

Sigfrido Boffi

**ONDE DI MATERIA
e
ONDE DI PROBABILITÀ**



QUADERNI DI FISICA TEORICA



Università degli Studi di Pavia
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

QUADERNI DI FISICA TEORICA
Collana curata da Sigfrido Boffi

Comitato Scientifico

Bruno Bertotti
Sigfrido Boffi
Italo Guarneri
Alberto Rimini
Marco Roncadelli

Sigfrido Boffi

**ONDE DI MATERIA
e
ONDE DI PROBABILITÀ**

Università degli Studi di Pavia
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

Prima edizione: luglio 1989
Prima edizione web: giugno 2009

ISBN 88-85159-02-8

INDICE

Premessa	7
§1. Introduzione	9
§2. Ottica geometrica e meccanica del punto	17
– L'idea fondamentale della meccanica ondulatoria	27
§3. I postulati elementari della meccanica quantistica	43
– L'interpretazione della meccanica ondulatoria mediante la teoria della doppia soluzione	51
§4. Determinismo e variabili nascoste	77

PREMESSA

La collana di “*Quaderni di Fisica Teorica*”, nata sotto l’egida del Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica dell’Università di Pavia, si indirizza principalmente agli studenti del Corso di Laurea in Fisica che affrontano per la prima volta i problemi sollevati dall’esposizione dei metodi teorici della meccanica quantistica. Ogni Quaderno viene dedicato a un tema, o a un autore, attraverso la lettura commentata di uno o più articoli originali. Dopo un primo Quaderno dedicato all’ipotesi di de Broglie sulla natura ondulatoria degli elettroni, in questo viene rivisto un aspetto riguardante il significato da attribuire alla funzione d’onda che viene associata al moto di una particella quantistica. Dopo i richiami classici di ottica geometrica e di meccanica analitica, necessari per introdurre l’equazione di Schrödinger, viene proposto il discorso da lui tenuto in occasione del ricevimento del premio Nobel per la Fisica del 1933. Ribaditi i postulati elementari della meccanica quantistica, viene quindi presentato un lavoro di de Broglie del 1970 che, riprendendo una sua idea del 1927, sviluppa la teoria di una doppia soluzione dell’equazione di Schrödinger, una col significato statistico–probabilistico ormai tradizionale e una col carattere di reale onda che pilota il moto della particella.

Il discorso Nobel di Schrödinger è tradotto dal testo originale tedesco col consenso della Fondazione Nobel e della figlia di Schrödinger, signora Ruth Braunizer, cui l’autore è grato per l’incoraggiamento ricevuto. Il lavoro di de Broglie è tradotto dal testo originale francese con l’autorizzazione della Fondation Louis de Broglie, rappresentata dal suo Direttore Georges Lochak. Il disegno in copertina, realizzato da Giorgio Bonaschi, si basa su un’idea dell’autore ispirata, dietro suggerimento della figlia Ariella, ai meandri riprodotti sui vasi minoici e sulle steli funerarie dell’arte micenea. L’autore è inoltre grato a Bruno Bertotti, che lo ha presentato alla signora Braunizer, e a Italo Guarneri, Oreste Nicrosini e Marco Radici per preziosi commenti nella stesura del testo, nonché ad Alberto Rimini per utili discussioni.

§1. Introduzione

Se si chiedesse a un giovane collaboratore di Carlo Rubbia che cosa ha provocato una delle numerosissime tracce riconoscibili nella ricostruzione a molti colori di un evento che ha portato alla scoperta delle nuove particelle W e Z_0 , la risposta più probabile è certamente che si tratta di *particelle* (elettroni, muoni, ecc.), le cui tracce ne indicano il percorso compiuto, rilevato dal costosissimo e raffinatissimo strumento di misura. Credo che nessun fisico contemporaneo abbia il minimo dubbio sull'esistenza di queste particelle subatomiche, che pure non ha mai viste se non attraverso gli indizi lasciati in qualche rivelatore di elaborata concezione. Ma il comportamento di un elettrone a volte può essere simile a quello di un'onda luminosa e produrre fenomeni di diffrazione e di interferenza. Qual'è dunque la vera natura dell'elettrone? È una particella o un'onda?

Queste domande spontanee derivano da un atteggiamento di fondo, che si è consolidato nei secoli ed è radicato non solo nello scienziato: lo scopo della scienza sarebbe quello di rendere ragione della realtà nella quale viviamo. Solo che la "realtà" *si manifesta* sotto aspetti che sembrano contraddittori. Ciò si verifica principalmente nello studio dei fenomeni atomici e nucleari, iniziato tra la fine del secolo scorso e il primo quarto di questo secolo e culminato nell'elaborazione di una nuova meccanica, la meccanica quantistica, in grado di ricomporre le contraddizioni.

Ma la conclusione finale è un nuovo modo di porsi le domande di fronte alla "realtà": lo scopo della ricerca non è più la spiegazione del reale secondo leggi deterministiche, ma la capacità di previsione del risultato delle nostre osservazioni. E a questa conclusione si è giunti attraverso un cammino faticoso, percorso con riluttanza talvolta e non sempre nella giusta direzione anche dagli stessi artefici della meccanica quantistica.

In una delle prime formulazioni della meccanica quantistica, la cosiddetta meccanica ondulatoria, ad opera di Louis-Victor de Broglie (1892–1987) e di Erwin Schrödinger (1887–1961), vengono poste in risalto soprattutto le analogie tra il comportamento ondulatorio e quello corpuscolare, allo scopo di ottenere una descrizione unificata dei fenomeni associati alla propagazione di un'onda e di quelli relativi al moto dei corpi materiali. Anche se la meccanica ondulatoria ha contribuito in modo determinante alla svolta del pensiero scientifico e al riorientamