profondissime differenze tra la meccanica quantistica e la meccanica classica, che impongono una dettagliata discussione del contenuto intuitivo della meccanica quantistica. Nella sua forma descritta fino a qui, la meccanica quantistica permette la trattazione della radiazione emessa dall'atomo, dei valori d'energia degli stati stazionari e di altre grandezze caratteristiche degli stati stazionari. La teoria perciò si adegua ai dati fenomenologici contenuti negli spettri atomici. Tuttavia in tutti i casi in cui si tratta di descrivere intuitivamente un evento che si svolge nel tempo, per esempio nell'interpretazione delle fotografie di Wilson, il formalismo della teoria non sembra rendere possibile alcuna rappresentazione adeguata del comportamento dei fatti sperimentali. A questo punto venne in aiuto alla meccanica quantistica la meccanica ondulatoria sviluppata nel frattempo da Schrödinger sulla base della tesi di de Broglie.⁵⁹

Nel corso degli studi che lo stesso Schrödinger riferirà qui,⁶⁰ egli ha ricondotto la determinazione dei valori di energia di un atomo a un problema agli autovalori, che è definito mediante un problema di condizioni al contorno nello spazio delle coordinate del particolare sistema atomico. Dopo che Schrödinger ebbe dimostrato l'equivalenza matematica tra la meccanica ondulatoria da lui trovata e la meccanica quantistica,⁶¹ l'associazione fruttuosa di questi due

⁵⁸ Dirac riconobbe che le equazioni scritte sopra sono regole di commutazione elementari tra le quantità p_r e q_r , con le stesse proprietà formali delle parentesi di Poisson della meccanica analitica classica: il commutatore $[q_r, p_s] \equiv q_r p_s - p_s q_r$ poteva essere assimilato alla parentesi di Poisson delle variabili classiche corrispondenti, moltiplicate per $i\hbar$. Perciò, per esempio, Dirac poté identificare, per qualsiasi funzione f delle p_r e q_r , la derivata $\partial f / \partial q_r$ con il commutatore $[f, p_r]$ e la derivata $\partial f / \partial p_r$ con il commutatore $[f, q_r]$ ed esprimere infine le equazioni di moto quantistiche nella forma hamiltoniana:

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \quad \dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}.$$

⁵⁹ Louis Victor de Broglie (1892–1987): *Recherches sur la théorie des quanta* [Ricerche sulla teoria dei quanti], *Annales de Physique* **3** (1925) 22–128. Per una presentazione dello sviluppo delle idee portate da de Broglie, si veda il Quaderno: *Le onde di de Broglie*, in questa collana.

⁶⁰ Il discorso pronunciato da Schrödinger il giorno successivo è presentato e discusso nel Quaderno: *Onde di materia e onde di probabilità*, in questa collana. Gli studi cui si riferisce Heisenberg sono i quattro lavori che Schrödinger scrisse tra il gennaio e il giugno 1926: *Quantisierung als Eigenwertproblem* [Quantizzazione come problema agli autovalori], *Annalen der Physik* **79** (1926) 361–376, 489–527; **80** (1926) 437–490; **81** (1926) 109–139.

⁶¹ E. Schrödinger: *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen* [Relazione tra la meccanica quantistica di Heisenberg-Born-Jordan e la mia], *Annalen der Physik* **79** (1926) 734–756. Ma anche Pauli, non appena venuto a conoscenza dell'approccio di Schrödinger, ne dimostra l'equivalenza con la meccanica delle matrici in una lettera a Jordan del 12 aprile 1926. La

diversi ambiti di idee fisiche portò a un'estensione e a un arricchimento straordinari del formalismo della teoria quantistica. Da un lato solo con la meccanica ondulatoria fu resa possibile la trattazione matematica di sistemi atomici complicati, d'altro canto l'analisi delle connessioni tra le due teorie portò alla cosiddetta teoria delle trasformazioni sviluppata da Dirac e Jordan.⁶² Siccome è impossibile entrare nei dettagli della struttura matematica di questa teoria nell'ambito di questa conferenza, mi vorrei limitare perciò a metterne in evidenza il significato fisico di principio. La teoria delle trasformazioni, mediante l'accettazione dei principi fisici della meccanica quantistica nel suo formalismo ampliato, rese possibile, in modo del tutto generale, il calcolo per i sistemi atomici della probabilità del verificarsi di un fenomeno particolare, sperimentalmente accertabile, sotto condizioni fissate sperimentalmente. L'ipotesi, già assunta negli studi sulla teoria della radiazione e enunciata in modo preciso nella teoria dell'urto di Born,⁶³ che la funzione d'onda specifica la probabilità di presenza di un corpuscolo, risultò un caso speciale di uno schema di leggi generale e la naturale conseguenza delle ipotesi fondamentali della meccanica quantistica. Mediante questa interpretazione statistica della

lettera è riprodotta nel contributo di Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996): *From Matrix Mechanics and Wave Mechanics to Unified Quantum Mechanics [Dalla meccanica delle matrici e dalla meccanica ondulatoria a una meccanica quantistica unificata]* nel libro *The Physicist's Conception of Nature*, edito da Jagdish Mehra, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1973, pagg. 276–293.

⁶² P. Jordan: *Über kanonische Transformationen in der Quantenmechanik [Trasformazioni canoniche in meccanica quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **37** (1926) 383–386; *Über kanonische Transformationen in der Quantenmechanik. II [Trasformazioni canoniche in meccanica quantistica. II]*, *Zeitschrift für Physik* **38** (1926) 513–517.

In questi lavori Jordan studia l'analogia con le trasformazioni canoniche classiche per le trasformazioni che in meccanica quantistica lasciano inalterate le regole di commutazione. Simili risultati sono stati ottenuti contemporaneamente, anche se indipendentemente, da Fritz Wolfgang London (1900–1954): *Über die Jacobischen Transformationen der Quantenmechanik [Le trasformazioni di Jacobi della meccanica quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **37** (1926) 915–925.

Qui Heisenberg per ovvie ragioni semplifica il quadro storico, limitandosi a citare la meccanica ondulatoria e la meccanica delle matrici. In realtà però nel 1926 si presentavano quattro forme diverse della nuova meccanica: oltre alle due considerate e alla formulazione di Dirac, occorre menzionare il già citato lavoro che M. Born eseguì nel semestre invernale 1925–1926 al MIT insieme con N. Wiener e che rappresenta il primo tentativo di assiomatizzazione della meccanica quantistica.

La formulazione quantistica di Dirac, detta allora teoria dei q -numeri (in contrapposizione alla teoria classica che implica c -numeri), è sviluppata in P. A. M. Dirac: *The physical interpretation of the quantum mechanics [L'interpretazione fisica della meccanica quantistica]*, *Proceedings of the Royal Society of London A* **113** (1927) 621–641.

Una trattazione generale alla luce della teoria delle trasformazioni, in grado di unificare i quattro approcci citati, si trova in P. Jordan: *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik [Una nuova fondazione della meccanica quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **40** (1927) 809–838; *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik. II [Una nuova fondazione della meccanica quantistica. II]*, *Zeitschrift für Physik* **44** (1927) 1–25.

⁶³ M. Born: *Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, *Zeitschrift für Physik* **37** (1926) 863–867; *Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, *Zeitschrift für Physik* **38** (1926) 803–827.

meccanica ondulatoria e la maggiore accentuazione del fatto che nella teoria di Schrödinger si tratta di onde nello spazio multidimensionale delle configurazioni, certamente il legame del complesso di idee di Schrödinger con la tesi originale di de Broglie sarebbe apparso meno stretto, se Schrödinger⁶⁴ e, in studi successivi, Jordan, Klein e Wigner,⁶⁵ non fossero riusciti a sviluppare, per quanto consentito dai principi della teoria quantistica, il pensiero originale di de Broglie, già formulato prima dello sviluppo della meccanica quantistica. È forse lecito, prima di discutere il contenuto intuitivo della meccanica quantistica, trattare brevemente il problema dell'esistenza di onde materiali nello spazio tridimensionale, dato che la soluzione di questo problema è stata raggiunta solo mediante l'unificazione della meccanica ondulatoria con quella quantistica.

Già molto tempo prima dello sviluppo della meccanica quantistica, dalle regolarità del sistema periodico degli elementi Pauli aveva dedotto il famoso principio che un particolare stato quantistico non può essere occupato che da un singolo elettrone.⁶⁶ Tradurre questo principio in meccanica quantisti-

⁶⁴ Schrödinger nella quarta comunicazione sulla quantizzazione come problema agli autovalori scrive un'equazione d'onda per l'elettrone in un campo elettromagnetico, che rispetta i requisiti di invarianza imposti dalla teoria della relatività e che poi diverrà nota come equazione di Klein-Gordon. L'equazione, che oggi è indicata coi nomi di Oskar Benjamin Klein (1894–1977) e di Walter Gordon (1893–c.1940) e che realizzava in un certo senso il sogno di de Broglie di un'equazione relativistica per le onde di materia, fu proposta contemporaneamente e indipendentemente da molti autori. Per una storia dell'equazione di Klein-Gordon si rimanda all'articolo di Helge Kragh: *Equation with many fathers. The Klein-Gordon equation in 1926 [Un'equazione con molti padri. L'equazione di Klein-Gordon nel 1926]*, *American Journal of Physics* **52** (1984) 1024–133.

⁶⁵ Le prime idee di una quantizzazione del campo elettromagnetico derivano dal desiderio di trattare sullo stesso piede le onde associate alle particelle materiali e le onde elettromagnetiche associate ai quanti di luce; tali idee nascono in contesti diversi, come p. es. nella descrizione di un gas di particelle soggette al principio di esclusione di Pauli: P. Jordan e O. Klein: *Zum Mehrkörperproblem der Quantentheorie [Il problema a molti corpi della teoria quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **45** (1927) 751–765; P. Jordan e E. Wigner: *Über das Paulische Äquivalenzverbot [Sul principio di esclusione di Pauli]*, *Zeitschrift für Physik* **47** (1928) 631–651.

L'avvio di una vera e propria elettrodinamica quantistica si verifica con P. A. M. Dirac: *The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation [Teoria quantistica dell'emissione e dell'assorbimento di radiazione]*, *Proceedings of the Royal Society of London* **A114** (1927) 243–265; *The Quantum Theory of Dispersion [Teoria quantistica della dispersione]*, *ibid.* 710–728; P. Jordan e W. Pauli: *Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder [Elettrodinamica quantistica di campi in assenza di cariche]*, *Zeitschrift für Physik* **47** (1928) 151–173.

Anche Heisenberg è intervenuto sviluppando una formulazione lagrangiana: W. Heisenberg e W. Pauli: *Zur Quantendynamik der Wellenfelder [Dinamica quantistica dei campi di onde]*, *Zeitschrift für Physik* **56** (1929) 1–61; *Zur Quantendynamik der Wellenfelder. II [Dinamica quantistica dei campi di onde. II]*, *Zeitschrift für Physik* **59** (1929) 168–190.

⁶⁶ W. Pauli: *Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren [Connessione tra il completamento di gruppi di elettroni nell'atomo e la struttura complessa degli spettri]*, *Zeitschrift für Physik* **31** (1925) 765–783. Quando propose il suo principio per la classificazione degli stati elettronici, Pauli non conosceva ancora l'esistenza dello spin, ipotizzata solo alcuni mesi più tardi da George

ca si dimostrò possibile sulla base di un risultato a prima vista sorprendente: l'insieme degli stati stazionari di cui è capace un sistema atomico si separa in determinate classi, tali che un atomo, sotto l'influsso di una qualunque perturbazione, non può mai transire da uno stato appartenente a una classe verso uno stato di un'altra classe.⁶⁷ Infatti tale classe di stati, come alla fine è stato chiarito dagli studi di Wigner e Hund,⁶⁸ è caratterizzata da una determinata proprietà di simmetria dell'autofunzione di Schrödinger rispetto allo scambio delle coordinate di due elettroni. A causa dell'identità di principio degli elettroni, la perturbazione esterna sull'atomo rimane inalterata per lo scambio di due elettroni e per questo motivo non provoca alcuna transizione tra stati di classi diverse. Il principio di Pauli e la statistica di Fermi-Dirac da esso derivata sono equivalenti all'ipotesi che in natura si verifichi solo la classe di stati stazionari per i quali l'autofunzione cambia di segno per lo scambio di due elettroni.⁶⁹ La scelta di un sistema simmetrico di termini porterebbe

Eugene Uhlenbeck (1900–1988) e Samuel Abraham Goudsmit (1902–1978): *Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhältnis jedes einzelnen Elektrons [Sostituzione dell'ipotesi dello sforzo non meccanico con un'esigenza relativa alla situazione interna di ogni singolo elettrone]*, *Die Naturwissenschaften* **13** (1925) 953–954; *Spinning electrons and the structure of spectra [Elettroni rotanti e la struttura degli spettri]*, *Nature* **117** (1926) 264–265.

⁶⁷ Anche se il primo a occuparsi del legame tra statistica e simmetria fu proprio lui, modestamente Heisenberg non si cita: *Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik [Problema a molti corpi e risonanza in meccanica quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **38** (1926) 411–426.

⁶⁸ Si tratta delle prime applicazioni della teoria dei gruppi alla fisica atomica.

E. Wigner: *Über nicht kombinierende Terme in der neueren Quantentheorie [Termini che non si combinano nella nuova teoria quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **40** (1927) 492–500; *Über nicht kombinierende Terme in der neueren Quantentheorie. II [Termini che non si combinano nella nuova teoria quantistica. II]*, *Zeitschrift für Physik* **40** (1927) 883–892; *Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen [Alcune conseguenze della teoria di Schrödinger sulla struttura dei termini spettrali]*, *Zeitschrift für Physik* **43** (1927) 624–652; *Berichtigung zu der Arbeit: Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen [Correzione al lavoro: Alcune conseguenze della teoria di Schrödinger sulla struttura dei termini spettrali]*, *Zeitschrift für Physik* **45** (1927) 601–602.

Friedrich Hund (1896–1997): *Symmetriecharaktere von Termen bei Systemen mit gleichen Partikeln in der Quantenmechanik [Carattere di simmetria di termini di un sistema di particelle identiche in meccanica quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **43** (1927) 788–804.

Hund è noto per l'omonima regola, secondo cui lo spin totale di un atomo nel suo stato fondamentale ha il valore massimo compatibile con il principio di esclusione di Pauli. Tale regola, utilissima nella classificazione dei numeri quantici atomici, scaturisce dal lavoro di F. Hund: *Zur Deutung verwickelter Spektren, insbesondere der Elemente Scandium bis Nickel [Spiegazione di spettri complessi, con particolare riferimento a quelli dallo scandio al nichel]*, *Zeitschrift für Physik* **33** (1925) 347–371.

Hund è anche autore di una *Storia della teoria dei quanti* (Boringhieri, Torino, 1980), pubblicata nel 1975 (*Geschichte der Quantentheorie*, Bibliographisches Institut, Zurigo).

⁶⁹ E. Fermi: *Sulla quantizzazione del gas perfetto monoatomico*, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei* **3** (1926) 145–149; *Zur Quantelung des idealen einatomiges Gases*, *Zeitschrift für Physik* **36** (1926) 902–912. P. A. M. Dirac: *On the theory of quantum mechanics [Sulla teoria della meccanica quantistica]*, *Proceedings of the Royal Society of*

secondo Dirac non al principio di Pauli, bensì alla cosiddetta statistica di Bose–Einstein per gli elettroni.⁷⁰

Tra le classi di stati stazionari che appartengono al principio di Pauli o alla statistica di Bose–Einstein e la rappresentazione di de Broglie delle onde di materia esiste una connessione particolare. Un fenomeno ondulatorio spaziale può essere trattato secondo i principi della teoria quantistica, se lo si analizza secondo il teorema di Fourier e poi si sottopone la singola componente di Fourier del moto ondulatorio alle leggi usuali della meccanica quantistica, come se fosse un sistema con un solo grado di libertà. Applicando alle onde di materia di de Broglie questo procedimento di trattazione quantistica dei fenomeni ondulatori, che si è dimostrato fruttuoso anche negli studi di Dirac sulla teoria della radiazione,⁷¹ si ottengono esattamente gli stessi risultati di quando si sceglie il sistema di termini simmetrico nel trattare un insieme di particelle materiali secondo la meccanica quantistica. L'equivalenza matematica di entrambi i metodi sussiste, secondo Jordan e Klein,⁷² anche quando viene presa in considerazione l'interazione tra gli elettroni e cioè quando nella teoria ondulatoria di de Broglie si include nel calcolo l'energia di campo derivante dalla carica spaziale continua. Anche le considerazioni di Schrödinger sul tensore energia–impulso assegnato alle onde di materia possono essere adottate in questa teoria come componenti coerenti del formalismo.⁷³ Secondo gli studi

London **A112** (1926) 661–677.

⁷⁰ Il lavoro citato di Dirac, presentato il 26 agosto 1926, successivo ma indipendente da quello di Fermi, presentato ai Lincei il 7 febbraio, è però più generale, perché studia la connessione tra statistica e simmetria della funzione d'onda: funzioni dispari per lo scambio di due particelle risultano associate alla cosiddetta statistica di Fermi–Dirac, mentre funzioni pari riproducono le proprietà statistiche previste da Bose e Einstein per i fotoni.

Satyendra Nath Bose (1894–1974): *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese [Legge di Planck e ipotesi dei quanti di luce]*, *Zeitschrift für Physik* **26** (1924) 178–181; A. Einstein: *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases [Teoria quantistica del gas perfetto monoatomico]*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* **22** (1924) 261–267; **23** (1925) 3–14, 18–25.

⁷¹ P. A. M. Dirac: *The quantum theory of the emission and absorption of radiation [Teoria quantistica dell'emissione e assorbimento di radiazione]*, *Proceedings of the Royal Society of London* **A114** (1927) 243–265.

I risultati degli studi avviati in questo articolo sono stati trasferiti dallo stesso Dirac in un esemplare manuale di meccanica quantistica (*The principles of quantum mechanics*, Oxford, The Clarendon Press, 1930), successivamente ripubblicato in nuove edizioni, la quarta delle quali è tradotta in italiano (*I principi della meccanica quantistica*, Paolo Boringhieri, Torino, 1959). Va però sottolineato che, di questo testo, è proprio la parte finale dedicata alla teoria della radiazione quella oggi superata.

⁷² P. Jordan e O. Klein, *l.c.*

⁷³ E. Schrödinger: *An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules [Teoria ondulatoria della meccanica degli atomi e delle molecole]*, *Physical Review* **28** (1926) 1049–1070.

Dopo i quattro famosi lavori scritti sugli *Annalen der Physik*, Schrödinger espone per il pubblico americano la sua teoria, presentandola come ispirata dalle idee di de Broglie sulla natura ondulatoria delle particelle; anzi, come dice in apertura, i punti materiali sono fatti di sistemi di onde. Ma l'equazione di moto viene dedotta con un principio variazionale alla

di Jordan e Wigner una modifica delle regole di commutazione, che stanno alla base di questa teoria quantistica delle onde, porta a un formalismo equivalente a quello della meccanica quantistica, basata sull'ipotesi del principio di esclusione di Pauli.⁷⁴

Da questi studi viene messo in chiaro che il paragone di un atomo con un sistema planetario con un nucleo e degli elettroni non è l'unico modello intuitivo per una nostra rappresentazione dell'atomo. Piuttosto è evidente che l'atomo sia da paragonare a una nuvola carica e che si debba utilizzare il rapporto di corrispondenza con il formalismo quantistico per ottenere conclusioni sul comportamento dell'atomo. Tuttavia, perseguire queste conseguenze è compito della meccanica ondulatoria.

Torniamo ora al formalismo della meccanica quantistica; la sua applicazione a problemi fisici è giustificata in parte dalle ipotesi fondamentali originali della teoria, in parte dalla loro generalizzazione nella teoria delle trasformazioni avvenuta sulla base della meccanica ondulatoria, e si tratta ora di mettere in rilievo il contenuto intuitivo della teoria mediante il confronto con la fisica classica.⁷⁵

In fisica classica lo scopo della ricerca era la determinazione di fenomeni oggettivi, che si verificano nello spazio e nel tempo, e la conoscenza di leggi che ne specificano l'evoluzione a partire da condizioni iniziali. In fisica classica un problema veniva ritenuto risolto se si era riusciti a dimostrare un certo processo come un avvenimento oggettivo nello spazio e nel tempo e a far vedere che esso obbediva alle leggi generali della fisica classica formulate in termini di equazioni differenziali. Il modo in cui la conoscenza di tale processo era stata ottenuta, cioè quali osservazioni avessero portato a definirlo sperimentalmente, era completamente inessenziale, così come era indifferente per le conseguenze della teoria classica attraverso quali osservazioni si dovessero verificare le predizioni della teoria. In teoria quantistica invece troviamo una situazione completamente diversa. Già il fatto che il formalismo della meccanica quantistica non si possa interpretare come una descrizione intuitiva di un processo che avviene nello spazio e nel tempo, indica che la meccanica quantistica non tratta affatto la determinazione oggettiva dei fenomeni nello spazio-tempo. Al contrario si deve utilizzare il formalismo della meccanica quantistica per dedurre dalla specificazione del comportamento sperimentale di un sistema atomico la probabilità del risultato di un altro esperimento, con la condizione che il sistema non sia sottoposto ad alcuna altra perturbazione oltre a quella richiesta per eseguire i due esperimenti. Il fatto che, anche dopo aver specificato il sistema nel modo sperimentalmente più completo, l'unico certo

Hamilton.

⁷⁴ P. Jordan e E. Wigner, *l.c.*

⁷⁵ È proprio dall'analisi di questo contenuto *intuitivo* che scaturisce il riconoscimento della validità di un principio di indeterminazione, di cui ora Heisenberg spiega il significato.

risultato noto sia la probabilità di un risultato particolare di un secondo esperimento, indica che ogni osservazione comporta una variazione discontinua nel formalismo che descrive il processo atomico e quindi anche una variazione discontinua del fenomeno fisico stesso. Mentre nella teoria classica il tipo di osservazione è inessenziale per l'evento, nella teoria quantistica dunque la perturbazione collegata con l'osservazione dell'evento atomico gioca un ruolo decisivo. Siccome poi il risultato di un'osservazione in generale porta solo a enunciati sulla probabilità di determinati risultati di osservazioni successive, allora, come ha mostrato Bohr,⁷⁶ la parte, incontrollabile in linea di principio, di quella perturbazione deve essere decisiva per l'applicazione della meccanica quantistica senza contraddizioni. Questa differenza tra fisica classica e fisica atomica è naturalmente comprensibile, in quanto per corpi pesanti, come i pianeti, che si muovono intorno al sole, la pressione della luce solare che si riflette alla loro superficie e che è necessaria per la loro osservazione, non gioca alcun ruolo; per i più piccoli mattoni della materia invece, a causa della loro piccola massa, ogni osservazione costituisce un intervento decisivo nel loro comportamento fisico.

La perturbazione indotta sul sistema in esame dalla sua osservazione gioca inoltre un ruolo importante nella determinazione dei confini entro i quali è possibile una descrizione intuitiva dei processi atomici. Se ci fossero esperimenti che rendessero possibile una misura precisa di tutti gli elementi di specificazione necessari per calcolare il moto classico di un sistema atomico, e che per esempio a un certo istante portassero a valori precisi di posizione e velocità di uno degli elettroni del sistema, allora il risultato di questi esperimenti non potrebbe essere affatto utilizzato nel formalismo, ma anzi sarebbe direttamente in contrasto col formalismo stesso. È di nuovo evidente, dunque, quella parte, incontrollabile in linea di principio, della perturbazione del sistema coinvolta dalla misura stessa, che impedisce una precisa determinazione degli elementi classici di specificazione e quindi rende possibile l'applicazione della meccanica quantistica. Uno studio ulteriore del formalismo insegna che, tra la precisione con cui si può determinare la posizione di una particella e la precisione con cui può essere simultaneamente noto il suo impulso, vale una relazione per cui il prodotto dell'errore probabile delle misure di posizione e di impulso è almeno grande quanto la costante di Planck, divisa per 4π . Del tutto in generale allora deve valere:

$$\Delta p \Delta q \geq \frac{h}{4\pi},$$

dove p e q sono variabili canonicamente coniugate. Queste relazioni di indeterminazione per i risultati della misurazione di variabili classiche costituiscono

⁷⁶ N. Bohr: *Wirkungsquantum und Naturbeschreibung* [Quanto d'azione e descrizione della natura], *Die Naturwissenschaften* **17** (1929) 483–486; *Die Atomtheorie und die Prinzipien der Naturbeschreibung* [La teoria atomica e i principi della descrizione della natura], *Die Naturwissenschaften* **18** (1930) 73–78.

la condizione necessaria affinché il risultato di una misurazione sia esprimibile nel formalismo della meccanica quantistica. Bohr ha mostrato con una serie di esempi come la perturbazione necessariamente associata a ogni osservazione provveda in concreto a che i limiti fissati dalle relazioni di indeterminazione non vengano superati. Che una parte della perturbazione rimanga in linea di principio sconosciuta, secondo Bohr risiede in ultima analisi nell'indeterminazione che viene introdotta dal processo di misurazione stesso. La determinazione sperimentale di un qualunque evento spazio-temporale presuppone infatti sempre un luogo fisso (– cioè un sistema di coordinate, in cui l'osservatore è in quiete –), cui si riferiscono tutte le misurazioni. Con l'ipotesi che questo luogo sia “fisso” si rinuncia poi alla conoscenza del suo impulso, in quanto “fisso” significa appunto che un qualunque trasferimento di impulso non gli dovrebbe produrre alcuna azione apprezzabile. L'indeterminazione, necessaria in linea di principio, a questo punto è trasmessa allora all'evento atomico attraverso l'apparato di misura.

Siccome in questa situazione si è tentati di pensare che si potrebbe eliminare ogni indeterminazione considerando l'oggetto, l'apparato di misura e l'osservatore insieme in un sistema quanto-meccanico, è importante allora sottolineare che l'atto della misurazione è necessariamente intuitivo, dato che in ultima analisi in fisica si tratta sempre di descrizioni di eventi spazio-temporali conformi a leggi. Il comportamento dell'osservatore, come pure il suo apparato di misura, deve essere quindi discusso secondo le leggi della fisica classica, perché altrimenti non ci sarebbe più alcun problema fisico. Perciò anche all'interno dell'apparato di misura, come è stato sottolineato da Bohr, ogni evento va considerato determinato nel senso della teoria classica, condizione anche questa necessaria per poter dedurre in modo univoco da un risultato della misurazione che cosa sia avvenuto. Lo schema della fisica classica, che oggettivizza i risultati dell'osservazione nell'ipotizzare processi che si svolgono nello spazio e nel tempo in modo conforme a delle leggi, viene trasferito anche nella teoria quantistica fino a incontrare limiti di principio, imposti dal carattere non intuitivo degli eventi atomici e simboleggiati dalla costante di Planck. Per gli eventi atomici è possibile una descrizione intuitiva solo all'interno di certi limiti di precisione – ma all'interno di questi limiti valgono sempre ancora le leggi della fisica classica. A causa dei limiti di precisione definiti dalle relazioni di indeterminazione, inoltre, non è specificato univocamente il modello intuitivo col quale si presenta l'atomo. Piuttosto, come base per l'interpretazione intuitiva si può ugualmente bene utilizzare sia il modello corpuscolare, sia quello ondulatorio. ⁷⁷

⁷⁷ Il problema dell'interazione tra osservatore e sistema fisico è tutt'altro che risolto da queste parole di Heisenberg. Esistono vari tentativi di descrivere il complesso costituito dallo strumento di misura e dal sistema in esame in termini quantistici, nell'ambito di una teoria della misurazione. Si vedano, p. es., i seguenti scritti.

Bernard d'Espagnat: *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin,

Le leggi della meccanica quantistica sono in linea di principio di tipo statistico. Se si sono determinati gli elementi di specificazione di un sistema atomico mediante un esperimento, allora in generale il risultato di una futura osservazione del sistema non si lascia predire esattamente. Ma a ogni istante successivo ci sono certe osservazioni i cui risultati possono essere predetti con precisione, mentre per le altre osservazioni si può solo assegnare la probabilità di un certo risultato. Il grado di determinazione, che pure è attribuito alle leggi della meccanica quantistica, è responsabile, per esempio, del fatto che i principi di conservazione per l'energia e l'impulso siano giusti in tutto rigore. Essi si possono dimostrare con arbitraria precisione e sono allora validi con la precisione con cui sono stati provati. Il carattere statistico delle leggi della meccanica quantistica si manifesta però nel fatto che uno studio accurato del comportamento energetico impedisce di seguire simultaneamente la corrispondente evoluzione nello spazio e nel tempo.

Per l'analisi più chiara dei fondamenti concettuali della meccanica quantistica dobbiamo essere grati alle ricerche di Bohr, che ha applicato in particolare il concetto di complementarità all'interpretazione delle regolarità quantomeccaniche.⁷⁸ Già le relazioni di indeterminazione danno un esempio di come nella meccanica quantistica la precisa conoscenza di una variabile possa impedire la precisa conoscenza di un'altra variabile. Questo comportamento complementare tra i diversi aspetti di un particolare processo fisico è ora in realtà caratteristico per l'intera tipologia delle leggi della meccanica quantistica. Ho già menzionato il fatto che, per esempio, seguire il comportamento energetico sta in un rapporto di esclusione col seguire i processi spazio-temporali. Similmente, lo studio delle proprietà chimiche di una molecola è complementare allo studio del moto di un singolo elettrone della molecola, oppure l'osservazione di un fenomeno di interferenza è complementare al seguire un singolo quanto di luce. Infine si può delimitare reciprocamente il campo di validità della meccanica classica e della meccanica quantistica secondo questo punto di vista: la fisica classica rappresenta quell'aspirazione di conoscenza della natura in cui fondamentalmente cerchiamo di trarre conclusioni sui pro-

Reading (prima ed. 1971), seconda ed. ampliata 1976, parte quarta.

Rendiconti del IL Corso della Scuola Internazionale di Fisica "E.Fermi" di Varenna, in particolare l'articolo di Giovanni Maria Prosperi: *Macroscopic Physics and the Problem of Measurement in Quantum Mechanics [Macrofisica e il problema della misurazione in meccanica quantistica]*, in *Fondamenti di meccanica quantistica*, ed. B. d'Espagnat, Academic Press-Periodici Scientifici, New York e Milano, 1971, p. 97-126.

Gian Carlo Ghirardi, Alberto Rimini e Tullio Weber: *The Puzzling Entanglement of Schrödinger's Wave Function [L'intreccio enigmatico della funzione d'onda di Schrödinger]*, *Foundations of Physics* **18** (1988) 1-27.

⁷⁸ N. Bohr: *The quantum postulate and the recent development of atomic theory [Il postulato quantistico e lo sviluppo recente della teoria atomica]*, in *Atti del Congresso Internazionale dei Fisici*, Zanichelli, Bologna, 1928, p. 565-588; *Das Quantumpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik [Il postulato quantistico e lo sviluppo recente della fisica atomica]*, *Die Naturwissenschaften* **16** (1928) 245-257.

cessi oggettivi a partire dalle nostre osservazioni e quindi rinunciamo a prendere in considerazione l'influenza che ogni osservazione esercita sull'evento osservato; la fisica classica perciò ha il suo limite nel punto in cui non si può più prescindere dall'influenza dell'osservazione sull'evento. La meccanica quantistica, viceversa, acquista la possibilità di trattare i processi atomici trascurando parzialmente la loro descrizione spazio-temporale e la loro oggettivizzazione.

Per non rimanere a una discussione troppo astratta della forma di legittimità della meccanica quantistica, vorrei spiegare brevemente con un noto esempio come, attraverso la teoria atomica, si possa raggiungere una comprensione dei processi intuitivi con cui si ha a che fare nella vita quotidiana. L'interesse del ricercatore si è già spesso rivolto al fenomeno in cui a partire da un liquido, per esempio una soluzione soprassatura, emergono improvvisamente cristalli di forma regolare. Secondo la teoria atomica la forza formante in questo processo è in certa misura la simmetria caratteristica della soluzione dell'equazione d'onda di Schrödinger, e per questo si spiega la formazione dei cristalli mediante la teoria atomica. Tuttavia in questo processo rimane ancora un elemento statistico, non ulteriormente riducibile e, si potrebbe anche dire, storico, in quanto, anche con una conoscenza completa dello stato del liquido prima della formazione del cristallo, la forma del cristallo non viene fissata dalle leggi della meccanica quantistica. Lo sviluppo di forme regolari è solo straordinariamente molto più probabile di un pezzo informe. Ma la forma finale deve la sua origine in parte a un elemento del caso, in linea di principio non ulteriormente analizzabile.

Prima di chiudere questa relazione sulla meccanica quantistica, mi è forse permesso addentrarmi brevemente nella questione delle speranze che si possono collegare allo sviluppo ulteriore di questa branca della ricerca. Con ciò non c'è alcun bisogno di menzionare il fatto che lo sviluppo debba continuare parimente sulla base delle ricerche di de Broglie, Schrödinger, Born, Jordan e Dirac. Qui l'attenzione del ricercatore si rivolge in prima linea al problema di come si possano conciliare i requisiti della teoria della relatività speciale con quelli della teoria quantistica. I progressi straordinari compiuti da Dirac in questo campo, di cui lo stesso Dirac parlerà qui,⁷⁹ lasciano aperta per il momento la domanda se sia possibile soddisfare le esigenze poste da entrambe le teorie in modo privo di contraddizioni, senza simultaneamente determinare

⁷⁹ Dirac parlerà il giorno dopo, successivamente a Schrödinger, sul tema: *Theory of electrons and positrons* (in *Les Prix Nobel en 1933*, Imprimerie Royale P. A. Norstedt & Söner, Stoccolma, 1935. Alla luce della recente scoperta del positone avevano acquistato estrema importanza i suoi lavori, in cui veniva proposta e studiata l'equazione per l'elettrone relativistico: *The Quantum Theory of the Electron* [La teoria quantistica dell'elettrone], *Proceedings of the Royal Society of London* **A117** (1928) 610–624; *The Quantum Theory of the Electron. Part II* [La teoria quantistica dell'elettrone. II parte], *Proceedings of the Royal Society of London* **A118** (1928) 351–361.

la costante di struttura fina di Sommerfeld.⁸⁰ I tentativi finora intrapresi di una formulazione relativistica della meccanica quantistica partono tutti da rappresentazioni intuitive così vicine alla fisica classica che una determinazione della costante di struttura fina sembra impossibile all'interno di questo sistema di concetti. Lo sviluppo del sistema concettuale qui in discussione del resto dovrebbe essere strettamente collegato con l'ulteriore sviluppo della teoria quantistica dei campi di onde, e mi sembra che questo formalismo, nonostante la sua estesa investigazione da parte di vari ricercatori (Dirac, Pauli, Jordan, Klein, Wigner, Fermi⁸¹), non sia stato ancora completamente sfruttato. Importanti indicazioni per lo sviluppo ulteriore della meccanica quantistica sono fornite dagli esperimenti che affrontano la struttura dei nuclei atomici.⁸² Dalla loro analisi per mezzo della teoria di Gamow⁸³ sembra emergere che tra le particelle elementari del nucleo atomico agiscono delle forze di un tipo che si differenzia alquanto dalle forze che determinano la struttura della corteccia atomica; gli esperimenti di Stern⁸⁴ inoltre sembrano indicare

⁸⁰ A. Sommerfeld: *Allgemeine spektroskopische Gesetze, insbesondere ein magnetooptischer Zerlegungssatz* [Leggi generali spettroscopiche e in particolare un principio di decomposizione magnetoottica], *Annalen der Physik* **63** (1920) 221–263.

Sommerfeld introdusse, oltre ai numeri quantici principale n e orbitale l , un nuovo numero quantico j per spiegare la struttura fina degli spettri atomici, senza ancora sapere dell'esistenza dello spin. Applicando l'equazione di Dirac, che comporta un elettrone dotato di spin, Gordon e Charles Galton Darwin (1887–1962) riuscirono a ricavare la formula di Sommerfeld per la struttura fina.

W. Gordon: *Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms nach der Diracschen Quantentheorie des Elektrons* [Livelli energetici dell'atomo di idrogeno secondo la teoria quantistica di Dirac dell'elettrone], *Zeitschrift für Physik* **48** (1928) 11–14; C. G. Darwin: *The Wave Equation of the Electron* [L'equazione d'onda dell'elettrone], *Proceedings of the Royal Society of London* **A118** (1928) 654–679.

⁸¹ Compare anche il nome di Fermi che ormai era inserito completamente in questo campo di ricerche: *Sopra l'elettrodinamica quantistica*, *Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei* **5** (1929) 881–887; **12** (1930) 431–435.

Per uno stato dell'arte al momento in cui parla Heisenberg si vedano le lezioni tenute da Fermi, con la consueta chiarezza, nell'estate del 1930 all'Università del Michigan: *Quantum theory of radiation* [Teoria quantistica della radiazione], *Reviews of Modern Physics* **4** (1932) 87–132.

⁸² Dopo la citata scoperta del neutrone a opera di Chadwick nel 1932 era chiaro che il nucleo atomico comprendeva sia protoni che neutroni. Le prime sonde di alta energia, necessarie per lo studio della dinamica nucleare, furono realizzate, grazie alle tecniche di accelerazione elettrostatica, nel 1931 al MIT di Boston da Robert Jemison van de Graaf (1901–1967) e nel 1932 da John Douglas Cockcroft (1897–1967) e Ernest Thomas Sinton Walton (1903–1995) nel laboratorio Cavendish a Cambridge.

⁸³ George Gamow (1904–1968) è noto per la sua teoria sul decadimento α dei nuclei radioattivi, interpretato come l'attraversamento di una barriera di potenziale che trattiene le particelle α all'interno del nucleo (effetto "tunnel"): *Zur Quantentheorie des Atomkernes* [Teoria quantistica del nucleo atomico], *Zeitschrift für Physik* **51** (1928) 204–212.

Heisenberg apprezzava anche un testo di fisica nucleare di G. Gamow: *Der Bau des Atomkerns und die Radioaktivität*, Lipsia, 1932.

⁸⁴ R. Frisch e O. Stern: *Über die magnetische Ablenkung von Wasserstoffmolekülen und das magnetische Moment des Protons. I* [Deviazione magnetica delle molecole d'idrogeno e il

che il comportamento delle particelle elementari pesanti non si possa rappresentare col formalismo della teoria di Dirac dell'elettrone. La ricerca futura deve quindi essere preparata a sorprese, che del resto possono arrivare sia dal campo di esperienza della fisica nucleare, sia dalla radiazione cosmica.⁸⁵ Ma comunque possa compiersi in dettaglio lo sviluppo, il cammino percorso finora dalla teoria quantistica indica che la comprensione di quei tratti ancora non chiariti della fisica atomica si può raggiungere solo con una rinuncia all'intuitività e oggettivizzazione superiore a quella finora consueta. Probabilmente non abbiamo alcun motivo di rincrescimento per questo, dato che il pensiero alle grandi difficoltà epistemologiche, con cui ha dovuto combattere la rappresentazione intuitiva dell'atomo della scienza precedente, ci suscita la speranza che la fisica atomica astratta, che si sta ora sviluppando, un giorno si potrà accomodare armoniosamente nel grande edificio della conoscenza.

momento magnetico del protone. I], Zeitschrift für Physik 85 (1933) 4–16; I. Estermann e O. Stern: Über die magnetische Ablenkung von Wasserstoffmolekülen und das magnetische Moment des Protons. II [Deviazione magnetica delle molecole d'idrogeno e il momento magnetico del protone. II], ibid. 17–24.

Sono gli esperimenti sul momento magnetico di spin del protone, che ne mettevano in evidenza una componente *anomala*. Per questi studi nel 1944, insieme con Isidor Isaac Rabi (1898–1988), premiato quell'anno per gli studi di risonanza magnetica, Otto Stern (1888–1969) ricevette il premio Nobel per la Fisica assegnatogli nel 1943: era anche un riconoscimento per la prima misura del magnetone di Bohr, resa possibile nella famosa esperienza di Otto Stern e Walther Gerlach (1899–1979): *Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms [Dimostrazione sperimentale del momento magnetico dell'atomo di argento]*, *Zeitschrift für Physik 8* (1921) 110–111; *Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung [Dimostrazione sperimentale della quantizzazione della direzione]*, *Zeitschrift für Physik 9* (1922) 349–352; *Das magnetische Moment des Silberatoms [Il momento magnetico dell'atomo di argento]*, *Zeitschrift für Physik 9* (1922) 353–355.

⁸⁵ L'avvio dello studio della radiazione cosmica si può datare in corrispondenza della salita in pallone a 5000 metri di altezza compiuta da Victor Franz Hess (1883–1964) nel 1912, ma una vera indagine sperimentale si stava sviluppando proprio all'inizio degli anni '30. Per una breve storia scritta da un protagonista, si veda l'articolo di Bruno Benedetto Rossi (1905–1993): *Raggi cosmici: storia e attualità*, in *Scienza & Tecnica 85*, Annuario dell'Enciclopedia delle Scienze e della Tecnica, Mondadori, Milano, 1985, p. 10–25.

§ 3. Alcune note tecniche

Per comprendere meglio alcune argomentazioni di Heisenberg nel lavoro che segue, conviene ricordare alcuni aspetti della descrizione quantistica che fanno ricorso alla teoria delle rappresentazioni dello stato del sistema.⁸⁶

Nella formulazione alla Dirac della meccanica quantistica lo stato del sistema viene rappresentato mediante un vettore $|\Psi\rangle$ in un opportuno spazio, lo spazio di Hilbert, che in generale è uno spazio a infinite dimensioni. Ma, come in uno spazio a numero finito di dimensioni, il vettore è individuato assegnandone le componenti secondo direzioni ortogonali che fissano il sistema di riferimento.

Scelta la base di versori di riferimento $\{|n\rangle\}$,⁸⁷ allora lo stato $|\Psi\rangle$ è noto, se si conoscono le sue componenti c_n :

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle. \quad (3.1)$$

Per motivi legati a problemi interpretativi, conviene limitare la scelta dei vettori $|\Psi\rangle$ al caso in cui

$$\sum_n |c_n|^2 = 1, \quad (3.2)$$

che corrisponde a considerare anche $|\Psi\rangle$ come un vettore a norma unitaria.

A seconda del sistema di riferimento scelto, si ha dunque una particolare *rappresentazione* del vettore $|\Psi\rangle$; si può passare da una rappresentazione

⁸⁶ Qui viene brevemente richiamato, in chiave moderna, quanto inizialmente formulato in alcuni lavori che Heisenberg cita a proposito della teoria matriciale delle trasformazioni e che gli servono per corroborare matematicamente l'intuizione avuta sulle limitazioni di principio cui sono soggette le osservazioni. Si tratta dei seguenti lavori.

W. Heisenberg: *Schwankungerscheinungen und Quantenmechanik* [Fenomeni oscillatori e meccanica quantistica], *Zeitschrift für Physik* **40** (1926) 501–506;

P. Jordan: *Über quantenmechanische Darstellung von Quantensprünge* [Rappresentazione dei salti quantici alla luce della meccanica quantistica], *Zeitschrift für Physik* **40** (1926) 661–666;

W. Pauli: *Über Gasentartung und Paramagnetismus* [Gas degenerate e paramagnetismo], *Zeitschrift für Physik* **41** (1927) 81–102;

P. A. M. Dirac: *The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics* [Interpretazione fisica della dinamica quantistica], *Proceedings of the Royal Society of London* **A113** (1926) 621–641;

P. Jordan: *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik* [Una nuova fondazione della meccanica quantistica], *Zeitschrift für Physik* **40** (1927) 809–838.

Nei primi tre lavori viene proposto, sotto una forma o un'altra, un primo tentativo di interpretazione probabilistica; in particolare, una nota a p. 83 del lavoro di Pauli risulta fondamentale per l'interpretazione statistica della funzione d'onda.

Gli altri due lavori di Dirac e di Jordan sono alla base della teoria matriciale delle trasformazioni, che qui viene richiamata.

⁸⁷ Per conservare al massimo l'analogia con gli spazi a numero finito di dimensioni vengono indicati i versori di base con l'indice numerabile n , ma in generale questo indice può anche assumere valori in un intervallo continuo.

all'altra esattamente allo stesso modo in cui, in uno spazio a numero finito di dimensioni, una trasformazione ortogonale permette di esprimere le componenti di un vettore nel nuovo sistema di riferimento in termini delle componenti rispetto al vecchio sistema di riferimento.

Scelta una nuova base di versori di riferimento $\{|\alpha\rangle\}$, per cui

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle, \quad (3.3)$$

con

$$\sum_{\alpha} |c_{\alpha}|^2 = 1, \quad (3.4)$$

esiste un legame lineare tra i coefficienti c_n e c_{α} :

$$c_{\alpha} = \sum_n U_{\alpha n} c_n. \quad (3.5)$$

Gli elementi $U_{\alpha n}$ della matrice di trasformazione U sono l'analogo dei coseni direttori del nuovo sistema di riferimento rispetto al vecchio: essi rappresentano le componenti dei versori $|n\rangle$ nella direzione dei versori $|\alpha\rangle$.

Come conseguenza della completezza degli insiemi di versori scelti come base nello spazio di Hilbert, si dimostra che valgono le relazioni

$$\begin{aligned} \sum_n U_{\alpha n} U_{n\beta}^{\dagger} &= \delta_{\alpha\beta}, \\ \sum_{\alpha} U_{n\alpha}^{\dagger} U_{\alpha m} &= \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Quindi la matrice U è unitaria, cioè:

$$U^{\dagger} = U^{-1}. \quad (3.7)$$

Rappresentazioni connesse da trasformazioni unitarie sono *equivalenti* per la descrizione del sistema fisico.

Nel formalismo basato sullo spazio di Hilbert astratto, l'operazione corrispondente all'osservazione di una variabile dinamica del sistema viene tradotta in termini di un operatore autoaggiunto, $A = A^{\dagger}$, che viene applicato allo stato $|\Psi\rangle$: per effetto dell'applicazione di A , $|\Psi\rangle$ si trasforma in un nuovo stato $|\Phi\rangle$:

$$|\Phi\rangle = A|\Psi\rangle. \quad (3.8)$$

L'azione dell'operatore A è simile a quella di una rotazione nello spazio a numero finito di dimensioni, che porti un vettore in un altro. Scelta allora la

base di versori $\{|n\rangle\}$, l'operatore A è rappresentato dalla matrice A_{nm} che collega le componenti di $|\Psi\rangle$ alle componenti di $|\Phi\rangle$:

$$\Phi_n = \sum_m A_{nm} \Psi_m. \quad (3.9)$$

Se $|\Phi\rangle$ risulta proporzionale a $|\Psi\rangle$, $\Phi_n = a_n \Psi_n$, si dice che $|\Psi\rangle$ è *autostato* di A . Dalla teoria degli spazi di Hilbert si sa che una base completa di versori può essere costruita adottando l'insieme di autostati normalizzati di un operatore autoaggiunto. Per esempio, se

$$A|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (3.10)$$

è l'equazione agli autovalori per l'operatore A , l'insieme degli autostati $\{|\alpha\rangle\}$ così ottenuti è una legittima base di riferimento per costruire la rappresentazione di $|\Psi\rangle$, secondo la (3.3). Su questa base l'operatore A è rappresentato da una matrice diagonale:

$$A_{\alpha\alpha'} = \alpha\delta_{\alpha\alpha'}, \quad (3.11)$$

mentre in un'altra rappresentazione equivalente qualsiasi in generale ciò non succede. Per risolvere la (3.10) dunque si può partire da una rappresentazione costruita con una base $\{|n\rangle\}$ qualsiasi e ricercare la trasformazione unitaria U che diagonalizza la matrice A_{nm} : in termini geometrici, come fa rilevare Heisenberg, ciò significa ridurre il tensore A_{nm} ai suoi assi principali.

In particolare si può scegliere per A l'operatore di posizione X e costruire quella che viene chiamata rappresentazione delle coordinate: ⁸⁸

$$|\Psi\rangle = \int dx \Psi(x)|x\rangle. \quad (3.12)$$

La funzione $\Psi(x)$ altro non è che la funzione d'onda introdotta da Schrödinger: perciò la rappresentazione delle coordinate viene detta anche rappresentazione di Schrödinger.

Scegliendo l'operatore di impulso P , si può analogamente costruire la rappresentazione degli impulsi:

$$|\Psi\rangle = \int dp \Psi(p)|p\rangle. \quad (3.13)$$

Ora la funzione d'onda $\Psi(p)$ viene a dipendere dalla variabile d'impulso p .

⁸⁸ Ora conviene esplicitare il fatto che la variabile x è una variabile continua, per cui le somme diventano integrali.

Dirac e Jordan ⁸⁹ hanno mostrato che la trasformazione dalla rappresentazione degli impulsi a quella delle coordinate è sostanzialmente una trasformazione di Fourier che lega la funzione $\Psi(p)$ alla funzione $\Psi(x)$:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \Psi(p) e^{ipx/\hbar}, \\ \Psi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \Psi(x) e^{-ipx/\hbar}.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Questo significa che la matrice di trasformazione U è data da

$$U(x, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar},\tag{3.15}$$

e non è possibile costruire una base di riferimento con autostati simultanei di X e P .

La matrice (3.15) è quella che Heisenberg indica con $S(q, p)$ nell'equazione (5). Essa può anche interpretarsi come la funzione d'onda di Schrödinger per lo stato di definito impulso p : infatti, se nella prima delle (3.14) si concentra la funzione $\Psi(p)$ attorno al valore p' , in modo da considerare uno stato $|\Psi\rangle$ diretto secondo il versore di base $|p'\rangle$, si ottiene

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip'x/\hbar} = U(x, p').\tag{3.16}$$

In generale, dunque, $U_{\alpha n}$ può intendersi come la funzione d'onda dello stato $|n\rangle$ nella rappresentazione α . ⁹⁰

Da un punto di vista interpretativo, il modulo quadrato della componente del vettore di stato $|\Psi\rangle$ secondo uno dei versori di base rappresenta una probabilità: se la base scelta è quella dell'insieme degli autovettori dell'operatore A , essa rappresenta la probabilità con cui si prevede il valore, ottenibile dalla misurazione della variabile dinamica associata ad A , e corrispondente all'autovalore cui appartiene quel versore. ⁹¹ A questa interpretazione storicamente non fu facile arrivare: il merito va attribuito principalmente a Born, ⁹² che nello studio di un processo d'urto aveva decomposto la funzione $\Psi(x)$,

⁸⁹ P. A. M. Dirac: *l.c.*; P. Jordan: *l.c.*.

⁹⁰ Si potrà allora comprendere l'equazione (4) del lavoro di Heisenberg come una semplice conseguenza della trasformazione dello stato di impulso definito p dalla rappresentazione delle coordinate a quella indicata dal parametro η .

⁹¹ Questo è il motivo della normalizzazione (3.2) per il vettore $|\Psi\rangle$.

⁹² M. Born: *Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, *Zeitschrift für Physik* **37** (1926) 863–867; *Quantenmechanik der Stossvorgänge [Meccanica quantistica dei processi d'urto]*, *Zeitschrift für Physik* **38** (1926) 803–827. Si veda però anche la citata nota del lavoro di Pauli.

che descrive lo stato del sistema nella rappresentazione delle coordinate, sulla base delle onde piane e^{ikx} ($p = \hbar k$), secondo una relazione del tipo (3.14). Se dunque si attribuisce a $|\Psi(x)|^2 dx$ il significato di probabilità di trovare la particella nell'intervallo tra x e $x + dx$, si deve analogamente attribuire a $|\Psi(p)|^2 dp$ il significato di probabilità che la particella abbia l'impulso compreso tra p e $p + dp$. In generale, $|c_\alpha|^2 d\alpha$ rappresenta la probabilità che la variabile dinamica del sistema, associata all'operatore autoaggiunto A , abbia un valore compreso tra α e $\alpha + d\alpha$.

Coerentemente con questo schema interpretativo, se lo stato $|\Psi\rangle$ del sistema viene a coincidere con uno degli autostati $|\alpha\rangle$ dell'operatore A , si ha la certezza che una misurazione della relativa variabile dinamica produca il risultato α . Perciò se si suppone che il sistema abbia un valore di impulso ben definito, cioè $\Psi(p)$ risulta concentrato intorno a un ben preciso valore di p , il legame (3.14) tra $\Psi(x)$ e $\Psi(p)$, attraverso una trasformata di Fourier, impone che $\Psi(x)$ sia una funzione diversa da zero su tutto l'asse x . Di conseguenza, la probabilità di trovare la particella si distribuisce su tutto l'asse x senza possibilità di venire localizzata: la precisa conoscenza dell'impulso impedisce di conoscere con precisione la posizione. Viceversa, per lo stesso motivo legato alla trasformazione (3.14), la determinazione precisa della posizione fa perdere la possibilità di definire l'impulso.

Da un punto di vista matematico questa difficoltà è legata al fatto che la rappresentazione delle coordinate e la rappresentazione degli impulsi sono costruite con autostati di operatori (X e P) che non commutano:

$$[X, P] \equiv XP - PX = i\hbar, \quad (3.17)$$

e che quindi non possiedono un insieme completo di autostati simultanei. Se invece si danno due operatori autoaggiunti, A e B , con commutatore nullo:

$$[A, B] = 0, \quad (3.18)$$

è possibile costruire un insieme completo di autostati simultanei dei due operatori: ⁹³

$$\begin{aligned} A|\alpha\beta\rangle &= \alpha|\alpha\beta\rangle, \\ B|\alpha\beta\rangle &= \beta|\alpha\beta\rangle. \end{aligned} \quad (3.19)$$

In questo caso il generico stato $|\Psi\rangle$ del sistema ha la rappresentazione

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} |\alpha\beta\rangle, \quad (3.20)$$

⁹³ La (3.18) è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dell'insieme completo di autostati simultaneo.

e i coefficienti $c_{\alpha\beta}$ permettono di costruire la probabilità, per il sistema nello stato $|\Psi\rangle$, di trovare il valore α per una misurazione dell'osservabile associata ad A e il valore β per una misurazione (simultanea o successiva) dell'osservabile associata a B . Si dice che le osservabili associate ad A e a B sono *compatibili*. Una misurazione di A che produca il valore α' , indica che il sistema, a priori descritto dalla (3.20), per effetto dell'osservazione viene proiettato nello stato con $\alpha = \alpha'$ e β non definito. Una misurazione di B , attraverso il risultato dell'osservazione, seleziona il valore $\beta = \beta'$, senza disturbare il valore $\alpha = \alpha'$, e proietta infine il sistema nello stato $|\alpha'\beta'\rangle$. In questo senso la seconda osservazione arricchisce la conoscenza del sistema, come avviene in fisica classica. Invece operatori, che non possiedono autostati simultanei, risultano associati a variabili dinamiche incompatibili: la misurazione di una seconda variabile proietta lo stato del sistema in un autostato dell'operatore corrispondente e distrugge l'informazione acquisita in precedenza con l'osservazione della prima. L'incompatibilità che si verifica per la posizione e l'impulso si riflette nella teoria attraverso la non commutabilità (3.17) tra X e P .

Il contenuto intuitivo della cinematica e della meccanica nella teoria quantistica [†]

In questo lavoro vengono stabilite in primo luogo le esatte definizioni di termini quali posizione, velocità, energia, ecc. (per esempio dell'elettrone) che rimangono valide anche in meccanica quantistica e viene mostrato che grandezze canonicamente coniugate possono essere determinate simultaneamente solo con una imprecisione caratteristica (§1). Questa imprecisione è l'autentico motivo della comparsa del contesto statistico in meccanica quantistica. La sua formulazione matematica è ottenuta per mezzo della teoria di Dirac-Jordan (§2). A partire dagli enunciati fondamentali così raggiunti viene mostrato come i processi macroscopici possano essere compresi alla luce della meccanica quantistica (§3). A commento della teoria vengono discussi alcuni particolari esperimenti concettuali (§4).

Crediamo di comprendere intuitivamente una teoria fisica quando riusciamo a pensare in modo qualitativo alle conseguenze sperimentali di tale teoria in tutti i casi semplici e quando allo stesso tempo abbiamo riconosciuto che l'applicazione della teoria non contiene mai contraddizioni interne. Per esempio, crediamo di comprendere intuitivamente la rappresentazione di Einstein dello spazio chiuso tridimensionale, perché è possibile pensare alle conseguenze sperimentali di questa rappresentazione senza contraddizioni. Certamente contraddicono queste conseguenze i nostri usuali concetti intuitivi di spazio-tempo. Però ci possiamo rendere conto che la possibilità di applicare questi concetti consueti di spazio-tempo a spazi molto grandi non può essere derivata né dai nostri principi logici né dalla nostra esperienza. L'interpretazione intuitiva della meccanica quantistica è tuttora piena di contraddizioni interne, che si riflettono nel contrasto di opinioni riguardo alla teoria del discreto e del continuo, onde e corpuscoli. Già da ciò si potrebbe dedurre che un'interpretazione della meccanica quantistica in termini di concetti cinematici e meccanici consueti non è in ogni caso possibile. La meccanica quantistica ebbe origine proprio dal tentativo di rottura con quei concetti cinematici usuali, sostituendoli con relazioni tra numeri concreti forniti dall'esperienza. ⁹⁴ Dato che ciò ora sembra riuscito, neppure lo schema

[†] di W. Heisenberg in Copenhagen. Testo ricevuto dalla rivista il 23 marzo 1927 e pubblicato su *Zeitschrift für Physik* **43** (1927) 172–198.

⁹⁴ In queste prime righe l'autore ribadisce il suo personale modo di porsi di fronte al dato sperimentale per costruire una teoria fisica, lo stesso atteggiamento che gli aveva permesso di fondare la nuova meccanica nel 1925.

matematico della meccanica quantistica avrà bisogno alcuno di revisione. E neppure sarà necessaria una revisione della geometria spazio-temporale per tempi e spazi piccoli, in quanto con la scelta di masse abbastanza grandi possiamo approssimare a volontà le leggi quanto-meccaniche a quelle classiche, anche se si tratta di spazi e tempi piccoli. Ma che una revisione dei concetti cinematici e meccanici sia necessaria sembra discendere direttamente dalle equazioni fondamentali della meccanica quantistica. Una volta che sia data una determinata massa m , nel nostro modo di vedere consueto ha significato univoco parlare di posizione e velocità del baricentro di questa massa m . Nella meccanica quantistica però deve esistere una relazione $\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = h/2\pi i$ tra massa, posizione e velocità. Abbiamo perciò buone ragioni per sollevare sospetti contro l'utilizzo acritico di quelle parole "posizione" e "velocità". Se poi si aggiunge che per processi in spazi e tempi molto piccoli ci sono comunque tipiche discontinuità, diventa immediatamente plausibile il fallimento proprio dei concetti di "posizione" e "velocità". Se si pensa per esempio al moto monodimensionale di una massa puntiforme, in una teoria del continuo si può tracciare una curva $x(t)$ per la traiettoria della particella (o più precisamente del suo baricentro) e la tangente fornisce la velocità punto per punto (fig. 1). In una teoria del discreto, per contro, al posto di questa curva comparirà una serie di punti a distanza finita (fig. 2). In questo caso è chiaramente privo di senso parlare di velocità in un punto determinato, perché la velocità in primo luogo è definita da due posizioni e poi perché viceversa a ogni punto appartengono ogni volta due valori discreti di velocità.

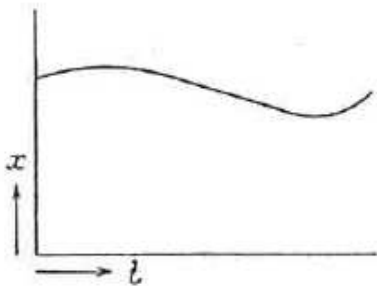


Fig. 1.

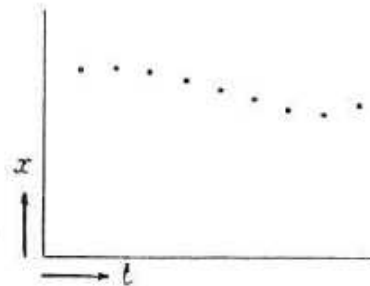


Fig. 2.

Sorge perciò la domanda se per mezzo di un'analisi più precisa di quei concetti cinematici e meccanici non sia possibile chiarire le contraddizioni che finora sussistono nell'interpretazione intuitiva della meccanica quantistica e giungere a una comprensione intuitiva delle relazioni della meccanica

quantistica. † ⁹⁵

§ 1. I concetti: posizione, orbita, velocità, energia.

Per poter seguire il comportamento quanto-meccanico di un qualunque oggetto, si deve conoscere la massa di tale oggetto e le forze d'interazione con qualsiasi campo e gli altri oggetti. Solo allora può essere stabilita la funzione di Hamilton del sistema quantistico [le considerazioni che seguono devono essere riferite in generale alla meccanica quantistica non relativistica, in quanto le leggi dell'elettrodinamica quantistica non sono ancora completamente conosciute]. # ⁹⁶ Sulla "forma" dell'oggetto non è necessario alcun altro asserto, potendosi indicare nel modo più opportuno il complesso di quelle forze di interazione con la parola forma.

† Questo lavoro trae origine dall'aspirazione e dal desiderio che altri ricercatori hanno chiaramente espresso già molto prima dell'avvento della meccanica quantistica. Ricordo qui in particolare i lavori di Bohr sui postulati fondamentali della teoria dei quanti (p. es. ZS. f. Phys. **13**, 117, 1923) e le discussioni di Einstein sulle connessioni tra campo d'onde e quanti di luce. In tempi più recenti i problemi di cui qui si parla sono stati discussi con grandissima chiarezza e le domande che ne scaturiscono hanno trovato risposta ad opera di W. Pauli (*Quantentheorie [Teoria dei quanti]*, Handb. d. Phys. vol. 23, in seguito citato come *l.c.*); in meccanica quantistica la formulazione di questi problemi da parte di Pauli ha subito solo piccole variazioni. È anche per me una gioia particolare ringraziare W. Pauli in questa occasione per i molteplici stimoli che ho ricevuto in comuni discussioni orali e scritte, che hanno contribuito in modo essenziale a questo lavoro.

⁹⁵ Einstein era riuscito a chiarire il significato della legge di Planck sulla distribuzione energetica dello spettro della radiazione di corpo nero, mostrando che essa implica un comportamento ondulatorio alle alte temperature ($kT \gg h\nu$) e corpuscolare alle basse ($kT \ll h\nu$): i due limiti corrispondono rispettivamente alle formule di Rayleigh-Jeans e di Wien.

A. Einstein: *Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und Konstitution der Strahlung [Sviluppo dei nostri punti di vista sulla natura e costituzione della radiazione]*, *Physikalische Zeitschrift* **10** (1909) 817–826.

Per il lavoro di Bohr v. nota 46.

Pauli aveva redatto un testo organico sulla teoria dei quanti: *Allgemeine Prinzipien der Quantentheorie*, in *Handbuch der Physik*, ed. H. Geiger e K. Scheel, Springer, Berlino, vol. 23, ed. H. Geiger, 1926, p. 1–278. La rassegna considera i contributi prodotti fino al settembre 1925 e quindi non riguarda ancora i nuovi sviluppi della teoria, ma solo la vecchia teoria dei quanti. A questo testo si riferisce qui e nel seguito Heisenberg. Ma Pauli scrisse un altro articolo di rassegna, ben più attuale, sulla meccanica quantistica: *Die allgemeine Prinzipien der Wellenmechanik*, in *Handbuch der Physik*, ed. H. Geiger e K. Scheel, Springer, Berlino, vol. 24/1, ed. A. Smekal, 1933, p. 83–272, sostanzialmente riprodotto (a eccezione delle ultime superate 30 pagine) nella nuova edizione dell'enciclopedia: *Die allgemeine Prinzipien der Wellenmechanik*, in *Handbuch der Physik*, ed. S. Flügge, Springer, Berlino, vol. V/1, 1958, p. 1–168.

Recentissimamente però in questo campo sono stati raggiunti grandi progressi con i lavori di P. Dirac [*Proc. Roy. Soc. (A)* **114**, 243, 1927 e ricerche di successiva pubblicazione].

⁹⁶ P. A. M. Dirac: *The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation [Teoria quantistica dell'emissione e dell'assorbimento di radiazione]*, *Proceedings of the Royal Society of London* **A114** (1927) 243–265; *The Quantum Theory of Dispersion [Teoria quantistica della dispersione]*, *ibid.* 710–728. In questi primi lavori Dirac tenta una formulazione quantistica del campo elettromagnetico. L'idea è di specificare il campo di radiazione mediante variabili dinamiche, individuate dalle energie e dalle fasi delle sue varie

Affinché sia chiaro che cosa si debba intendere con l'espressione "posizione dell'oggetto", per esempio dell'elettrone (rispetto a un dato sistema di riferimento), occorre presentare determinati esperimenti con l'aiuto dei quali si pensa di misurare la "posizione dell'elettrone"; altrimenti tale espressione non ha alcun senso.⁹⁷ Non mancano affatto esperimenti che in linea di principio permettano la determinazione arbitrariamente precisa della "posizione dell'elettrone". Si illumini per esempio l'elettrone e lo si osservi al microscopio. In questo caso la precisione massima raggiungibile nella determinazione della posizione è data essenzialmente dalla lunghezza d'onda della luce utilizzata. Ma si può costruire in linea di principio un microscopio a raggi γ e misurare con questo la posizione con la precisione che si desidera. Però a questa determinazione si affianca una circostanza: l'effetto Compton. Ogni osservazione della luce diffusa dall'elettrone provoca un effetto fotoelettrico (nell'occhio, sulla lastra fotografica, nella camera fotografica), per cui può essere interpretata anche come un quanto di luce che colpisce l'elettrone, ne viene riflesso o diffratto e poi, di nuovo rifratto attraverso le lenti del microscopio, provoca l'effetto fotoelettrico. Nell'istante della determinazione della posizione, perciò nell'istante in cui il quanto di luce viene deviato dall'elettrone,

componenti, che agiscono come semplici oscillatori armonici. Queste variabili dinamiche vengono interpretate in teoria quantistica come operatori che soddisfano alle appropriate regole di commutazione. Così Dirac può riscrivere la hamiltoniana di interazione tra campo di radiazione e atomo nella forma dell'interazione di un'assemblea di quanti di luce con l'atomo stesso, ottenendo una riconciliazione formale tra punto di vista ondulatorio e descrizione in termini di quanti di luce. La trattazione avviene dunque in ambito non relativistico.

L'esigenza di una formulazione relativistica era diffusa, ma problematica, anche se già si conosceva l'equazione che poi si chiamerà di Klein-Gordon. Ad accrescere i problemi interpretativi, ma infine anche a risolverli, contribuirà lo stesso Dirac con la proposta della sua equazione per l'elettrone: *The Quantum Theory of the Electron* [*La teoria quantistica dell'elettrone*], Proceedings of the Royal Society of London **A117** (1928) 610–624; *The Quantum Theory of the Electron. Part II* [*La teoria quantistica dell'elettrone. II parte*], Proceedings of the Royal Society of London **A118** (1928) 351–361.

⁹⁷ Questo atteggiamento "operativo" nella definizione dei concetti utilizzati in fisica è sempre presente in Heisenberg. Si veda per esempio anche il programma annunciato all'inizio del libro, non a caso intitolato *Principi fisici della teoria dei quanti*, che è basato su lezioni tenute nella primavera del 1929 all'Università di Chicago e che è stato pubblicato nella prima edizione nel 1930: *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, Hirzel, Lipsia, 1930 [traduzione inglese di C. Eckart e F. C. Hoyt: *The Physical Principles of Quantum Theory*, The Chicago University Press; traduzione italiana di Mario Ageno: *Principi fisici della teoria dei quanti*, Einaudi, Torino, 1948]: "dall'analisi dei tipi di esperienze possibili derivare i concetti fisici e stabilirne i limiti d'impiego; mostrare quindi che i concetti così definiti, insieme con il formalismo matematico della teoria dei quanti formano un sistema esente da contraddizioni".

D'altra parte è proprio figlio dello sviluppo di pensiero collegato alla nuova meccanica il criterio che le quantità fisiche osservabili vadano definite contestualmente alle operazioni necessarie per ottenerne una misura. Questa filosofia va sotto il nome di *operazionismo* e ha visto Percy Williams Bridgman (1882–1961) tra i suoi più convinti sostenitori nel suo libro: *The logic of modern physics*, The Macmillan Company, New York, 1927, traduzione italiana di Vittorio Somenzi: *La logica della fisica moderna*, Einaudi, Torino, 1957. Bridgman fu premio Nobel per la Fisica nel 1946 per le sue ricerche sulla fisica delle alte pressioni.

l'elettrone ne modifica l'impulso in moto discontinuo. Questa variazione è tanto più grande quanto minore è la lunghezza d'onda della luce utilizzata, cioè quanto più precisa è la determinazione della posizione. Nel momento in cui la posizione dell'elettrone diventa nota, il suo impulso può essere contemporaneamente noto solo nella misura corrispondente a quella variazione discontinua; perciò, più precisamente viene determinata la posizione, tanto più imprecisa è la conoscenza dell'impulso e viceversa; di qui scorgiamo una spiegazione intuitiva diretta della relazione $\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = h/2\pi i$. Sia q_1 la precisione con cui è noto il valore di q (q_1 è press'a poco l'errore medio di q), e quindi qui la lunghezza d'onda della luce, e sia p_1 la precisione con cui è possibile definire il valore di p , e quindi qui la variazione discontinua di p per effetto Compton; allora, per le formule elementari dell'effetto Compton, p_1 e q_1 si trovano nella relazione ⁹⁸

$$p_1 q_1 \sim h. \quad (1)$$

Che questa relazione (1) sia in diretto legame matematico con la relazione di commutazione $\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = h/2\pi i$, verrà mostrato più avanti. Qui basta accennare che l'equazione (1) è l'espressione precisa per i fatti che in precedenza si cercava di descrivere con una suddivisione dello spazio delle fasi in celle elementari di dimensioni h . ⁹⁹

Per la determinazione della posizione dell'elettrone si possono effettuare anche altri esperimenti, per esempio esperimenti d'urto. Una misurazione precisa della posizione richiede urti con particelle molto veloci, in quanto con elettroni lenti i fenomeni di diffrazione, che secondo Einstein sono una conseguenza delle onde di de Broglie (v. p. es. l'effetto Ramsauer ¹⁰⁰), impediscono una precisa definizione della posizione. In una misurazione di

⁹⁸ Se ϵ è l'angolo di accettazione dei raggi di luce da parte del microscopio utilizzato e λ è la lunghezza d'onda della radiazione, il potere risolutivo del microscopio permette di localizzare l'elettrone con l'incertezza $q_1 \sim \lambda/\sin \epsilon$. Il rinculo dell'elettrone per effetto Compton, provocato dalla radiazione di frequenza $\nu = c/\lambda$, risulta dell'ordine di $h\nu/c$ e la sua direzione rimane indeterminata, perché non è nota la direzione del quanto di luce incidente entro l'angolo di apertura ϵ . Perciò l'incertezza sul momento dell'elettrone è $p_1 \sim (h\nu/c)\sin \epsilon$, e quindi segue la (1).

⁹⁹ Per il calcolo della funzione di partizione della meccanica statistica classica, necessaria per esempio per definire l'entropia del gas perfetto, si era costretti a introdurre artificialmente una suddivisione dello spazio delle fasi, associato a una particella, in celle elementari di dimensioni h^3 .

Otto Sackur (1880–1914): *Die Anwendung der kinetischen Theorie der Gase auf chemische Probleme [Applicazione della teoria cinetica dei gas a problemi chimici]*, Annalen der Physik **36** (1911) 958–980; Hugo Tetrode: *Die chemische Konstante der Gase und das elementare Wirkungsquantum [La costante chimica dei gas e il quanto d'azione elementare]*, Annalen der Physik **38** (1912) 434–442; M. Planck: *Über die Entropie einatomiger Körper [Entropia di corpi monoatomici]*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), p. 653–667 (1916).

¹⁰⁰ Carl Ramsauer (1879–1955): *Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen [Sezione d'urto di molecole di gas sottoposte a elettroni lenti]*,

posizione precisa cambia perciò l'impulso dell'elettrone di nuovo in modo discontinuo e una semplice stima della precisione con le formule delle onde di de Broglie fornisce di nuovo la relazione (1).¹⁰¹

Con questa discussione sembra che il concetto di “posizione dell'elettrone” sia stato abbastanza chiarito e che ora occorra aggiungere solamente una parola sulla “dimensione” dell'elettrone. Se due particelle molto veloci, in un intervallo di tempo Δt molto piccolo, urtano l'elettrone una dopo l'altra, le posizioni dell'elettrone definite dalle due particelle si trovano molto vicine tra di loro, a una distanza Δl . Dalle leggi osservate nel caso dei raggi α deduciamo che Δl si lascia ridurre fino a dimensioni dell'ordine di 10^{-12} cm, se solo si scelgono un Δt sufficientemente piccolo e particelle sufficientemente veloci. Questo è il significato del dire che l'elettrone è un corpuscolo di raggio non superiore a 10^{-12} cm.¹⁰²

Consideriamo ora il concetto di “orbita dell'elettrone”.¹⁰³ Per orbita intendiamo una successione di punti spaziali (in un dato sistema di riferimento) che l'elettrone assume di seguito come “posizione”. Siccome già sappiamo che cosa si debba intendere per “posizione a un certo istante”, non incontriamo qui nessuna difficoltà nuova. Tuttavia è facile riconoscere che, per esempio, l'espressione spesso usata “l'orbitale 1S dell'elettrone nell'atomo di idrogeno” dal nostro punto di vista non ha alcun senso. Per misurare questo “orbitale” 1S bisognerebbe illuminare l'atomo con della luce la cui lunghezza d'onda sia in ogni caso di gran lunga più corta di 10^{-8} cm. Di tale luce però basta un singolo quanto per scagliare l'elettrone completamente fuori dalla sua “orbita” (per cui di tale orbita si può definire sempre solo un singolo punto spaziale) e quindi in questo caso la parola “orbita” non ha alcun significato ragionevole. Ciò può essere ricavato senza conoscere la nuova teoria, ma semplicemente sulla base delle possibilità sperimentali.

Invece può essere eseguita la misurazione concettuale di posizione su

Annalen der Physik **64** (1921) 513–540; **66** (1921) 546–558; **72** (1923) 345–352. Per determinati valori dell'energia incidente la sezione d'urto si azzera in accordo con l'idea di un processo diffrattivo.

¹⁰¹ Si consideri un fascio di elettroni, tutti di impulso p , che incide perpendicolarmente su di uno schermo, nel quale è praticata una fenditura di ampiezza d . L'elettrone, nell'attraversare la fenditura, ha una posizione, nella direzione parallela allo schermo, determinata con un'impresione q_1 uguale a d . L'onda di de Broglie associata all'elettrone, di lunghezza d'onda $\lambda \sim h/p$, viene diffratta a un angolo α , secondo le leggi dell'ottica: $\sin \alpha \sim \lambda/d$. Ma allora per l'elettrone ne risulta una componente di impulso parallela allo schermo, con un'indeterminazione $p_1 \sim p \sin \alpha = (h/\lambda) \sin \alpha \sim h/d$; quindi vale ancora la (1).

¹⁰² Questo in realtà è il raggio del nucleo atomico. Oggi si arriva a esplorare distanze dell'ordine di 10^{-16} cm, sulle quali l'elettrone si comporta come puntiforme. A proposito della definizione delle dimensioni di una particella in meccanica ondulatoria può essere interessante il punto di vista espresso da Schrödinger nel suo discorso Nobel: v. il Quaderno *Onde di materia e onde di probabilità*, p. 37–38.

¹⁰³ Il vocabolo originale tedesco *Bahn* può voler dire *traiettoria*, ma qui si è preferito usare il termine “orbita” in quanto Heisenberg porta solo esempi di stati legati, corrispondenti agli orbitali elettronici negli atomi.

molti atomi nello stato $1S$ (atomi in un dato stato “stazionario” si lasciano isolare in linea di principio mediante l’esperimento di Stern-Gerlach ¹⁰⁴). Per un certo stato dell’atomo, per esempio $1S$, ci deve essere dunque una funzione di probabilità per le posizioni dell’elettrone che corrisponde al valor medio sulle fasi della traiettoria classica e che può essere determinata con arbitraria precisione mediante misurazioni. Secondo Born [†] questa funzione è data da $\psi_{1S}(q)\overline{\psi_{1S}(q)}$, dove $\psi_{1S}(q)$ indica la funzione d’onda di Schrödinger che appartiene allo stato $1S$. In vista di future generalizzazioni vorrei dire con Dirac [†] e Jordan [†]: la probabilità è data da $S(1S, q)\overline{S(1S, q)}$, dove $S(1S, q)$ indica la colonna della matrice di trasformazione $S(E, q)$ da E a q , che appartiene a $E = E_{1S}$ ($E =$ energia). ¹⁰⁵

Dunque, il fatto che nella teoria quantistica si possa assegnare a un

¹⁰⁴ L’esperimento di Stern-Gerlach è basato su un campo magnetico inhomogeneo che viene attraversato da un fascio di atomi ed è servito, originariamente, alla misurazione del momento magnetico dell’elettrone attivo dell’atomo di argento. Però l’idea del campo di forze inhomogeneo permette di ottenere anche una separazione tra atomi in livelli energetici diversi. Se $E_n(F)$ è l’energia di interazione degli atomi nello stato n con il campo F , p l’impulso degli atomi nella direzione x di moto e t_1 il tempo impiegato dagli atomi per attraversare F , allora la forza deviante è $\partial E_n / \partial x$ e la deviazione subita dagli atomi dipende dallo stato n :

$$\frac{1}{p} \frac{\partial E_n}{\partial x} t_1.$$

Perciò si ottiene nel fascio una separazione angolare α tra atomi nello stato n e atomi nello stato m , uguale a:

$$\alpha \sim \frac{1}{p} \left[\frac{\partial E_n}{\partial x} t_1 - \frac{\partial E_m}{\partial x} t_1 \right].$$

Più avanti, nell’arrivare all’equazione (2), Heisenberg è interessato all’imprecisione E_1 che caratterizza una misura di E_n con questo dispositivo e dirà che E_1 non deve essere superiore alla differenza $E_n - E_m$.

[†] L’interpretazione statistica delle onde di de Broglie fu formulata dapprima da A. Einstein (Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss. 1925, p. 3). Questo elemento statistico in meccanica quantistica gioca poi un ruolo essenziale in M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan, *Quantenmechanik II* (ZS. f. Phys. **35**, 557, 1926), specialmente cap. 4, e P. Jordan (ZS. f. Phys. **37**, 376, 1926); esso viene analizzato matematicamente in un lavoro fondamentale di M. Born (ZS. f. Phys. **38**, 803, 1926) e utilizzato per l’interpretazione dei processi d’urto. Le ragioni di fondo degli enunciati probabilistici sulla base della teoria matriciale delle trasformazioni si trovano nei lavori di W. Heisenberg (ZS. f. Phys. **40**, 502, 1926), P. Jordan (*ibid.* **40**, 661, 1926), W. Pauli (Lettera a ZS. f. Phys. **41**, 81, 1927), P. Dirac (Proc. Roy. Soc. (A) **113**, 621, 1926), P. Jordan (ZS. f. Phys. **40**, 809, 1926). In generale l’aspetto statistico della meccanica quantistica è discusso in P. Jordan (Naturwiss. **15**, 105, 1927) e in M. Born (Naturwiss. **15**, 238, 1927).

¹⁰⁵ La nota dell’autore rimanda a numerosi contributi precedenti.

A. Einstein: *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases [Teoria quantistica del gas perfetto monoatomico]*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), p. 3–14 (1925). Einstein era interessato alle fluttuazioni di energia del gas perfetto, considerandone le particelle come indistinguibili, secondo quanto suggeritogli da Satyendra Nath Bose (1894–1974). Un termine addizionale delle fluttuazioni quadratiche d’energia, non riconducibile al caso di particelle indipendenti, era interpretato da Einstein come la conseguenza delle fluttuazioni del campo d’onde associato da de Broglie al moto di una

dato stato, per esempio $1S$, solo una funzione di probabilità della posizione dell'elettrone, può essere riguardato con Born e Jordan come un caratteristico aspetto statistico della teoria quantistica, in contrapposizione alla teoria classica. Però, se si vuole, si può anche dire con Dirac che la statistica è introdotta mediante i nostri esperimenti, poiché è chiaro che *anche nella teoria classica* si potrebbe assegnare solo la probabilità di una certa posizione dell'elettrone se solo non si conoscessero le fasi degli atomi. La differenza tra meccanica classica e meccanica quantistica consiste piuttosto in ciò: classicamente mediante esperimenti precedenti possiamo sempre pensare a una fase determinata. In realtà però ciò è impossibile, perché ogni esperimento inteso a determinare la fase distrugge o modifica l'atomo. In uno "stato" stazionario particolare dell'atomo, in linea di principio le fasi sono indeterminate, cosa che si può ritenere come una diretta spiegazione delle note equazioni:

$$\mathbf{E}t - \mathbf{tE} = \frac{h}{2\pi i} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{Jw} - \mathbf{wJ} = \frac{h}{2\pi i}$$

(\mathbf{J} = variabile d'azione, \mathbf{w} = variabile angolare). ¹⁰⁶

Il termine "velocità" di un oggetto si lascia facilmente definire mediante misurazioni quando si tratta di moti liberi. Si può per esempio illuminare l'oggetto con luce rossa e determinare la velocità della particella mediante

particella.

Le fluttuazioni di energia di un sistema di oscillatori armonici accoppiati vengono calcolate coi metodi della nuova meccanica delle matrici proposta da M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik. II* [Meccanica quantistica. II], *Zeitschrift für Physik* **35** (1926) 557–615.

P. Jordan: *Bemerkungen über einen Zusammenhang zwischen Duanes Quantentheorie der Interferenz und den de Broglieschen Wellen* [Osservazione su un legame tra la teoria quantistica dell'interferenza di Duane e le onde di de Broglie], *Zeitschrift für Physik* **37** (1926) 376–382. Jordan riesamina la teoria della diffrazione da un reticolo periodico di William Duane (1872–1935) e riscontra che le condizioni di diffrazione equivalgono all'ipotesi delle onde di de Broglie: in termini di un impulso quantizzato, trasferito dalla radiazione alla materia per mezzo dei quanti di luce, si ritrova infatti la condizione $p = h/\lambda$.

W. Duane: *The transfer in quanta of radiation momentum to matter* [Trasferimento di impulso di radiazione alla materia sotto forma di quanti], *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)* **9** (1923) 158–164.

Ma la prima volta in cui davvero si introduce l'interpretazione statistica per la funzione d'onda è nel lavoro di M. Born: *Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge* [Meccanica quantistica dei processi d'urto], *Zeitschrift für Physik* **37** (1926) 863–867, e in quello successivo più esteso: *Quantenmechanik der Stossvorgänge* [Meccanica quantistica dei processi d'urto], *Zeitschrift für Physik* **38** (1926) 803–827.

Lo stesso Born pubblica una riflessione su questo tema: *Quantenmechanik und Statistik* [Meccanica quantistica e statistica], *Die Naturwissenschaften* **15** (1926) 238–242; e P. Jordan dedica all'argomento il suo tema di abilitazione: *Kausalität und Statistik in der modernen Physik* [Causalità e statistica nella moderna fisica], *Die Naturwissenschaften* **15** (1926) 105–110.

Per quanto riguarda la teoria matriciale delle trasformazioni si rimanda a quanto brevemente illustrato nel §3 di questo Quaderno.

¹⁰⁶ Su queste "regole di commutazione" v. i commenti al §4 di questo Quaderno.

l'effetto Doppler della luce diffusa.¹⁰⁷ La determinazione della velocità della particella sarà tanto più precisa quanto maggiore è la lunghezza d'onda della luce utilizzata, poiché tanto più piccola sarà allora la variazione di velocità della particella per quanto di luce dovuta all'effetto Compton. La determinazione della posizione sarà corrispondentemente imprecisa nella misura che corrisponde all'eq. (1). Se si deve misurare la velocità dell'elettrone in un atomo a un particolare istante, si deve allora in questo istante far scomparire improvvisamente la carica nucleare e le forze dovute agli altri elettroni, in modo che da quel momento il moto prosegua libero e si possa eseguire la determinazione precisata sopra. Di nuovo, come sopra, ci si può facilmente convincere che non si può definire una funzione $p(t)$ per un dato stato dell'atomo, p. es. $1S$. Invece c'è di nuovo una funzione di probabilità di p in questo stato, che secondo Dirac e Jordan possiede il valore $S(1S, p)\overline{S}(1S, p)$. $S(1S, p)$ indica di nuovo quella colonna della matrice di trasformazione $S(E, p)$ da \mathbf{E} a \mathbf{p} che appartiene a $E = E_{1S}$.

Infine sia fatto un accenno agli esperimenti che permettono di misurare l'energia o i valori delle variabili d'azione J ; tali esperimenti sono particolarmente importanti, in quanto solo con il loro aiuto possiamo definire che cosa intendiamo quando parliamo di variazione discontinua dell'energia e di J . Gli esperimenti d'urto di Franck-Hertz, grazie alla validità del teorema di conservazione dell'energia in teoria quantistica, permettono di ricondurre la misurazione dell'energia dell'atomo alla misurazione dell'energia di elettroni che si muovono in linea retta. Questa misurazione in linea di principio può essere eseguita in modo arbitrariamente preciso se solo si rinuncia a una determinazione simultanea della posizione dell'elettrone, cioè della fase (v. sopra la determinazione di p), corrispondentemente alla relazione $\mathbf{E}\mathbf{t} - \mathbf{t}\mathbf{E} = h/2\pi i$. L'esperimento di Stern-Gerlach permette la determinazione del momento magnetico o di un valor medio del momento elettrico dell'atomo e quindi la misurazione di grandezze che dipendono solo dalle variabili d'azione J . Le fasi restano in linea di principio indeterminate. Allo stesso modo in cui è poco sensato parlare di frequenze di un'onda luminosa a un certo istante, così non si può parlare di energia di un atomo a un certo istante. A ciò corrisponde nell'esperimento di Stern-Gerlach il fatto che la precisione della misurazione d'energia diventa tanto minore quanto più breve è l'intervallo di tempo in cui l'atomo rimane sotto l'influenza della forza deviante.[†]¹⁰⁸ Un limite

¹⁰⁷ Christian Johann Doppler (1803–1853): *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels* [Sulla luce colorata delle stelle doppie e di altre costellazioni celesti], *Abhandlungen der Königlichen Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften* **2** (1842) 465.

[†] v. a questo proposito W. Pauli, *l.c.* p. 61.

¹⁰⁸ Pauli discute il caso in cui l'atomo che emette radiazione sia sottoposto all'interazione con un campo magnetico che, rimuovendo la degenerazione iniziale degli stati, altera lo spettro e la polarizzazione della luce emessa.

superiore per la forza deviante è dato dal fatto che, per rendere possibile la determinazione dell'energia degli stati stazionari, l'energia potenziale di quella forza deviante all'interno del fascio di raggi può variare solo di un ammontare notevolmente inferiore alle differenze energetiche tra gli stati stazionari. Sia E_1 la quantità d'energia che soddisfa a questa condizione (E_1 fornisce nel contempo la precisione di quella misura d'energia), allora è anche E_1/d il valore massimo della forza deviante, con d che indica l'ampiezza del fascio di raggi (misurabile dall'ampiezza del diaframma utilizzato). La deviazione angolare dei raggi atomici è quindi $E_1 t_1 / d p$, dove t_1 indica l'intervallo di tempo in cui l'atomo resta sotto l'azione della forza deviante e p è l'impulso dell'atomo nella direzione dei raggi. Perché sia possibile una misurazione, occorre che questa deviazione sia almeno dello stesso ordine di grandezza dell'allargamento provocato dalla diffrazione dei raggi al diaframma. La deviazione angolare per diffrazione è circa λ/d , con λ che indica la lunghezza d'onda di de Broglie, per cui

$$\frac{\lambda}{d} \sim \frac{E_1 t_1}{d p} \quad \text{oppure, siccome è} \quad \lambda = \frac{h}{p},$$

$$E_1 t_1 \sim h. \tag{2}$$

Questa equazione corrisponde all'eq. (1) e mostra come una precisa determinazione d'energia possa essere ottenuta solo mediante la corrispondente imprecisione nel tempo.

§ 2. La teoria di Dirac-Jordan.

I risultati della sezione precedente si potrebbero riassumere e generalizzare con questa affermazione: *tutti i concetti, che nella teoria classica sono utilizzati per descrivere un sistema meccanico, si possono definire esattamente anche per processi atomici in analogia con i concetti classici.* Gli esperimenti che servono a definirli comportano però un'indeterminazione intrinseca, puramente sulla base dell'esperienza, allorquando richiediamo loro la simultanea specificazione di due grandezze canonicamente coniugate. Il grado di questa indeterminazione è dato dalla relazione (1) (generalizzata a qualunque coppia di grandezze canonicamente coniugate).¹⁰⁹ È naturale paragonare su questo punto la teoria quantistica con la teoria della relatività speciale. Secondo la teoria della relatività il termine "simultaneo" non si lascia definire diversamente se non mediante esperimenti nei quali la velocità di propagazione della luce interviene in modo essenziale. Se ci fosse una definizione di simultaneità più "netta", come per esempio segnali che si propagano con velocità infinita, la

¹⁰⁹ Questa generalizzazione per Heisenberg non ha bisogno di dimostrazione, convinto come è che la vera origine della relazione (1) sta nel fatto che \mathbf{q} e \mathbf{p} non commutano; quindi una simile relazione deve esistere per due grandezze qualunque, canonicamente coniugate.

teoria della relatività non sarebbe possibile.¹¹⁰ Siccome però questi segnali non esistono, perché piuttosto già nella definizione di simultaneità interviene la velocità della luce, si fa posto per il postulato della *costanza* della velocità della luce, e quindi questo postulato non è in contraddizione con l'uso corretto dei termini "posizione", "velocità", "tempo". Simile situazione si ha per la definizione dei concetti "posizione" e "velocità dell'elettrone" in teoria quantistica. Tutti gli esperimenti che possiamo impiegare per definire queste parole contengono necessariamente l'imprecisione data dall'eq. (1), anche se permettono di definire esattamente il singolo concetto p, q . Se ci fossero esperimenti che rendessero possibile una determinazione simultanea "più netta" di p e q , rispetto a quanto espresso dall'eq. (1), la meccanica quantistica non sarebbe possibile. Proprio questa imprecisione, che viene stabilita dall'eq. (1), offre spazio alla validità delle relazioni che trovano la loro espressione pregnante nelle regole di commutazione quantistiche

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = \frac{h}{2\pi i};$$

essa rende possibile questa equazione senza che si debba cambiare il significato fisico delle grandezze p e q .

Per quei fenomeni fisici, la cui formulazione quantistica ancora non è nota (p. es. l'elettrodinamica), l'eq. (1) costituisce un'esigenza utile per trovare nuove leggi. Per la meccanica quantistica l'eq. (1) può essere ricavata con una semplicissima generalizzazione della formulazione di Dirac-Jordan. Se per un certo valore η di un parametro qualsiasi determiniamo la posizione q dell'elettrone pari a q' con un'imprecisione q_1 , possiamo esprimere questo fatto mediante un'ampiezza di probabilità $S(\eta, q)$ che è apprezzabilmente diversa da zero solo in una regione approssimativamente della dimensione q_1 intorno a q' . In particolare si può, per esempio, porre¹¹¹

$$S(\eta, q) \text{ proporzionale a } \exp \left[-\frac{(q - q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i}{h} p'(q - q') \right], \quad (3)$$

per cui $\overline{S\overline{S}}$ proporzionale a $\exp \left[-\frac{(q - q')^2}{q_1^2} \right]$.

Allora per l'ampiezza di probabilità appartenente a p vale

$$S(\eta, p) = \int S(\eta, q) S(q, p) dq. \quad (4)$$

¹¹⁰ Se esistessero segnali che si propagano istantaneamente, l'orologio di due osservatori inerziali in moto relativo sarebbe lo stesso, come nella trasformazione di Galilei. Invece, abbandonando il concetto classico di simultaneità e accettando le trasformazioni di Lorentz "si fa posto per il postulato della costanza della velocità della luce", come Heisenberg dice tra poco.

¹¹¹ La (3) è l'espressione più semplice per l'ampiezza di probabilità che traduce quanto detto a parole: un'onda piana pesata da un'ampiezza di forma gaussiana intorno alla posizione centrale q' , in modo da avere una probabilità di presenza $\overline{S\overline{S}}$ di tipo gaussiano. In questo modo q_1 rappresenta la deviazione standard della teoria degli errori.

Per $S(q, p)$ secondo Jordan si può porre

$$S(q, p) = \exp\left(\frac{2\pi i p q}{h}\right). \quad (5)$$

Allora, dalla (4), $S(\eta, p)$ sarà sensibilmente diversa da zero solo per valori di p per i quali $2\pi(p - p')q_1/h$ non è sostanzialmente maggiore di 1. In particolare nel caso (3) vale:

$$S(\eta, p) \text{ proporzionale a } \int \exp\left[\frac{2\pi i(p - p')q}{h} - \frac{(q' - q)^2}{2q_1^2}\right] dq,$$

cioè

$$S(\eta, p) \text{ proporzionale a } \exp\left[-\frac{(p - p')^2}{2p_1^2} + \frac{2\pi i}{h} q'(p - p')\right],$$

per cui $S\bar{S}$ proporzionale a $\exp\left[-\frac{(p - p')^2}{p_1^2}\right],$

dove

$$p_1 q_1 \sim \frac{h}{2\pi}. \quad (6)$$

L'ipotesi (3) per $S(\eta, q)$ corrisponde dunque al fatto sperimentale che è stato misurato il valore p' per p e il valore q' per q [con la limitazione (6) sulla precisione].

Da un punto di vista puramente matematico è caratteristico per la formulazione di Dirac-Jordan della meccanica quantistica che relazioni tra \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{E} , ecc. possano essere scritte in termini di espressioni molto generali tra matrici, in modo tale che una qualunque grandezza quantistica preassegnata compaia come una matrice diagonale. La possibilità di una tale descrizione appare chiara se si immaginano intuitivamente le matrici come tensori (per esempio momenti d'inerzia) in spazi multidimensionali, tra i quali esistono relazioni matematiche.¹¹² Si possono sempre disporre gli assi del sistema di coordinate, in cui vengono espresse queste relazioni matematiche, secondo gli assi principali di uno di questi tensori. Alla fine si possono caratterizzare le relazioni matematiche tra due tensori A e B ancora sempre mediante formule di trasformazione che portano da un sistema di coordinate orientato secondo gli assi principali di A a un altro orientato secondo gli assi principali di B . Quest'ultima formulazione corrisponde a quella di Schrödinger. Invece la descrizione di Dirac in termini di q -numeri può essere considerata come l'autentica formulazione "invariante" della meccanica quantistica, indipendente da ogni sistema di riferimento.¹¹³ Se vogliamo ricavare risultati fisici

¹¹² L'idea dell'analogia coi tensori si trova nel lavoro citato di F. London.

¹¹³ Qui Heisenberg sta cercando di visualizzare la descrizione matematica in termini di operatori (i q -numeri di Dirac) e delle loro rappresentazioni matriciali.

da quello schema matematico, dobbiamo assegnare dei numeri alle grandezze quantistiche, cioè alle matrici (o “tensori” in spazi multidimensionali). Ciò va inteso in modo che in quello spazio multidimensionale si assegni una data direzione ad arbitrio (cioè la si fissi sulla base del tipo di esperimento che si vuole compiere) e venga richiesto quale sia il “valore” della matrice in questa direzione assegnata (per esempio in quel modello il valore del momento d’inerzia). Questa richiesta ha significato univoco solo se la direzione assegnata viene a coincidere con la direzione di uno degli assi principali di quella matrice; in tal caso esiste una risposta esatta alla domanda posta. Però anche quando l’assegnata direzione devia di poco da quella di uno degli assi principali della matrice, si può parlare ancora del “valore” della matrice nella direzione assegnata con una certa imprecisione determinata dall’inclinazione relativa, con un certo errore probabile. Si può anche dire: a ogni grandezza quantistica o matrice si può assegnare un numero, che ne fornisce il “valore”, con un certo errore probabile; l’errore probabile dipende dal sistema di coordinate; per ogni grandezza quantistica c’è un sistema di coordinate in cui l’errore probabile per questa grandezza si annulla. Perciò un certo esperimento non può mai fornire un’informazione precisa su tutte le grandezze quantistiche, ma piuttosto divide in modo caratteristico le grandezze fisiche in “note” e “ignote” (ossia, grandezze conosciute con maggiore o minore precisione). I risultati di due esperimenti si possono dedurre esattamente gli uni dagli altri solo se entrambi gli esperimenti suddividono le grandezze fisiche in “note” e “ignote” allo stesso modo (cioè se i tensori in quello spazio multidimensionale utilizzato per la rappresentazione sono “visti” in entrambi gli esperimenti dalla stessa direzione). Se due esperimenti provocano diverse suddivisioni in grandezze “note” e “ignote”, allora il legame tra i risultati di quegli esperimenti può essere convenientemente descritto in termini statistici.

Per una discussione più precisa di questo rapporto statistico si consideri un esperimento concettuale. Un raggio atomico alla Stern-Gerlach sia inviato dapprima attraverso un campo F_1 , che è così fortemente inhomogeneo nella direzione del raggio da provocare molte transizioni come conseguenza dell’“azione di perturbazione”. Poi il raggio atomico viaggi libero per un po’, ma a una certa distanza da F_1 cominci un secondo campo F_2 , inhomogeneo allo stesso modo di F_1 . Tra F_1 e F_2 e oltre F_2 sia possibile misurare il numero di atomi nei diversi stati stazionari per mezzo di un eventuale campo magnetico. Sia posto uguale a zero il potere emissivo degli atomi. Se sappiamo che prima di passare attraverso F_1 un atomo era nello stato di energia E_n , possiamo esprimere questo fatto sperimentale assegnando all’atomo una funzione d’onda – p. es. nello spazio p – con fissata energia E_n e fase β_n *indeterminata*:

$$S(E_n, p) = \psi(E_n, p) \exp \left[-\frac{2\pi i E_n (\alpha + \beta_n)}{h} \right].$$

Attraversando il campo F_1 questa funzione si sarà trasformata: † ¹¹⁴

$$S(E_n, p) \xrightarrow{F_1} \sum_m c_{nm} \psi(E_m, p) \exp \left[-\frac{2\pi i E_m (\alpha + \beta_m)}{h} \right]. \quad (7)$$

I β_m siano qui fissati in qualche modo arbitrario, così che i c_{nm} siano univocamente determinati mediante F_1 . La matrice c_{nm} trasforma gli autovalori precedenti all'attraversamento di F_1 in quelli successivi all'attraversamento di F_1 . Se dopo F_1 eseguiamo una determinazione degli stati stazionari, per esempio mediante un campo magnetico inhomogeneo, ci troveremo con una probabilità $c_{nm} \overline{c_{nm}}$ che l'atomo abbia compiuto una transizione dallo stato n allo stato m . Se accertiamo sperimentalmente che l'atomo ha realmente compiuto la transizione allo stato m , gli assegneremo per ogni calcolo successivo non la funzione $\sum_m c_{nm} S_m$, ma piuttosto la funzione S_m con una fase indeterminata; mediante la determinazione sperimentale dello "stato m ", fra tutte le diverse possibilità (c_{nm}) ne scegliamo una determinata: m , ma allo stesso tempo distruggiamo, come sarà spiegato più avanti, tutto ciò che, relativamente alle relazioni di fase, ancora era contenuto nelle quantità c_{nm} . Quando il raggio atomico attraversa F_2 si ripete la stessa situazione che si aveva con F_1 . Siano d_{nm} i coefficienti della matrice di trasformazione che trasformano l'energia prima di F_2 in quella dopo di F_2 . Se tra F_1 e F_2 non viene compiuta alcuna determinazione dello stato, allora l'autofunzione si trasforma secondo il seguente schema:

$$S(E_n, p) \xrightarrow{F_1} \sum_m c_{nm} S(E_m, p) \xrightarrow{F_2} \sum_m \sum_l c_{nm} d_{ml} S(E_l, p). \quad (8)$$

Si ponga $\sum_m c_{nm} d_{ml} = e_{nl}$. Se si osserva lo stato stazionario dell'atomo dopo F_2 , si trova lo stato l con una probabilità $e_{nl} \overline{e_{nl}}$. Se invece si è compiuta la determinazione dello "stato m " tra F_1 e F_2 , allora la probabilità per " l " dopo F_2 sarà data da $d_{ml} \overline{d_{ml}}$. Ripetendo più volte l'intero esperimento (in cui ogni volta venga definito lo stato tra F_1 e F_2) si osserverà dunque dopo F_2 lo stato l con la frequenza relativa $Z_{nl} = \sum_m c_{nm} \overline{c_{nm}} d_{ml} \overline{d_{ml}}$. Ma questa

† Cfr. P. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) **112**, 661, 1926 e M. Born, ZS. f. Phys. **40**, 167, 1926.

¹¹⁴ L'articolo di Dirac (*On the Theory of Quantum Mechanics [Sulla teoria della meccanica quantistica]*, Proceeding of the Royal Society of London **A112** (1926) 661–677) nei primi due paragrafi riguarda l'equivalenza tra la formulazione di Schrödinger e quella di Heisenberg. Nel terzo e quarto paragrafo, dedicati allo studio dello stato di un sistema di molti elettroni, Dirac mostra la connessione tra simmetria della funzione d'onda per lo scambio delle posizioni di due elettroni e il principio di esclusione di Pauli; quando applicata a un gas perfetto, questa connessione fa ritrovare la statistica di Bose-Einstein. Questo importante lavoro si conclude col quinto paragrafo, in cui viene formulata la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo: è questa che sostanzialmente viene qui invocata da Heisenberg per scrivere la (7). Simili argomenti nello studio dei processi d'urto erano stati utilizzati anche da Born nei già citati lavori sulla meccanica quantistica dei processi d'urto.

espressione non coincide con $e_{nl}\overline{e_{nl}}$. Jordan (*l.c.*) ha perciò parlato di una “interferenza delle probabilità”.¹¹⁵ Ma io non vorrei aderire a questo punto di vista, in quanto i due esperimenti che portano a $e_{nl}\overline{e_{nl}}$ e a Z_{nl} , rispettivamente, sono in realtà fisicamente diversi. In un caso l’atomo tra F_1 e F_2 non subisce alcuna perturbazione, nell’altro viene perturbato dagli apparati che rendono possibile un accertamento dello stato stazionario. Questi apparati hanno la conseguenza che la “fase” dell’atomo subisce una variazione per un ammontare in linea di principio incontrollabile, allo stesso modo in cui varia l’impulso durante una determinazione della posizione dell’elettrone (v. §1). Il campo magnetico per la determinazione dello stato tra F_1 e F_2 modificherà l’energia E , dato che nell’osservare la traiettoria del raggio di atomi (penso p. es. alle fotografie di Wilson) gli atomi vengono frenati in modo statisticamente diverso e incontrollabile. Ciò ha la conseguenza che la matrice di trasformazione finale e_{nl} (dai valori di energia prima dell’ingresso in F_1 a quelli dopo l’uscita da F_2) non è più data da $\sum_m c_{nm}d_{ml}$, ma ogni termine della somma ha anche un fattore di fase sconosciuto. Ci possiamo dunque aspettare che il valor medio di $e_{nl}\overline{e_{nl}}$ su tutte queste eventuali variazioni di fase sia uguale a Z_{nl} . Un semplice calcolo mostra che questo è il caso.¹¹⁶ – Perciò da un esperimento possiamo dedurre, secondo certe regole statistiche, i risultati possibili di un altro. È l’altro esperimento che sceglie, da una totalità di risultati possibili, uno del tutto particolare e riduce con ciò le possibilità per tutti gli esperimenti successivi. Una tale interpretazione dell’equazione per la matrice di trasformazione S o dell’equazione d’onda di Schrödinger è però possibile solo in quanto la somma delle soluzioni rappresenta ancora una soluzione. Da qui riconosciamo il profondo significato della linearità dell’equazione di Schrödinger; perciò essa può essere compresa solo come equazione per le onde nello spazio delle fasi e considereremmo quindi senza speranza ogni tentativo di sostituzione di questa equazione con una non lineare, come per esempio nel caso relativistico (con molti elettroni).¹¹⁷

¹¹⁵ In realtà Jordan si riferisce all’“interferenza di probabilità” nel riconoscere che in meccanica quantistica la legge di composizione riguarda le ampiezze di probabilità e non le probabilità stesse, come nella statistica classica; cfr. p. 812 di P. Jordan: *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik [Una nuova fondazione della meccanica quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **40** (1927) 809–838.

Qui invece si tratta di distinguere tra caso puro e caso miscela; cfr. p. es. G. M. Prosperi, *l.c.*, p. 100.

¹¹⁶ Esplicitando una fase ϕ_n nello stato n , per il calcolo di Z_{nl} si deve mediare sulle fasi la quantità:

$$\sum_m c_{nm}d_{ml}e^{i\phi_m} \sum_{m'} \overline{c_{nm'}d_{m'l}}e^{-i\phi_{m'}}.$$

Ciò comporta una $\delta_{mm'}$ e quindi il risultato del testo per Z_{nl} .

¹¹⁷ Le soluzioni dell’equazione di Schrödinger rispettano il principio di sovrapposizione lineare grazie alla linearità dell’equazione nella funzione e nelle sue derivate. La linearità dell’equazione è un requisito essenziale per garantire il comportamento ondulatorio delle

§ 3. Transizione dalla micro alla macromeccanica.

Con l'analisi condotta nelle sezioni precedenti sulle parole "posizione dell'elettrone", "velocità", "energia", ecc. mi sembra che i concetti della cinematica e della meccanica in teoria quantistica siano stati sufficientemente chiariti, così che deve essere divenuta possibile una comprensione intuitiva anche dei processi macroscopici dal punto di vista della meccanica quantistica. La transizione dalla micro alla macromeccanica è già stata trattata da Schrödinger, [†] ¹¹⁸ ma io non credo che la riflessione di Schrödinger centri la natura del problema, e precisamente per le seguenti ragioni: secondo Schrödinger, in stati di alta eccitazione una somma delle vibrazioni proprie dovrebbe fornire un pacchetto di onde non eccessivamente largo, che a sua volta produce i moti periodici dell'"elettrone" classico mediante le variazioni periodiche della sua ampiezza. A ciò occorre obiettare quanto segue: se il pacchetto di onde avesse proprietà tali quelle qui descritte, allora la radiazione emessa dall'atomo sarebbe sviluppabile in serie di Fourier e le frequenze delle vibrazioni d'ordine superiore sarebbero multipli interi di una frequenza fondamentale. Le frequenze delle linee spettrali emesse dall'atomo però, secondo la meccanica quantistica, non sono mai multipli interi di una frequenza fondamentale – eccetto il caso speciale dell'oscillatore armonico. La riflessione di Schrödinger dunque è realizzabile solo nel caso dell'oscillatore armonico da lui trattato, mentre in *tutti gli altri* casi il pacchetto di onde si sparpaglia nel corso del tempo su tutto lo spazio circostante l'atomo. Quanto più alta l'eccitazione dello stato dell'atomo, tanto più lenta risulta quella dispersione del pacchetto di onde. Ma si verificherà, pur di attendere sufficientemente a lungo. L'argomento prodotto sopra sulla radiazione emessa dall'atomo può essere utilizzato in primo luogo contro *tutti* i tentativi di spiegare la transizione diretta dalla meccanica quantistica alla meccanica classica per grandi numeri quantici. Perciò in passato si è cercato di contrastare quell'argomento

soluzioni, tipicamente rappresentato dai fenomeni di interferenza e di diffrazione. Anche Dirac, nel derivare la sua equazione per l'elettrone relativistico, si fonderà soprattutto sullo stesso principio.

[†] E. Schrödinger, *Naturwiss.* **14**, 664, 1926.

¹¹⁸ E. Schrödinger: *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik [La transizione continua dalla micro alla macromeccanica]*, *Die Naturwissenschaften* **14** (1926) 664–666. Schrödinger costruisce un pacchetto di onde mediante autostati dell'oscillatore armonico lineare che risulta concentrato spazialmente e privo di sparpagliamento durante il suo moto. In realtà il suo pacchetto di onde è molto particolare e rappresenta uno stato che solo molti anni più tardi viene riconosciuto come uno stato a minima indeterminazione, appartenente all'insieme degli stati cosiddetti coerenti, che Roy Jay Glauber (n. 1925) introdusse per descrivere le proprietà statistiche della radiazione elettromagnetica. R. J. Glauber: *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field [Stati coerenti e stati incoerenti del campo di radiazione]*, *Physical Review* **131** (1963) 2766–2788. Per il suo contributo alla teoria quantistica della coerenza ottica, Glauber condivise il premio Nobel del 2005 con John L. Hall (n. 1934) e Theodor W. Hänsch (n. 1941) premiati per i loro sviluppi di spettroscopia di precisione basati sull'uso del laser.

richiamando la larghezza naturale della radiazione degli stati stazionari; sicuramente a torto, in quanto in primo luogo questa via d'uscita è sbarrata già nel caso dell'atomo di idrogeno, a causa della scarsa radiazione in stati altamente eccitati, e in secondo luogo la transizione dalla meccanica quantistica alla meccanica classica deve essere comprensibile anche senza ricorso all'elettrodinamica. A queste note difficoltà, che si incontrano sulla strada di un legame diretto tra teoria quantistica e teoria classica, già più volte si è richiamato Bohr in precedenza. † Qui le abbiamo spiegate di nuovo così dettagliatamente solo perché ultimamente sembravano cadere nell'oblio.¹¹⁹

Io credo che l'origine dell'"orbita" classica si possa formulare concisamente così: *l'"orbita" nasce solo in quanto la si osserva*. Sia dato per esempio un atomo nel millesimo stato eccitato. Le dimensioni dell'orbita sono qui già relativamente grandi, per cui nel senso del §1 è sufficiente determinare la posizione dell'elettrone con luce di lunghezza d'onda proporzionalmente grande. Se la determinazione della posizione non deve essere troppo imprecisa, il rinculo per effetto Compton avrà la conseguenza che l'atomo dopo l'urto si troverà in uno stato qualsiasi, compreso, diciamo, tra il 950-mo e il 1050-mo; allo stesso tempo l'impulso dell'elettrone può essere dedotto dall'effetto Compton con una precisione data dalla (1). Il dato sperimentale così ottenuto può essere caratterizzato nello spazio q con un pacchetto di onde – meglio, un pacchetto di probabilità – di ampiezza data dalla lunghezza d'onda della luce impiegata, essenzialmente costituito dalle autofunzioni tra la 950-ma e la 1050-ma, e nello spazio p con un corrispondente pacchetto. Si esegua una nuova determinazione di posizione dopo un po' di tempo con la stessa precisione. Il suo risultato può essere indicato solo in modo statistico secondo il §2 e come posizioni probabili entrano in considerazione con una probabilità calcolabile tutte quelle che rientrano nel pacchetto di onde già disperso. Nella teoria classica ciò non sarebbe per nulla diverso, in quanto anche nella teoria classica il risultato della seconda determinazione di posizione sarebbe ottenibile solo in modo statistico a causa dell'incertezza della prima determinazione; anche le orbite del sistema nella teoria classica si disperderebbero analogamente al pacchetto di onde. Ma le leggi statistiche della meccanica quantistica sono senza dubbio diverse da quelle della teoria classica. La seconda determinazione di posizione sceglie, tra tutte quelle possibili, una particolare " q " e riduce le possibilità per le successive determinazioni. Dopo la seconda determinazione di posizione i risultati di successive misurazioni possono essere calcolati solo

† N. Bohr, *Grundpostulate der Quantentheorie* [Postulati fondamentali della teoria dei quanti], l.c.

¹¹⁹ È vero che in generale un pacchetto di onde si sparpaglia durante l'evoluzione temporale e che il pacchetto di Schrödinger è molto particolare, ma le argomentazioni di Heisenberg non sono convincenti. Piuttosto, il pacchetto di Schrödinger per il suo comportamento poteva indurre a un'interpretazione realistica di un gruppo di onde associate realmente al moto della particella, la cui velocità è uguale alla velocità di gruppo. Questa era infatti la posizione di Schrödinger nel 1926.

nella misura in cui di nuovo viene assegnato all'elettrone un pacchetto di onde "più stretto" di ampiezza λ (lunghezza d'onda della luce impiegata). Ogni specificazione di posizione riduce dunque il pacchetto di onde di nuovo alla sua larghezza λ originale. I "valori" delle variabili \mathbf{p} e \mathbf{q} sono noti durante tutte le prove con una certa precisione. Che i valori di \mathbf{p} e \mathbf{q} *all'interno di questi limiti di precisione* obbediscano alle equazioni di moto classiche, si può dedurre direttamente dalle leggi quantistiche: ¹²⁰

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (9)$$

Ma la traiettoria, come abbiamo detto, può essere calcolata solo statisticamente a partire dalle condizioni iniziali, cosa che si può considerare come conseguenza dell'imprecisione di principio delle condizioni iniziali. Le leggi statistiche sono diverse in meccanica quantistica e in teoria classica; in certe condizioni ciò può condurre a grosse differenze macroscopiche tra teoria quantistica e teoria classica. Prima di discutere un esempio a questo proposito, vorrei mostrare con un altro sistema meccanico semplice, il moto libero di una massa puntiforme, come si debba formulare la transizione alla teoria classica discussa sopra. Le equazioni di moto (per un moto monodimensionale) risultano:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{m} \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = 0. \quad (10)$$

Siccome il tempo può essere trattato come un parametro (un "c-numero"), ¹²¹ se non intervengono forze esterne dipendenti dal tempo, la soluzione di queste equazioni è

$$\mathbf{q} = \frac{1}{m} \mathbf{p}_0 t + \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \quad (11)$$

¹²⁰ Come dice Dirac nell'introduzione del suo primo lavoro sulla meccanica quantistica (*The Fundamental Equations of Quantum Mechanics [Le equazioni fondamentali della meccanica quantistica]*, Proceedings of the Royal Society of London **A109** (1925) 642–653) la teoria matriciale di Heisenberg "suggerisce che non sono le equazioni della meccanica classica ad essere in qualche modo in difetto, ma sono le operazioni matematiche con cui si deducono i risultati fisici che richiedono una modifica". Che dalla (9) si possano dedurre le leggi classiche di moto in termini di valori medi di \mathbf{q} e \mathbf{p} , è l'enunciato del teorema di Paul Ehrenfest (1880–1933): *Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik [Un'osservazione sulla validità approssimata della meccanica classica all'interno della meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **45** (1927) 455–457.

¹²¹ Il fatto che le variabili usate in meccanica quantistica siano rappresentate da quantità matematiche che non soddisfano alla legge di commutabilità della moltiplicazione indica che non sono numeri nel senso usuale della matematica. Per distinguerli da questi "chiameremo q -numeri le variabili quantistiche e c -numeri i numeri nella matematica classica che soddisfano alla legge di commutabilità". Così dice P. A. M. Dirac: *Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom [Meccanica quantistica e un'indagine preliminare dell'atomo di idrogeno]*, Proceedings of the Royal Society of London **A110** (1926) 561–579.

dove \mathbf{p}_0 e \mathbf{q}_0 indicano impulso e posizione all'istante $t = 0$. All'istante $t = 0$ sia misurato il valore $q_0 = q'$ con precisione q_1 , $p_0 = p'$ con precisione p_1 [cfr. eq. (3) – (6)]. Per dedurre dai “valori” di \mathbf{p}_0 e \mathbf{q}_0 i “valori” di \mathbf{q} all'istante t , secondo Dirac e Jordan occorre trovare quella funzione di trasformazione che trasformi tutte le matrici, tra le quali \mathbf{q}_0 compare come matrice diagonale, in altre tali che tra di esse \mathbf{q} compaia come matrice diagonale. Nello schema matriciale, in cui \mathbf{q} compare come matrice diagonale, \mathbf{p}_0 può essere sostituito con $\hbar/(2\pi i)\partial/\partial q_0$. Secondo Dirac [l.c. eq. (11)] allora per l'ampiezza di trasformazione ricercata $S(q_0, q)$ vale l'equazione differenziale ¹²²

$$\left\{ \frac{t}{m} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_0} + q_0 \right\} S(q_0, q) = q S(q_0, q), \quad (12)$$

$$\frac{t}{m} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial S}{\partial q_0} = (q - q_0) S(q_0, q),$$

$$S(q_0, q) = \text{cost} \cdot \exp \left[\frac{2\pi i m \int (q - q_0) dq_0}{\hbar t} \right]. \quad (13)$$

$S\bar{S}$ è perciò indipendente da q_0 , cioè se all'istante $t = 0$ q_0 è nota esattamente, allora a qualunque istante $t > 0$ tutti i valori di q sono ugualmente probabili, cioè la probabilità che q giaccia in un intervallo finito è in generale nulla. Questo è intuitivo e senz'altro chiaro, in quanto l'esatta specificazione di q_0 porta a un rinculo per effetto Compton infinitamente grande. Naturalmente la stessa cosa vale per un qualsiasi sistema meccanico. Se però q_0 all'istante $t = 0$ fosse noto solo con la precisione q_1 e p_0 con la precisione p_1 [cfr. eq. (3)],

$$S(\eta, q_0) = \text{cost} \cdot \exp \left[-\frac{(q_0 - q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i}{\hbar} p'(q_0 - q') \right],$$

allora la funzione di probabilità per q sarebbe da calcolare con la formula:

$$S(\eta, q) = \int S(\eta, q_0) S(q_0, q) dq_0.$$

Essa fornisce

$$S(\eta, q) = \text{cost} \cdot \int \exp \left\{ \frac{2\pi i m}{\hbar t} \left[q_0 \left(q - \frac{t}{m} p' \right) - \frac{q_0^2}{2} \right] - \frac{(q' - q_0)^2}{2q_1^2} \right\} dq_0. \quad (14)$$

¹²² La (12) non è altro che l'equazione agli autovalori per l'operatore \mathbf{q} della (11). Il richiamo a Dirac riguarda l'eq. (11) del suo lavoro: *The Physical Interpretation of the Quantum Mechanics* [L'interpretazione fisica della meccanica quantistica], Proceedings of the Royal Society of London **A113** (1926) 621–641.

Introducendo l'abbreviazione

$$\beta = \frac{t\hbar}{2\pi m q_1^2}, \quad (15)$$

l'esponente nella (14) diventa

$$-\frac{1}{2q_1^2} \left\{ q_0^2 \left(1 + \frac{i}{\beta}\right) - 2q_0 \left(q' + \frac{i}{\beta} \left(q - \frac{t}{m} p' \right) \right) + q'^2 \right\}.$$

Il termine in q'^2 può essere inglobato nella costante (un fattore indipendente da q) e l'integrazione fornisce:

$$\begin{aligned} S(\eta, q) &= \text{cost} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2q_1^2} \frac{\left[q' + \frac{i}{\beta} \left(q - \frac{t}{m} p' \right) \right]^2}{1 + \frac{i}{\beta}} \right\} \\ &= \text{cost} \cdot \exp \left\{ -\frac{\left(q - \frac{t}{m} p' - i\beta q' \right)^2 \left(1 - \frac{i}{\beta} \right)}{2q_1^2 (1 + \beta^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Da ciò segue

$$S(\eta, q) \overline{S(\eta, q)} = \text{cost} \cdot \exp \left[\frac{-(q - \frac{t}{m} p' - q')^2}{q_1^2 (1 + \beta^2)} \right]. \quad (17)$$

L'elettrone dunque si trova all'istante t nel posto $(t/m)p' + q'$ con una precisione $q_1 \sqrt{1 + \beta^2}$. Il "pacchetto di onde" o meglio il "pacchetto di probabilità" si è allargato di un fattore $\sqrt{1 + \beta^2}$. Per la (15), β è proporzionale al tempo t , inversamente proporzionale alla massa – ciò è senza dubbio plausibile – e inversamente proporzionale a q_1^2 . Una precisione eccessiva in q_0 ha per conseguenza una grossa imprecisione in p_0 e perciò porta anche a una grossa imprecisione in q . Il parametro η , che avevamo introdotto sopra per ragioni formali, potrebbe essere eliminato in tutte le formule, in quanto non interviene nel calcolo. ¹²³

Come esempio, a proposito del fatto che le differenti leggi statistiche classiche e quantistiche in certe circostanze conducono a grosse differenze

¹²³ La dispersione del pacchetto durante l'evoluzione temporale e il riconoscimento che solo il pacchetto di onde gaussiano corrisponde alla relazione di indeterminazione (1), che rappresenta in realtà un limite inferiore, è opera di Earle Hesse Kennard (1885–1968): *Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen* [Meccanica quantistica di tipi semplici di moto], *Zeitschrift für Physik* **44** (1927) 326–352. La rivista riceve il lavoro di Kennard il 17 luglio 1926, quattro mesi dopo questo di Heisenberg: durante questi mesi il problema era stato ampiamente dibattuto a Copenhagen tra Bohr, Heisenberg e gli altri ricercatori, tra i quali c'era anche l'americano Kennard.

macroscopiche tra i risultati delle due teorie, si discuta brevemente la riflessione di un fascio di elettroni da parte di un reticolo. Se la costante reticolare è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda di de Broglie degli elettroni, allora la riflessione si verifica secondo determinate direzioni spaziali discrete come la riflessione della luce da parte di un reticolo. La teoria classica qui dà un risultato macroscopicamente del tutto diverso. Ciò nonostante non possiamo in alcun modo stabilire una contraddizione con la teoria classica esaminando la traiettoria di un singolo elettrone. Lo potremmo se potessimo guidare l'elettrone proprio a un punto determinato di un tratto del reticolo e stabilire allora che lì la riflessione segue leggi non classiche. Ma se vogliamo determinare la posizione dell'elettrone in modo così preciso da poter dire in quale punto ha colpito il tratto del reticolo, allora in seguito a questa determinazione di posizione l'elettrone acquista una grande velocità e la lunghezza d'onda di de Broglie dell'elettrone diventa così piccola che ora davvero in questa approssimazione la riflessione può seguire la direzione descritta classicamente e avvenire senza contraddire alle leggi quantistiche.

§ 4. Discussione di alcuni esperimenti concettuali particolari.

Secondo l'interpretazione intuitiva della meccanica quantistica che è stata qui tentata, gli istanti delle transizioni, dei "salti quantici", devono potersi accertare con misurazioni in modo altrettanto concreto, per esempio, delle energie degli stati stazionari. La precisione con cui un tale istante può essere determinato è fornita, secondo l'eq. (2), da $h/\Delta E$,^{† 124} dove ΔE indica la variazione d'energia nel salto quantico. Stiamo pensando per esempio all'esperimento seguente. Un atomo, all'istante $t = 0$ nello stato 2, compie una transizione allo stato fondamentale 1, emettendo radiazione. Allora si può assegnare all'atomo, analogamente all'eq. (7), l'autofunzione

$$S(t, p) = e^{-\alpha t} \psi(E_2, p) \exp\left(-\frac{2\pi i E_2 t}{h}\right) + \sqrt{1 - e^{-2\alpha t}} \psi(E_1, p) \exp\left(-\frac{2\pi i E_1 t}{h}\right), \quad (18)$$

se si assume che lo smorzamento per radiazione si espliciti in un fattore della forma $e^{-\alpha t}$ (la reale dipendenza non è forse così semplice¹²⁵). Se questo

[†] Cfr. W. Pauli, *l.c.* p. 12.

¹²⁴ Pauli considera il processo discontinuo dell'emissione e dell'assorbimento di luce da parte di un atomo. Ponendosi il problema dell'istante in cui avviene la variazione discontinua delle proprietà atomiche per effetto della transizione quantica, dice: "il limite di precisione della definibilità di questo istante è probabilmente dell'ordine di grandezza dato dal periodo della luce emessa nel processo in esame, ma non è noto nulla di più."

¹²⁵ Qui Heisenberg considera lo stato 2 come quello che oggi viene indicato come stato quasi-stazionario e nella sovrapposizione (18) lo fa intervenire con il peso $\exp(-\alpha t)$, che equivale a imporre allo stato 2 un'energia complessa $E_2 - i\alpha$. Il peso dello stato 1 è di conseguenza fissato dalla normalizzazione di $S(t, p)$.

atomo viene inviato attraverso un campo magnetico inomogeneo per misurarne l'energia, come si suole fare nell'esperimento di Stern-Gerlach, allora il campo inomogeneo deve accompagnare il raggio atomico per un lungo tratto di cammino. La corrispondente accelerazione viene misurata suddividendo l'intero tratto percorso dal raggio atomico nel campo magnetico in piccoli segmentini, ai cui estremi di volta in volta viene osservata la deviazione del raggio. A seconda della velocità del raggio atomico, alla suddivisione in segmentini corrisponde per l'atomo una suddivisione in piccoli intervalli temporali Δt . Secondo il §1, l'eq. (2) fa corrispondere all'intervallo Δt una precisione di energia $h/\Delta t$. La probabilità di misurare un particolare valore di energia E può essere dedotta direttamente da $S(p, E)$ e di conseguenza nell'intervallo da $n \Delta t$ a $(n + 1)\Delta t$ viene calcolata nel modo seguente:

$$S(p, E) = \int_{n \Delta t}^{(n+1)\Delta t} S(p, t) \exp\left(\frac{2\pi i E t}{h}\right) dt.$$

Se all'istante $(n + 1)\Delta t$ viene accertato lo "stato 2", allora per tutti gli istanti successivi non si può più assegnare all'atomo l'autofunzione (18), ma piuttosto quella che si ricava dalla (18), sostituendo t con $t - (n + 1)\Delta t$. Se invece si accerta lo "stato 1", allora da quell'istante occorre assegnare all'atomo l'autofunzione

$$\psi(E_1, p) \exp\left(-\frac{2\pi i E_1 t}{h}\right).$$

Allora in una serie di intervalli Δt viene osservato dapprima lo "stato 2" e poi di continuo lo "stato 1". Affinché sia ancora possibile distinguere i due stati, Δt non può essere compresso al disotto di $h/\Delta E$. Perciò questa è la precisione con cui si può determinare l'istante della transizione. Quando parliamo di variazione discontinua di energia, abbiamo in mente un esperimento del tipo descritto, totalmente nel senso della vecchia interpretazione della teoria dei quanti fondata da Planck, Einstein e Bohr. Siccome un tale esperimento è in linea di principio eseguibile, deve essere possibile un accordo sul suo esito.

Nei postulati fondamentali della teoria dei quanti di Bohr, l'energia di un atomo, così come i valori delle variabili d'azione J , ha il pregio, rispetto ad altri elementi di specificazione (posizione dell'elettrone, ecc.), che il suo valore numerico le può essere sempre assegnato. Questa posizione di privilegio rispetto alle altre grandezze quantistiche posseduta dall'energia è dovuta al fatto che in un sistema chiuso essa rappresenta un integrale delle equazioni di moto (per la matrice energia vale $\mathbf{E} = \text{cost.}$); per sistemi non chiusi invece l'energia non si distingue da alcuna altra grandezza quantistica. In particolare ci possono essere esperimenti in cui le fasi w dell'atomo siano esattamente misurabili e nei quali invece l'energia rimane indeterminata in linea di principio, corrispondentemente alla relazione $\mathbf{Jw} - \mathbf{wJ} = h/2\pi i$ ossia $J_1 w_1 \sim h$. Un tale

esperimento è rappresentato per esempio dalla fluorescenza risonante.¹²⁶ Se si irraggia un atomo con un'autofrequenza, diciamo $\nu_{12} = (E_2 - E_1)/h$, allora l'atomo vibra in fase con la radiazione esterna, mentre in linea di principio non ha alcun senso chiedersi in quale stato, E_1 oppure E_2 , l'atomo vibri in tale modo. La relazione di fase tra atomo e radiazione esterna può essere stabilita per esempio con la relazione di fase di molti atomi tra di loro (esperimento di Wood¹²⁷). Se si preferisce rinunciare a esperimenti con la radiazione, si possono allora misurare le relazioni di fase in modo tale da ipotizzare una precisa determinazione della posizione dell'elettrone nel senso del §1, a tempi diversi relativamente alla fase della luce incidente (su molti atomi). Al singolo atomo può venire assegnata la "funzione d'onda"

$$S(q, t) = c_2 \psi_2(E_2, q) \exp\left(-\frac{2\pi i(E_2 t + \beta)}{h}\right) + \sqrt{1 - c_2^2} \psi_1(E_1, q) \exp\left(-\frac{2\pi i E_1 t}{h}\right); \quad (19)$$

qui c_2 dipende dall'intensità e β dalla fase della luce incidente. La probabilità di una certa posizione q è dunque

$$S(q, t) \overline{S(q, t)} = c_2^2 \psi_2 \overline{\psi_2} + (1 - c_2^2) \psi_1 \overline{\psi_1} + c_2 \sqrt{1 - c_2^2} \left[\psi_2 \overline{\psi_1} \exp\left(-\frac{2\pi i}{h} [(E_2 - E_1)t + \beta]\right) + \overline{\psi_2} \psi_1 \exp\left(+\frac{2\pi i}{h} [(E_2 - E_1)t + \beta]\right) \right]. \quad (20)$$

Il termine periodico nella (20) è sperimentalmente separabile da quello non periodico, in quanto le determinazioni di posizione possono essere eseguite con diverse fasi della luce incidente.

¹²⁶ Tutta la discussione che segue sulla fluorescenza risonante non piacque a Bohr che poté leggere il manoscritto solo dopo la spedizione alla rivista (cfr. l'aggiunta alla fine del lavoro, fatta durante la correzione delle bozze). Le difficoltà riguardano il significato da dare alla regola di commutazione tra \mathbf{J} e \mathbf{w} ; cfr. §4 di questo Quaderno.

¹²⁷ Stimolando atomi di mercurio e di sodio con radiazione incidente polarizzata linearmente Robert Williams Wood (1868–1955) con Alexander Ellett aveva osservato una forte polarizzazione della luce emessa, prodotta in presenza di deboli campi magnetici. L'effetto era stato spiegato da Wilhelm Hanle (1901–1993), uno studente di dottorato di James Franck a Göttingen, invocando l'emissione sovrapposta di più atomi in fase.

R. W. Wood e A. Ellett: *On the influence of magnetic fields in the polarization of resonance radiation* [Influenza dei campi magnetici sulla polarizzazione della radiazione risonante], Proceedings of the Royal Society of London **A103** (1923) 396–403; *Polarized resonance radiation in weak magnetic fields* [Radiazione risonante polarizzata in campi magnetici deboli], Physical Review **24** (1924) 243–254.

W. Hanle: *Über magnetische Beeinflussung der Polarisation der Resonanzfluoreszenz* [Influsso magnetico sulla polarizzazione della fluorescenza risonante], Zeitschrift für Physik **30** (1924) 93–105.

In un noto esperimento concettuale proposto da Bohr, gli atomi di un raggio alla Stern-Gerlach vengono in primo luogo eccitati, con irraggiamento di luce, alla fluorescenza di risonanza in un certo punto. Dopo un tratto di cammino essi attraversano un campo magnetico inhomogeneo; la radiazione emessa dagli atomi può essere osservata durante l'intero cammino, prima e dopo il campo magnetico. Prima che gli atomi si vengano a trovare nel campo magnetico, si verifica l'usuale fluorescenza risonante, cioè, analogamente alla teoria della dispersione, si deve assumere che tutti gli atomi emettano onde sferiche in fase con la luce incidente. Quest'ultima interpretazione è prima di tutto in contrasto con quanto risulta da una grossolana applicazione della teoria dei quanti di luce o delle regole fondamentali quantistiche. Infatti da queste si dovrebbe dedurre che solo pochi atomi vengono eccitati nello "stato superiore" per assorbimento di un quanto di luce, e quindi la radiazione risonante nel suo complesso proverrebbe da pochi centri eccitati che irraggiano con intensità. Perciò prima era naturale dire: qui si deve ricorrere all'interpretazione in termini di quanti di luce solo per il bilancio energia-impulso, mentre "in realtà" tutti gli atomi nello stato inferiore irraggiano onde sferiche coerenti e di debole intensità. Ma dopo che gli atomi hanno oltrepassato il campo magnetico, non c'è alcun dubbio che il raggio di atomi si è diviso in due raggi, di cui uno corrisponde agli atomi che si trovano nello stato superiore e l'altro agli atomi nello stato inferiore. Se ora gli atomi nello stato inferiore irraggiassero, si verificherebbe una grossolana violazione della legge di conservazione dell'energia poiché l'intera energia di eccitazione è finita nel raggio di atomi che si trovano nello stato superiore. Anzi, ancor meno dubbi ci possono essere sul fatto che dopo il campo magnetico solo il raggio di atomi nello stato superiore manda luce – e precisamente luce incoerente – ai pochi atomi nello stato superiore che irraggiano con grande intensità. Come ha mostrato Bohr, questo esperimento concettuale chiarisce in modo particolare quale attenzione talvolta sia necessaria nell'uso del concetto di "stato stazionario". Sulla base dell'interpretazione della teoria quantistica qui sviluppata si può fare senza difficoltà una discussione dell'esperimento di Bohr. Nel campo di radiazione esterno le fasi dell'atomo sono determinate, per cui non ha alcun senso parlare di energia dell'atomo. Anche dopo che l'atomo ha lasciato il campo di radiazione, non si può dire che si trovava in un certo stato stazionario, almeno finché ci si interroga riguardo alle proprietà di coerenza della radiazione. Si possono fare però esperimenti per verificare in quale stato si trovi l'atomo; il risultato di questi esperimenti può essere fornito solo in modo statistico. Un tale esperimento viene condotto in realtà mediante il campo magnetico inhomogeneo. Al di là del campo magnetico le *energie* degli atomi sono determinate e quindi le fasi sono indeterminate. Qui la radiazione risulta incoerente ed emessa solo dagli atomi nello stato *superiore*. Il campo magnetico determina le energie e quindi distrugge la relazione di fase. L'esperimento concettuale di Bohr è una spiegazione molto bella del fatto che anche l'energia dell'atomo

“in realtà” non è affatto un numero, ma una matrice. La legge di conservazione vale per la matrice energia e quindi anche per il valore dell’energia, col grado di precisione con cui di volta in volta viene misurato. Da un punto di vista calcolativo l’eliminazione della relazione di fase può essere vista press’a poco così: siano Q le coordinate del baricentro dell’atomo, per cui invece della (19) si assegni all’atomo l’autofunzione

$$S(Q, t)S(q, t) = S(Q, q, t), \quad (21)$$

dove $S(Q, t)$ è una funzione che [come $S(\eta, q)$ nella (16)] è diversa da zero solo in una piccola regione intorno al punto nello spazio- Q e che procede nella direzione della radiazione con la velocità degli atomi. La probabilità di un’ampiezza relativa q per un qualunque valore Q è data dall’integrale di

$$S(Q, q, t)S(Q, q, t) \text{ su } Q, \quad \text{cioè dalla (20).}$$

L’autofunzione (21) però nel campo magnetico si modificherà in modo calcolabile e, a causa delle varie deviazioni degli atomi che si trovano nello stato superiore e nello stato inferiore, dopo il campo magnetico si sarà trasformata nella

$$S(Q, q, t) = c_2 S_2(Q, t) \psi_2(E_2, q) \exp\left(\frac{2\pi i(E_2 t + \beta)}{h}\right) + \sqrt{1 - c_2^2} S_1(Q, t) \psi_1(E_1, q) \exp\left(\frac{2\pi i E_1 t}{h}\right). \quad (22)$$

$S_1(Q, t)$ e $S_2(Q, t)$ saranno funzioni dello spazio- Q e sono diverse da zero solo in una piccola regione intorno a un punto; ma questo punto per S_1 è diverso da quello per S_2 . $S_1 S_2$ è perciò ovunque nullo. La probabilità di un’ampiezza relativa q e di una posizione determinata Q è quindi

$$S(Q, q, t) \overline{S}(Q, q, t) = c_2^2 S_2 \overline{S_2} \psi_2 \overline{\psi_2} + (1 - c_2^2) S_1 \overline{S_1} \psi_1 \overline{\psi_1}. \quad (23)$$

Il termine periodico della (20) è scomparso e con lui la possibilità di misurare la relazione di fase. Il risultato della determinazione statistica della posizione sarà sempre lo stesso indipendentemente dalla fase della luce incidente nella quale sia stata eseguita. Possiamo ammettere che esperimenti con radiazione, la cui teoria non è stata ancora sviluppata, daranno gli stessi risultati riguardo alle relazioni di fase degli atomi sottoposti a luce incidente.

Infine si studi ancora il rapporto dell’equazione (2), $E_1 t_1 \sim h$, con un complesso di problemi, che Ehrenfest [†] ¹²⁸ e altri ricercatori hanno discusso in due lavori importanti sulla base del principio di corrispondenza di

[†] P. Ehrenfest e G. Breit, ZS. f. Phys. **9**, 207, 1922; e P. Ehrenfest e R. C. Tolman, Phys. Rev. **24**, 287, 1924; vedi anche la discussione in N. Bohr, *Grundpostulate der Quantentheorie [Postulati fondamentali della teoria dei quanti]*, l.c.

¹²⁸ P. Ehrenfest e Gregory Breit (1899–1981): *Ein bemerkenswerter Fall von Quantisierung [Un caso notevole di quantizzazione]*, Zeitschrift für Physik **9** (1922) 207–210. P. Ehrenfest e Richard Chace Tolman (1881–1948): *Weak Quantization [Quantizzazione debole]*, Physical Review **24** (1924) 287–295.

Bohr. # Ehrenfest e Tolman parlano di “quantizzazione debole”, quando un moto periodico quantizzato viene interrotto, per un salto quantico o per un’altra perturbazione, in intervalli di tempo che non possono essere considerati troppo lunghi in confronto al periodo del sistema. In questo caso dovrebbero comparire non solo i valori esatti quantistici di energia, ma anche, con una minore probabilità precisabile a priori solo qualitativamente, valori di energia che non si discostano molto dai valori quantistici. In meccanica quantistica questo comportamento si deve interpretare nel modo seguente. Siccome realmente l’energia viene modificata da perturbazioni esterne o da salti quantici, allora ogni misurazione d’energia, perché sia univoca, deve avvenire nell’intervallo di tempo compreso tra due perturbazioni. Con ciò viene assegnato un limite superiore per t_1 nel senso del §1. Quindi misuriamo il valore di energia E_0 di uno stato quantizzato esclusivamente con una precisione $E_1 \sim h/t_1$. A questo proposito non ha alcun senso in linea di principio chiedersi se il sistema assume “realmente” tali autovalori di energia E che differiscono di poco da E_0 , con un peso statistico corrispondentemente piccolo, oppure se la loro determinazione sperimentale sia dovuta all’imprecisione della misurazione. Se t_1 è più piccolo del periodo del sistema, non ha più senso parlare di stati stazionari discreti o di autovalori di energia discreti.

Ehrenfest e Breit (*l.c.*) in un analogo contesto mettono in guardia dal seguente paradosso. Un rotatore, che vogliamo pensare press’a poco come una ruota dentata, sia provvisto di un dispositivo che dopo f rivoluzioni della ruota ne inverte esattamente il senso di rotazione. La ruota dentata faccia presa su un’asta dentata, che a sua volta sia regolabile linearmente tra due ceppi; dopo un certo numero di giri i ceppi costringono l’asta, e con essa la ruota, a invertire il senso di rotazione. Il vero periodo T del sistema è grande rispetto al periodo di rotazione t della ruota; corrispondentemente i livelli energetici discreti sono fitti e anzi tanto più fitti, quanto maggiore è T . Siccome dal punto di vista della conseguente teoria quantistica tutti gli stati stazionari hanno un uguale peso statistico, per T sufficientemente grande in pratica tutti gli autovalori di energia compariranno con uguale frequenza – in contrasto con quanto ci si aspetterebbe nel caso del rotatore. Dal nostro punto di vista questo paradosso viene inizialmente esaltato ancora di più. Infatti per decidere se il sistema assumerà esclusivamente gli autovalori di energia discreti che appartengono a un rotatore o li assumerà in modo molto frequente, oppure se prenderà con uguale probabilità tutti i valori possibili (cioè valori che corrispondono ai piccoli intervalli di energia h/T), basta un tempo t_1 , piccolo rispetto a T (ma $\gg t$); cioè, sebbene per tali misure non entri affatto in gioco, il grande periodo si rende tuttavia manifesto per il fatto che possono intervenire tutti i possibili valori di energia. Noi siamo del parere che tali esperimenti per la determinazione dell’energia globale del

Su questo rapporto ha richiamato la mia attenzione W. Pauli.

sistema fornirebbero *davvero* anche *tutti* i possibili valori di energia con uguale probabilità; e di questo risultato è responsabile proprio non il grande periodo, bensì l'asta regolabile linearmente. Anche quando si trovi in uno stato di energia corrispondente alla quantizzazione del rotatore, mediante forze esterne agenti sull'asta il sistema può essere facilmente trasferito in uno stato che non corrisponde a quelli del rotatore quantizzato. † Il sistema accoppiato rotatore–asta mostra appunto proprietà di periodicità completamente diverse da quelle del rotatore. La soluzione del paradosso sta piuttosto nel fatto seguente: quando vogliamo misurare l'energia del solo rotatore dobbiamo innanzi tutto disaccoppiare il rotatore dall'asta. Nella teoria classica, con una massa dell'asta sufficientemente piccola, il disaccoppiamento potrebbe avvenire senza variazione di energia e quindi l'energia dell'intero sistema potrebbe essere posta uguale a quella del rotatore (con una piccola massa dell'asta). In meccanica quantistica, l'energia d'interazione tra l'asta e la ruota è almeno dello stesso ordine di grandezza dei salti energetici del rotatore (anche per una piccola massa dell'asta rimane un'elevata energia di punto zero per l'interazione elastica tra ruota e asta!); col disaccoppiamento, si vengono a stabilire separatamente i valori quantistici di energia dell'asta e della ruota. Quand'anche dunque potessimo misurare i valori di energia del rotatore da soli, troveremmo sempre i valori quantistici di energia con la precisione data dall'esperimento. Ma anche con una massa dell'asta tendente a zero l'energia del sistema accoppiato è diversa da quella del rotatore; l'energia del sistema accoppiato può assumere con uguale probabilità tutti i valori possibili (permessi dalla quantizzazione di T).

La cinematica e la meccanica della teoria quantistica sono ampiamente diverse da quelle usuali. L'applicabilità dei concetti classici di cinematica e meccanica non può essere però dedotta né dalla nostra logica né dall'esperienza; a questa conclusione siamo autorizzati dalla relazione (1), $p_1 q_1 \sim h$. Siccome impulso, posizione, energia ecc. dell'elettrone sono concetti esattamente definiti, non ci si deve sorprendere che l'equazione fondamentale (1) contenga solo un enunciato qualitativo. Dato che inoltre possiamo pensare in modo qualitativo alle conseguenze sperimentali della teoria in tutti i casi semplici, non si deve più considerare la meccanica quantistica come una teoria non in-

† Secondo Ehrenfest e Breit ciò non può avvenire mai, o solo molto raramente, a causa di forze agenti sulla ruota.

tuitiva e astratta. # ¹²⁹ Certamente, se lo si concede, si potrebbero dedurre anche le leggi quantitative della meccanica quantistica direttamente dai fondamenti intuitivi, cioè in sostanza dalla relazione (1). Perciò Jordan ha cercato di interpretare l'equazione

$$S(q, q'') = \int S(q, q')S(q' q'')dq'$$

come una relazione di probabilità. Non possiamo però concordare con questa interpretazione (§2). Piuttosto crediamo che le leggi quantitative, dedotte sulla base di fondamenti intuitivi, per il momento possono essere comprese solo secondo il principio della massima semplicità possibile. Se per esempio la coordinata x dell'elettrone non è più un "numero", come si deve concludere sperimentalmente dall'equazione (1), allora si può pensare l'ipotesi più semplice [che non è in contraddizione con la (1)], che questa coordinata x sia un elemento diagonale di una matrice, i cui termini non diagonali si manifestano altrimenti in una imprecisione quando si eseguano delle trasformazioni (cfr. p. es. §4). La dichiarazione che per esempio la velocità nella direzione x "in realtà" non sia un numero, ma un elemento diagonale di una matrice, non è forse più astratta e meno intuitiva dell'affermazione che l'intensità del campo elettrico "in realtà" sia la parte temporale di un tensore antisimmetrico dello spazio-tempo. Qui l'espressione "in realtà" risulterà legittima, né più né meno che in una qualsiasi descrizione matematica dei processi naturali. Non appena si ammette che tutte le grandezze della teoria quantistica siano "in realtà" delle matrici, le leggi quantitative seguono senza difficoltà. ¹³⁰

Se si accetta che l'interpretazione della meccanica quantistica qui tentata sia corretta già nei suoi punti essenziali, allora dovrebbe essere permesso di affrontare in poche parole le conseguenze di principio. Noi non abbiamo ipotizzato che la teoria quantistica, in contrasto con quella classica, sia essenzialmente una teoria statistica, nel senso che dai dati forniti in modo esatto si possano trarre solo conclusioni statistiche. Contro tale ipotesi si pronuncia

Schrödinger designa la meccanica quantistica come una teoria formale di una non intuitività e astrattezza scoraggiante e ripugnante. Sicuramente non si potrà mai apprezzare abbastanza il valore della penetrazione matematica (e *per questo* intuitivo) delle leggi quantistiche prodotta dalla teoria di Schrödinger. Però, a mio parere, nelle questioni fisiche, di principio, l'intuitività popolare della meccanica ondulatoria ha fatto deviare dalla diritta via, indicata dai lavori di Einstein e de Broglie da un lato e dai lavori di Bohr e dalla meccanica quantistica dall'altro.

¹²⁹ Heisenberg cita testualmente la reazione alla meccanica delle matrici, che Schrödinger aveva già espressa nella nota 2 a pagina 735 del lavoro in cui dimostra l'equivalenza tra il suo approccio ondulatorio e quello di Heisenberg, Born e Jordan.

E. Schrödinger: *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen* [Relazione tra la meccanica quantistica di Heisenberg-Born-Jordan e la mia], *Annalen der Physik* **79** (1926) 734–756.

¹³⁰ Il vero contenuto matematico della relazione (1) è l'impossibilità di diagonalizzare simultaneamente, cioè sulla stessa base, le matrici che rappresentano la posizione e l'impulso.

per esempio anche il famoso esperimento di Geiger e Bothe.¹³¹ Piuttosto, in tutti i casi in cui nella teoria classica esistono relazioni tra grandezze che sono realmente misurabili in modo esatto, anche in teoria quantistica valgono le corrispondenti relazioni esatte (leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia). Ma nella formulazione netta del principio di causalità: “se conosciamo in modo preciso il presente, possiamo prevedere il futuro”, non è falsa la conclusione, bensì la premessa. In linea di principio noi *non possiamo* conoscere il presente in tutti i suoi dettagli. Perciò ogni osservazione è una scelta all'interno di una totalità di possibilità, e una limitazione di possibilità future. Dato che ora il carattere statistico della teoria quantistica è così strettamente collegato con l'imprecisione di tutte le osservazioni, si potrebbe essere indotti a supporre che dietro al mondo statistico percepito si nasconda un mondo “reale” in cui valga il principio di causalità. Ma tali speculazioni, lo sottolineiamo esplicitamente, ci sembrano senza frutto e prive di senso.¹³² La fisica deve descrivere formalmente solo la connessione delle osservazioni. Anzi, si può caratterizzare molto meglio il vero stato delle cose in questo modo: siccome tutti gli esperimenti sono soggetti alle leggi della meccanica quantistica e quindi all'equazione (1), mediante la meccanica quantistica viene stabilita definitivamente la non validità del principio di causalità.

Aggiunta durante la correzione delle bozze. Dopo il completamento del presente lavoro nuove ricerche di Bohr hanno condotto a un punto di vista che permette un sostanziale approfondimento e raffinamento dell'analisi delle connessioni quantistiche tentata in questo lavoro. In questo contesto Bohr ha attirato la mia attenzione sul fatto che avrei trascurato punti essenziali in alcune discussioni di questo lavoro. Soprattutto, l'incertezza dell'osservazione non si basa unicamente sulla presenza di discontinuità, ma è piuttosto direttamente collegata con l'esigenza di rendere conto simultaneamente delle diverse esperienze che trovano espressione da un lato nella teoria corpuscolare e dall'altro

¹³¹ Hans Wilhelm Geiger (1882–1945) aveva inventato un dispositivo sensibile alle particelle ionizzanti, oggi noto come contatore Geiger, che registra la scarica elettrica provocata dal passaggio della particella carica: *Über eine einfache Methode zur Zählung von α - und β -Strahlen* [Un metodo semplice di conteggio di raggi α e β], *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **15** (1913) 534–539. Utilizzando due di questi contatori, Walther Wilhelm Georg Bothe (1891–1957) insieme con Geiger riuscì a rivelare in coincidenza l'elettrone e il raggio X diffuso nell'effetto Compton, smentendo la teoria statistica di Bohr, Kramers e Slater con qualche mese di anticipo rispetto all'esperimento più completo di Compton e Simon con la camera di Wilson. Per l'invenzione del metodo di rivelazione in coincidenza Bothe sarà premiato nel 1954 col premio Nobel per la Fisica: curiosamente quell'anno si provvide a riparare tardivamente anche a un'altra “svista” del comitato della Fondazione Nobel, dividendo il premio tra Walther Bothe e Max Born. W. Bothe e H. Geiger: *Experimentelles zur Theorie von Bohr, Kramers und Slater* [Aspetti sperimentali riguardanti la teoria di Bohr, Kramers e Slater], *Die Naturwissenschaften* **13** (1925) 440–441.

¹³² È una netta presa di posizione contro l'emergente tentativo di interpretazione realistica da parte di de Broglie: cfr. discussione nel *Quaderno Onde di materia e onde di probabilità*.

nella teoria ondulatoria. ¹³³ Ad esempio, nell'utilizzo di un microscopio ideale a raggi γ occorre tenere presente la necessaria divergenza dei fasci dei raggi; questa ha inanzi tutto la conseguenza che, nell'osservazione della posizione dell'elettrone, la direzione del rinculo Compton è nota solo con un'imprecisione che porta alla relazione (1). Inoltre non viene abbastanza sottolineato il fatto che la semplice teoria dell'effetto Compton è strettamente applicabile solo a elettroni liberi. ¹³⁴ La conseguente cautela nell'uso della relazione di indeterminazione, come è stato chiarito dal prof. Bohr, è essenziale tra l'altro per una discussione di tutti gli aspetti che intervengono nella transizione dalla micro alla macrofisica. Infine le osservazioni sulla fluorescenza di risonanza non sono del tutto corrette, perché il legame tra la fase della luce e quella del moto dell'elettrone non è così semplice come è stato assunto. Perciò, per il fatto che ho potuto conoscere e discutere nel loro sviluppo le nuove succitate ricerche di Bohr, che presto appariranno in un lavoro sull'assetto concettuale della teoria quantistica, mi sento obbligato a un cordiale ringraziamento al prof. Bohr.

Copenhagen, Istituto di Fisica Teorica dell'Università.

¹³³ È l'idea di complementarità che Bohr andava sviluppando e che illustrerà al congresso di Como in settembre e alla Conferenza Solvay in ottobre. L'obiezione di Bohr riguarda il fatto che la variazione di impulso, introdotta dall'osservazione col microscopio per misurare la posizione dell'elettrone, anche se è in linea di principio misurabile con un altro strumento, non può essere però misurata nello stesso esperimento: è proprio la conoscenza *simultanea* di posizione e impulso che risulta inammissibile in meccanica quantistica e che dà origine alla relazione (1).

¹³⁴ Per un elettrone libero, impulso $m\dot{q}$ e momento canonico p si identificano: una misurazione della velocità permette di conoscere p con l'indeterminazione soggetta alla (1).

§ 4. Alcune osservazioni e commenti

Quando si affrontano problemi interpretativi in meccanica quantistica occorre tenere presente che, più di ogni altra teoria fisica precedente, la meccanica quantistica non ha lo scopo di descrivere il sistema in sé, ma piuttosto cerca di inserire in uno schema coerente i risultati delle nostre osservazioni. E per osservare un sistema occorre entrare in interazione con esso mediante lo strumento che misura i valori delle grandezze che lo caratterizzano. Perciò diventa importante valutare l'entità della perturbazione introdotta dall'osservatore sul sistema: se la perturbazione è trascurabile, siamo nella situazione consueta della meccanica classica, in cui il processo di misurazione arricchisce la conoscenza che si ha del sistema e migliora la definizione del complesso di parametri (per esempio posizioni e velocità delle particelle) che intervengono nelle equazioni del moto nel determinare in modo causale l'evoluzione futura. Ma su un sistema "piccolo" la perturbazione associata a uno strumento di misura macroscopico può risultare determinante nel processo di formazione del fenomeno osservato: anche se in linea di principio si può sempre immaginare di diminuire l'effetto della perturbazione, questo non è mai rigorosamente nullo. Le esperienze eseguite per determinare una grandezza fisica rendono allora illusoria la conoscenza di altre grandezze acquisita precedentemente, perché le alterazioni introdotte dall'osservazione sono incontrollabili. Quindi "dobbiamo supporre che esista un limite al grado di finezza dei nostri mezzi di osservazione, e di conseguenza un estremo inferiore per l'entità della perturbazione che accompagna l'osservazione stessa, limite che è inerente alla natura stessa delle cose e che non può essere superato mediante tecniche migliori o maggiore perizia da parte dell'osservatore".¹³⁵ Nella teoria, Heisenberg ha mostrato che questa limitazione di principio è collegata al valore minimo dell'azione, cioè al valore della costante di Planck h .

Perciò il principio di indeterminazione risulta legato alla stessa costante universale che caratterizza i fenomeni quantistici. Averlo individuato significa aver messo in evidenza il punto centrale di tutta la teoria: non a caso il riconoscimento del principio di indeterminazione avviene solo dopo che il formalismo era stato ben sviluppato e ne erano emerse le difficoltà di interpretazione. Tuttavia, le relazioni scoperte da Heisenberg, pur potendosi derivare dal formalismo stesso, sono state ricavate mediante una revisione critica dei concetti fondamentali di posizione, velocità, traiettoria, alla luce della sola ipotesi che una misurazione di posizione e di velocità implica metodi sperimentali nei quali il ruolo corpuscolare e ondulatorio della materia entra in modo essenziale. Le relazioni di indeterminazione sono dunque una necessità per una corretta descrizione dei fenomeni su scala microscopica: esse riassumono

¹³⁵ P. A. M. Dirac: *I principi della meccanica quantistica*, Boringhieri, Torino, 1959, p. 5 [traduzione italiana di Pier Luigi Casalini e Vittorio Silvestrini della quarta edizione inglese di *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford at the Clarendon Press, 1958].

in sé tutti gli aspetti che appaiono paradossali a chi osserva i fenomeni con l'occhio della fisica classica, ma allo stesso tempo rappresentano il principio fondamentale, cui deve ispirarsi la teoria per la loro descrizione.

Fintanto che l'indagine sperimentale non è in grado di apprezzare valori d'azione confrontabili con $\hbar \sim 10^{-27}$ erg s, ¹³⁶ l'efficacia delle relazioni di indeterminazione è nulla. Però si può ipotizzare una Landa dei Quanti, uno strano paese dove $\hbar = 10^4$ erg s e crescono angurie dalla buccia molto resistente e del diametro di circa 20 cm, con semi di massa pari a circa 0.1 g. Che cosa succede al taglio dell'anguria? ¹³⁷

A causa della relazione di indeterminazione che lega posizione e quantità di moto, i semi, localizzati all'interno dell'anguria con un'incertezza sulla posizione pari al suo diametro, non sono in quiete; al taglio dell'anguria sparano via alla velocità media di 100 m s^{-1} ! Ma ben altri problemi sorgono se si pretende di osservare il taglio con luce "visibile" ($\lambda = 628 \text{ nm}$): i corrispondenti fotoni, di energia 3×10^{19} erg, provocherebbero un rinculo dell'anguria a 5 km s^{-1} ... e qualche problema per l'occhio dell'osservatore! ¹³⁸

Secondo Popper, ¹³⁹ le relazioni di indeterminazione ci informano semplicemente sulla "dispersione" delle particelle fisiche, come i fotoni o gli elettroni, dopo che per esempio hanno attraversato una fenditura. Esse non hanno alcun significato speciale per la teoria della conoscenza, ma stabiliscono esclusivamente il limite inferiore della dispersione: se si prepara un esperimento in modo che tutte le particelle siano selezionate con una posizione compresa tra q e $q + \Delta q$, allora i loro impulsi sono distribuiti entro una dispersione statistica $\Delta p \sim \hbar/\Delta q$. Ma le particelle di per sé posseggono una precisa posizione e, allo stesso tempo, un preciso impulso.

Il fatto è che per poterlo sapere occorre intervenire con una osservazione e se si misura l'impulso, si perde memoria della posizione e viceversa. Allora l'affermazione realistica sullo stato delle particelle rimane priva di riscontro sperimentale e quindi insignificante dal punto di vista della conoscenza.

Invece occorre sottolineare, alla luce del principio di complementarità enunciato da Bohr, che l'osservazione della posizione coinvolge un tipo di esperimento assai diverso da quello necessario per osservare l'impulso: il

¹³⁶ La costante di Planck vale $h = 6.6260693(11) \times 10^{-27}$ erg s, ma la pigrizia dei fisici fa preferire l'uso di $\hbar = 1.05457168(18) \times 10^{-27}$ erg s per evitare di scrivere sempre $h/2\pi$.

¹³⁷ Così propone nel suo recentissimo testo di meccanica quantistica Walter Greiner: *Quantum Mechanics. An Introduction*, Springer Verlag, Berlino, 1989, p. 49.

¹³⁸ La situazione è paradossale perché non si considerano le modifiche sull'evoluzione dell'universo introdotte dall'alterazione di una costante fisica: è chiaro che nella Landa dei Quanti anche gli esseri coscienti devono risultare diversi da quelli della Terra. Ma questo problema coinvolgerebbe il principio antropico e ci porterebbe lontani dal principio di indeterminazione. A chi desiderasse comunque avventurarsi in questo tipo di speculazione si consiglia la lettura del testo di John D. Barrow e Frank J. Tipler: *The Cosmological Anthropic Principle*, Oxford at the Clarendon Press, 1986.

¹³⁹ K. R. Popper, *l.c.*

microscopio che determina la posizione dell'elettrone fa perdere memoria del suo impulso a causa dell'effetto Compton, così come una misurazione dell'impulso con le onde che subiscono l'effetto Doppler necessariamente fa perdere informazioni sulla posizione. Le due variabili dinamiche posizione e impulso necessitano di esperimenti complementari che escludono l'uno il risultato ottenibile con l'altro.

Non è un caso che gli operatori quantistici associati alla posizione e all'impulso siano operatori autoaggiunti con un commutatore non nullo. Il legame tra principio di indeterminazione e regole di commutazione tra operatori è già evidente nel lavoro di Heisenberg, ma la sua precisa definizione avviene solo quasi due anni dopo.¹⁴⁰

Per un sistema che si trovi nello stato (normalizzato) Ψ si definisca *valor medio* $\langle A \rangle$ di un operatore autoaggiunto A la quantità:

$$\langle A \rangle = \int \Psi^* A \Psi d\tau, \quad (4.1)$$

dove l'integrale va esteso all'intero spazio delle coordinate. In accordo con la teoria classica degli errori, che identifica l'errore statistico con la deviazione standard, si può definire l'indeterminazione ΔA del valore di A , ricorrendo allo scarto quadratico medio da $\langle A \rangle$:¹⁴¹

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 &= \int \Psi^* (A - \langle A \rangle)^2 \Psi d\tau \\ &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dati allora due operatori autoaggiunti A , B , il cui commutatore non si annulla:

$$AB - BA = i \hbar C, \quad (4.3)$$

Robertson dimostra che vale la seguente relazione di indeterminazione:¹⁴²

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} \hbar |\langle C \rangle|, \quad (4.4)$$

¹⁴⁰ H. P. Robertson: *The Uncertainty Principle [Il principio di indeterminazione]*, Physical Review **34** (1929) 163–164. L'americano Howard Percy Robertson (1903–1961) lavorò a Monaco e a Göttingen tra il 1925 e il 1928, a contatto quindi con i creatori della meccanica quantistica. In questo lavoro riprende e risolve il problema sollevato da Edward Uhler Condon (1902–1974), che pure frequentò le stesse Università in quegli anni. Secondo Condon non sempre si verifica l'impossibilità di misurare con estrema precisione due osservabili associate a operatori non commutanti.

E. U. Condon: *Remarks on uncertainty relations [Osservazioni sulle relazioni di indeterminazione]*, Science **69** (1929) 573-574.

In inglese ancora oggi si usa il vocabolo *uncertainty = incertezza*, che sembra esprimere un giudizio sul risultato dell'osservazione, piuttosto che l'apertura di un ventaglio di possibili risultati all'interno di un limite di principio, stabilito dalle relazioni di indeterminazione.

¹⁴¹ Tuttavia, ora la distribuzione di probabilità non è in generale una gaussiana: in qualche caso lo scarto quadratico medio può divergere anche per distribuzioni di probabilità concentrate.

¹⁴² Anche l'operatore C è autoaggiunto.

cioè il prodotto delle indeterminazioni di A e B non è inferiore a metà del modulo del valor medio del loro commutatore moltiplicato per \hbar .¹⁴³

La deduzione di Robertson permette di chiarire perché, anche quando A e B non commutano, può succedere eccezionalmente che A e B si possano misurare con precisione illimitata. Si consideri per esempio il caso del momento angolare, cui vengono associati gli operatori L_x, L_y, L_z , che soddisfano alle regole di commutazione:

$$L_x L_y - L_y L_x = i \hbar L_z, \quad L_y L_z - L_z L_y = i \hbar L_x, \quad L_z L_x - L_x L_z = i \hbar L_y.$$

Se lo stato del sistema ha buoni numeri quantici l, m , corrispondenti agli autovalori di $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ e di L_z , allora il valor medio di L_x e di L_y è nullo, mentre quello di L_z è uguale a $\hbar m$. Inoltre

$$(\Delta L_x)^2 = (\Delta L_y)^2 = \frac{1}{2} \hbar^2 [l(l+1) - m^2], \quad (\Delta L_z)^2 = 0.$$

Perciò, dalla (4.4) applicata alla coppia L_x, L_y , segue che è possibile ottenere

$$(\Delta L_x)(\Delta L_y) = 0$$

solo nel caso di uno stato con $m = 0$, mentre in generale si ottiene la disuguaglianza

$$l(l+1) \geq m(m+1),$$

che è sempre soddisfatta, in quanto $|m| \leq l$. Invece il limite nullo a secondo membro della (4.4) può essere sempre raggiunto per la coppia L_x, L_z o la coppia L_y, L_z , in accordo col fatto che il valore di L_z è noto con infinita precisione se lo stato ha un m definito.

La deduzione di Robertson chiarisce molti punti, ma ha il difetto di legare il prodotto delle indeterminazioni $(\Delta A)(\Delta B)$ a una quantità che dipende dallo

¹⁴³ Per la dimostrazione Robertson ricorre alla disuguaglianza di Schwarz

$$\left[\int (f_1 f_1^* + f_2 f_2^*) d\tau \right] \left[\int (g_1 g_1^* + g_2 g_2^*) d\tau \right] \geq \left| \int (f_1 g_1 + f_2 g_2) d\tau \right|^2,$$

scegliendo

$$f_1^* = (A - \langle A \rangle) \Psi = f_2, \quad g_1 = (B - \langle B \rangle) \Psi = -g_2^*.$$

Tale metodo era già stato utilizzato nel 1928 da Hermann Weyl per la deduzione della relazione di indeterminazione per q e p nel suo libro (*Gruppentheorie und Quantenmechanik*, S. Hirzel, Lipsia, 1928, p. 272), la cui seconda edizione fu tradotta in inglese nel 1931 dallo stesso Robertson: *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Publ., p. 393. Nel caso $A = \mathbf{q}$, $B = \mathbf{p}$, risulta che C è l'operatore identità e $\langle C \rangle = 1$, per cui si ritrova la relazione di Heisenberg (1).

stato Ψ . Solo nel caso in cui l'operatore C si riduca ad essere un c -numero, il risultato (4.4) dipende esclusivamente dalla costante universale \hbar : questo è appunto il caso degli operatori di posizione e impulso e della relazione di indeterminazione, scritta da Heisenberg sulla base di una pura analisi dei metodi di osservazione. In questo senso si può affermare che le relazioni ottenute da Heisenberg traducono in formula il *principio di indeterminazione*, che sta nella natura stessa dei fenomeni osservabili.

Il vero senso del principio di indeterminazione è dunque legato al fatto che vale la regola di commutazione

$$[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = i \hbar, \quad (4.5)$$

per gli operatori \mathbf{q} e \mathbf{p} che corrispondono alle variabili classiche q e p , canonicamente coniugate.

Si può allora capire il desiderio, espresso immediatamente da Heisenberg, di generalizzare la relazione di indeterminazione a una coppia qualsiasi di operatori \mathbf{J} e \mathbf{w} , corrispondenti a variabili classiche d'azione e d'angolo, canonicamente coniugate. Effettivamente, in meccanica classica si possono dare descrizioni equivalenti dello stesso sistema mediante insiemi di variabili d'azione e d'angolo: basta scegliere insiemi di variabili che si ottengono gli uni dagli altri mediante trasformazioni canoniche che lasciano invarianti le parentesi di Poisson.

L'analogia tra i commutatori della meccanica quantistica e le parentesi di Poisson della meccanica classica, per quanto riguarda le loro proprietà formali, non pone problemi. Ma in meccanica quantistica si ottengono descrizioni equivalenti dello stesso sistema, solo operando con trasformazioni unitarie che cambiano la base dei vettori utilizzati nello spazio di Hilbert. Le trasformazioni unitarie lasciano inalterato il commutatore $[\mathbf{q}, \mathbf{p}]$, ma non trasformano gli operatori \mathbf{q} e \mathbf{p} in altri \mathbf{J} e \mathbf{w} . Tra l'altro, occorre ricordare che, mentre lo spettro di \mathbf{q} e \mathbf{p} è continuo, ciò non è in generale per lo spettro di \mathbf{J} , che invece è spesso fissato dalla condizione di quantizzazione di Bohr–Sommerfeld: $J = nh$.

Quanto poco legittimo sia considerare la relazione di commutazione, utilizzata da Heisenberg,

$$\mathbf{J}\mathbf{w} - \mathbf{w}\mathbf{J} = \frac{\hbar}{2\pi i}, \quad (4.6)$$

è messo in luce dal seguente argomento di Jordan,¹⁴⁴ riferito al caso in cui lo spettro dell'operatore B sia discreto e l'insieme dei suoi autovalori β non

¹⁴⁴ P. Jordan: *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik. II* [Una nuova fondazione della meccanica quantistica. II], *Zeitschrift für Physik* **44** (1927) 1–25. Il lavoro fu ricevuto dalla rivista il 3 giugno 1927, spedito da Copenhagen: è da presumere quindi che l'argomento di Jordan, illustrato alle pagine 2 e 3, fosse stato discusso con Heisenberg e Bohr, ma comunque dopo che Heisenberg aveva completato il suo articolo in marzo.

possieda alcun punto di accumulazione al finito, come succede per \mathbf{J} . Se si può scrivere la relazione

$$[A, B] = i\hbar, \quad (4.7)$$

si deve poter scrivere anche, per una qualsiasi funzione analitica $F(B)$:

$$[A, F(B)] = i\hbar F'(B). \quad (4.8)$$

Scegliendo per $F(B)$ una funzione trascendente intera, tale che abbia uno zero semplice in tutti i punti $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots$ dello spettro,

$$F(\beta_1) = F(\beta_2) = \dots = 0, \quad F'(\beta_1), F'(\beta_2), \dots \neq 0, \quad (4.9)$$

risulta allora ¹⁴⁵

$$F(B) = 0, \quad F'(B) \neq 0, \quad (4.10)$$

in contrasto con la (4.8). ¹⁴⁶

Incidentalmente, se si sviluppa la meccanica quantistica in uno spazio a numero finito di dimensioni, come nel caso degli operatori di spin, il commutatore di due operatori non può essere un c -numero, perché risulta una matrice a traccia nulla. ¹⁴⁷ Questo è anche un motivo per cui manca un analogo classico delle variabili di spin.

Per quanto riguarda la relazione di indeterminazione tra tempo e energia, gli aspetti interpretativi sono più sottili: il tempo nell'ordinaria meccanica quantistica viene considerato semplicemente un parametro di evoluzione, proprio come in meccanica classica, e non ha associato alcun operatore. Invece

¹⁴⁵ Jordan utilizza il teorema fattoriale dimostrato nel 1876 da Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897); cfr. Edmund Taylor Whittaker (1873–1956) e George Neville Watson (1886–1965): *A Course of Modern Analysis*, Cambridge at the University Press, 1902, quarta ed. 1927, p. 137–139.

¹⁴⁶ A prima vista questo risultato poteva inficiare molti dei risultati ottenuti a quei tempi ricorrendo all'uso di variabili d'angolo e d'azione; ma Jordan si affretta a osservare che Dirac in una conversazione gli aveva fatto notare che tutti questi risultati in realtà non si basano sulla (4.8), ma su una variante più debole:

$$\mathbf{J} e^{2\pi i w} - e^{2\pi i w} \mathbf{J} = \hbar e^{2\pi i w}.$$

In questa forma, per esempio, ha senso tutto ciò che si fa quantizzando il moto del corpo rigido in rotazione intorno a un asse, per il quale, nella rappresentazione delle coordinate, risulta $\mathbf{J} = -i\hbar \partial / \partial \phi$ e \mathbf{w} diventa l'angolo di rotazione ϕ , compreso tra 0 e 2π .

¹⁴⁷ Weyl mostra che la rappresentazione delle coordinate (di Schrödinger) è una diretta conseguenza delle relazioni di commutazione di \mathbf{q} e \mathbf{p} : cfr.: *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York. p. 272–280.

V. anche T. S. Santhanam e A. R. Tekumalla: *Quantum Mechanics in Finite Dimensions [Meccanica quantistica in numero finito di dimensioni]*, Foundations of Physics **6** (1976) 583–587.

l'energia è associata alla hamiltoniana, che gioca un ruolo centrale nel formalismo. Tuttavia, interpretando l'energia come una derivazione rispetto al tempo,

$$\mathbf{E} \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{d}{dt}, \quad (4.11)$$

si può considerare l'equazione

$$\mathbf{E}t - t\mathbf{E} = \frac{h}{2\pi i}, \quad (4.12)$$

che va intesa applicata a una funzione del tempo.¹⁴⁸ È chiaro però che questa equazione è ben diversa dal commutatore elementare tra gli operatori corrispondenti alle variabili canoniche coniugate.¹⁴⁹

¹⁴⁸ In un'intervista il 17 ottobre 1962 registrata in *Archive for the history of quantum mechanics*, M. Born confessa: “esprimemmo l'energia come d/dt e scrivemmo la regola di commutazione per energia e tempo applicando l'operatore $t d/dt - d/dt t$ a una funzione di t ; era assolutamente lo stesso che per gli operatori q e p . Ma non lo vedemmo. E non potrò mai perdonarmi: se lo avessimo fatto, avremmo avuto immediatamente l'intera meccanica ondulatoria dalla meccanica quantistica alcuni mesi prima di Schrödinger”; cfr. Max Jammer: *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw Hill, New York, 1966, p. 223.

¹⁴⁹ La (4.12) è stata postulata per la prima volta da Pauli in una lettera a Heisenberg del 31 gennaio 1926; cfr. Jagdish Mehra e Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory*, vol. 3, *The Formulation of Matrix Mechanics and Its Modifications, 1925–1926*, Springer, New York, 1982, p. 244. Pauli voleva semplificare l'approccio operatoriale alla meccanica delle matrici sviluppato da Born e Wiener (*l.c.*) e darne un'applicazione all'atomo di idrogeno, ma non arrivò in tempo a pubblicare i suoi risultati, perché fu preceduto da un'analoga pubblicazione di P. A. M. Dirac: *Quantum mechanics and a preliminary investigation of the hydrogen atom [Meccanica quantistica e un'indagine preliminare dell'atomo di idrogeno]*, Proceedings of the Royal Society of London **A110** (1926) 561–579. In termini operatoriali, le equazioni di moto della meccanica delle matrici (in quella che oggi viene indicata come la *descrizione* di Heisenberg) risultano:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{2\pi i}{h}(Hq - qH), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{2\pi i}{h}(Hp - pH). \end{aligned}$$

D'altra parte, la derivata temporale di ogni variabile dinamica, per esempio q , nella meccanica delle matrici può essere sostituita, secondo Born e Wiener, dalla relazione

$$\dot{q} = Dq - qD,$$

dove D va inteso come l'operatore d/dt . Dal confronto con le equazioni di moto, segue

$$H = \frac{2\pi i}{h} D,$$

e quindi si ottiene la (4.11). Il segno della (4.11), opposto rispetto a quanto si usa nella meccanica ondulatoria di Schrödinger, deriva dal fatto che le fasi della meccanica delle matrici venivano assunte del tipo $i\omega t$, piuttosto che $-i\omega t$.

Ciò nonostante Heisenberg mostra l'esistenza di una relazione di indeterminazione per energia e tempo. Egli interpreta la sua relazione (2) come un limite di principio sulla definizione dell'energia di uno stato stazionario compiuta in un intervallo di tempo finito: solo un tempo di osservazione infinito permette di riconoscere con estrema precisione l'energia dello stato in questione.

Come fa notare Bohr nel suo intervento al Congresso di Como, nella fisica quantistica c'è sempre un legame del tipo

$$E\tau = p\lambda = h \quad (4.13)$$

tra l'energia E e l'impulso p da una parte e il periodo τ e la lunghezza d'onda λ dall'altra. Equivalentemente:

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k. \quad (4.14)$$

Questa relazione esprime il dualismo onda-corpuscolo e ne evidenzia gli aspetti complementari.

Quando si parla di stati stazionari e si vuole coinvolgere il tempo di osservazione "l'uso di vibrazioni proprie semplicemente armoniche nell'interpretazione delle osservazioni significa ... solo un'opportuna idealizzazione che in una discussione più rigorosa deve essere sempre sostituita da un gruppo di vibrazioni armoniche, distribuite su un intervallo di frequenze".¹⁵⁰ Ciò implica una sovrapposizione di stati con le loro fasi:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dE \Psi(E) e^{-iEt/\hbar} |E\rangle. \quad (4.15)$$

Questa sovrapposizione è ancora una trasformata di Fourier come la (3.14) e quindi contiene una relazione di indeterminazione tra durata Δt del gruppo di onde (4.15) e dispersione ΔE della loro energia: l'estensione temporale della (4.15) tende all'infinito se si pretende che il pacchetto si riduca a un'onda monocromatica, di ben precisa energia. Questo è il significato di uno stato stazionario con energia definita con estrema precisione.

Nel contempo non ha più senso parlare di fase per un gruppo di onde (4.15): "siccome – prosegue Bohr – il periodo delle vibrazioni proprie dell'atomo nel campo [di Stern–Gerlach, nell'esperimento ideale studiato da Heisenberg] è connesso con l'energia totale dalla relazione (4.13), ci rendiamo conto che la condizione summenzionata di separabilità¹⁵¹ significa proprio la perdita

¹⁵⁰ N. Bohr: *l.c.*, p. 584.

¹⁵¹ È la condizione che la deviazione sia almeno dello stesso ordine di grandezza dell'allargamento provocato dalla diffrazione dei raggi atomici al diaframma nell'esperimento discusso da Heisenberg.

della fase. Questa circostanza rimuove anche l'apparente contraddizione, che sorge in certi problemi riguardanti la coerenza della radiazione risonante, che sono stati discussi frequentemente e che sono stati considerati anche da Heisenberg".¹⁵²

Se invece di uno stato stazionario, all'istante $t = 0$ si considera un pacchetto di onde

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dE \Psi(E)|E\rangle, \quad (4.16)$$

si può solo parlare di un valor medio dell'energia dello stato del sistema. Si supponga che l'energia E vari in modo continuo e che $\Psi(E)$ sia distribuita intorno a un valore centrale E_0 , descrivibile con un profilo lorentziano:

$$|\Psi(E)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4}\epsilon^2}, \quad (4.17)$$

dove ϵ rappresenta la larghezza a mezza altezza della lorentziana e quindi determina la dispersione in energia intorno al valore E_0 .

All'istante t il pacchetto (4.16) è evoluto nella forma (4.15). La quantità

$$\begin{aligned} W(t) &= \left| \int dE |\Psi(E)|^2 e^{iEt/\hbar} \right|^2 \\ &= e^{-\epsilon t/\hbar} \end{aligned} \quad (4.18)$$

rappresenta la probabilità che all'istante t lo stato del sistema sia ancora descritto dalla (4.16): la probabilità decresce esponenzialmente nel tempo, con una costante di tempo T pari a:

$$T = \frac{\hbar}{\epsilon}. \quad (4.19)$$

La dispersione in energia ϵ rende lo stato *quasi-stazionario* con una vita media T , tale che sia $T\epsilon \sim \hbar$. Viceversa, se si osserva uno stato quasi-stazionario per un tempo T , si accede al valore della sua energia E_0 con una dispersione ϵ .¹⁵³

Il legame tra durata del tempo di osservazione e precisione della misura d'energia era anche il tema dell'osservazione di Pauli, invocata da Heisenberg.¹⁵⁴ Si può formalizzare l'idea invocando la teoria delle perturbazioni

¹⁵² Queste erano le obiezioni di Bohr menzionate da Heisenberg nell'aggiunta durante la correzione delle bozze.

¹⁵³ Si osservi che il risultato (4.18) implica, a rigore, che l'integrazione sull'energia sia fatta da $-\infty$ a $+\infty$, cosa che non è mai; inoltre non si può considerare ϵ come una deviazione standard della distribuzione lorentziana, perché questa divergerebbe.

¹⁵⁴ V. articolo di W. Pauli su *Handbuch der Physik, l.c.*

dipendenti dal tempo. ¹⁵⁵ La probabilità $P_{E \rightarrow E'}$ che un sistema, sottoposto all'azione di una perturbazione dipendente dal tempo, esegua la transizione da uno stato di energia E a uno di energia E' dopo un tempo t , al primo ordine nella perturbazione, risulta

$$P_{E \rightarrow E'} \sim \frac{\sin^2[(E' - E)t/2\hbar]}{(E' - E)^2}. \quad (4.20)$$

Perciò il valore più probabile della differenza $E' - E$ è dell'ordine di \hbar/t . Nel misurare l'energia del sistema occorre interagire con esso mediante uno strumento: si supponga di conoscere a un certo istante l'energia E del sistema e l'energia ϵ dello strumento. Dopo un intervallo di tempo Δt nel quale sistema e strumento interagiscono, siano E' ed ϵ' i nuovi valori misurati d'energia. In base alla (4.20) deve essere

$$|E + \epsilon - E' - \epsilon'| \Delta t \sim \hbar. \quad (4.21)$$

Questo indica che in meccanica quantistica la conservazione dell'energia può essere verificata sperimentalmente solo all'interno di un'accuratezza dell'ordine di $\hbar/\Delta t$, dove Δt è l'intervallo di tempo tra le due osservazioni. Si tratta di una forma di indeterminazione totalmente diversa da quella che lega i valori Δq e Δp relativi alla precisione con cui possono essere misurati posizione e impulso *allo stesso istante*: il ΔE nella (4.20) è la differenza tra due valori d'energia *esatti*, misurati a *istanti diversi*. ¹⁵⁶

Tuttavia, la (4.20) corrisponde anche all'idea originale di Heisenberg che una relazione di indeterminazione tra energia e tempo significhi l'impossibilità di definire l'energia dello stato stazionario di un sistema in un tempo finito.

A commento finale, occorre sottolineare che il lavoro di Heisenberg giunge alla fine di un triennio travolgente per la storia della fisica, iniziato con l'ipotesi audace di de Broglie sulla natura ondulatoria delle particelle. In fondo, la scoperta del principio di indeterminazione è stata resa possibile solo dopo che era stato sviluppato il formalismo della meccanica quantistica e se ne erano evidenziati aspetti che sconvolgono la visione della fisica classica. Il lavoro di Heisenberg focalizza l'aspetto epistemologico centrale: “ siccome tutti gli esperimenti sono soggetti alle leggi della meccanica quantistica e quindi all'equazione (1), – conclude Heisenberg – mediante la meccanica quantistica

¹⁵⁵ Cfr. p. es. L. D. Landau e E. M. Lifshitz: *Quantum Mechanics. Non-relativistic Theory*, Pergamon Press, London, 1958, p. 150.

¹⁵⁶ Comunque la (4.20) è fondata sulla teoria delle perturbazioni limitata al primo ordine: come tale, fornisce solo un ordine di grandezza per il ΔE . Inoltre ΔE non può rappresentare la deviazione standard di una distribuzione di energia del tipo (4.20), per la quale invece la deviazione standard diverge.

viene stabilita definitivamente la non validità del principio di causalità”.¹⁵⁷

Nel suo enunciato limitativo, il principio di indeterminazione caratterizza nella sua sostanza il formalismo che in quel triennio si era andato sviluppando e che tanto successo aveva riscosso nella spiegazione dei fenomeni atomici e nel dirimere tutte le contraddizioni che erano emerse nella fisica classica. “In quanto rigetta le idee consuete della meccanica classica, si potrebbe dire che il principio di indeterminazione ha un contenuto negativo. Naturalmente, in sé questo principio non basta come base su cui costruire una nuova meccanica delle particelle. Una tale teoria deve essere fondata in modo naturale su qualche enunciato affermativo”.¹⁵⁸ Ma questo sarà l’argomento del prossimo Quaderno.

¹⁵⁷ Grazie alla riflessione su questioni di principio, stimolata dalla meccanica quantistica, oggi si va riscoprendo che anche in meccanica classica esistono limitazioni di principio. Si pensi per esempio alla catastrofe di Poincaré e alla descrizione statistica del moto Browniano. Nel 1890, studiando il problema gravitazionale a tre corpi, Jules–Henri Poincaré (1854–1912) mostrò che, date due condizioni iniziali arbitrariamente vicine tra di loro, le traiettorie risultanti nello spazio delle fasi evolvono in un tempo finito in modo da allontanarsi quanto si vuole. Questa *instabilità asintotica* è oggi riscoperta nei fenomeni cooperativi dovuti alle interazioni non lineari tra i componenti del sistema.

H. Poincaré: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier–Villars, Parigi, 3 voll., 1892–1899 (ristampa: Dover, New York, 1957). Il problema è trattato nel capitolo V del primo volume.

Una sorta di principio di indeterminazione esiste anche nello studio del moto Browniano: analizzando l’analogia tra l’equazione di Schrödinger e l’equazione di diffusione per la concentrazione in un fluido classico, Reinhold Fürth arriva a scrivere la disuguaglianza:

$$\Delta x \Delta v \geq D,$$

per la quale il prodotto delle incertezze sulla posizione e la velocità delle particelle non può essere inferiore al coefficiente di diffusione.

R. Fürth: *Über einige Beziehungen zwischen klassischer Statistik und Quantenmechanik* [Alcune relazioni tra statistica classica e meccanica quantistica], *Zeitschrift für Physik* **81** (1933) 143–162.

¹⁵⁸ Landau–Lifshitz, *l.c.*, p. 2.

Università degli Studi di Pavia
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica
QUADERNI DI FISICA TEORICA
Collana di monografie curata da Sigfrido Boffi

1. Le onde di de Broglie, a cura di Sigfrido Boffi
2. Onde di materia e onde di probabilità, a cura di Sigfrido Boffi
3. Il principio di indeterminazione, a cura di Sigfrido Boffi
4. La meccanica delle onde, a cura di Sigfrido Boffi
5. Paradosso EPR e teorema di Bell, a cura di Oreste Nicosini
6. I cammini di Feynman, a cura di Marco Roncadelli e Antonio Defendi
7. L'interpretazione statistica della meccanica quantistica, a cura di Sigfrido Boffi
8. L'origine delle statistiche quantistiche, a cura di Fulvio Piccinini
9. Le radici della quantizzazione, a cura di Sandro Graffi
10. La fase di Berry, a cura di Franco Salmistraro
11. Il postulato dei quanti e il significato della funzione d'onda, a cura di Sigfrido Boffi
12. Indice di rifrazione adronico, a cura di Francesco Cannata
13. La formulazione delle storie della meccanica quantistica, a cura di Irene Giardina
14. La regola d'oro di Fermi, di Paolo Facchi e Saverio Pascazio
15. Le radici del dualismo onda-corpuscolo, a cura di Sigfrido Boffi e Michele D'Anna
16. Teoria delle caratteristiche ed equazioni ondulatorie quantiche, a cura di Paola Orsi
17. La nascita del concetto di quanto, di Francesco La Teana
18. Da Heisenberg a Landau. Introduzione alla fisica dei sistemi a molte particelle,
di Sigfrido Boffi
19. Aspetti astrofisici della materia oscura, di Marco Roncadelli
20. La nascita dello spin, di Francesco La Teana
21. Le forme di Dirac, di Sigfrido Boffi

QUADERNI DI FISICA TEORICA

Collana curata da Sigfrido Boffi

Dopo un primo biennio, in cui ha rivisto con maggiori dettagli e approfondimenti lo sviluppo della fisica classica e ha imparato a destreggiarsi con alcuni aspetti del formalismo matematico necessario, lo studente del Corso di Laurea in Fisica è costretto ad affrontare un nuovo modo di descrivere la natura che ormai il ricercatore professionale ha fatto suo da oltre mezzo secolo, ma che tuttora risulta estraneo al cosiddetto senso comune. L'impatto è principalmente difficile nel corso di Istituzioni di Fisica Teorica, che è tradizionalmente dedicato all'esposizione dei metodi teorici della meccanica quantistica così come si sono sviluppati nella prima metà del nostro secolo. Sembra perciò utile proporre, con questa collana di "*Quaderni di Fisica Teorica*," un tema, o un autore, attraverso la lettura commentata di uno o più articoli originali. Lo studente si accorgerà allora che le teorie organicamente presentate nei suoi manuali, necessarie per la pratica scientifica attuale, sono piuttosto il risultato di un lungo travaglio di idee, tentativi, successi, difficoltà, e infine di scelte, che sono sempre presenti nell'avventura dell'uomo animato dal desiderio invincibile di capire. Sarà dunque preparato, al termine dei suoi studi durante i quali si è impadronito in breve tempo dei risultati fondamentali ottenuti nell'arco di secoli, ad affrontare a sua volta, come giovane ricercatore, un cammino pieno di trabocchetti, ma anche ricco di soddisfazioni.

IL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE

L'impossibilità di principio, riconosciuta da Werner Heisenberg nel 1927, di definire simultaneamente la posizione e la quantità di moto con arbitraria precisione è un elemento caratteristico e fondamentale della meccanica quantistica, ancora tutt'altro che intuitivo. In questo Quaderno, dedicato a Heisenberg, è presentato il suo lavoro originale del 1927 in cui propose il principio di indeterminazione. A questo lavoro è premesso il discorso, da lui pronunciato nel 1933 in occasione del ricevimento del premio Nobel per la Fisica, in cui viene illustrato il vorticoso sviluppo della meccanica quantistica che lo aveva visto tra i protagonisti.

ISBN 88-85159-03-6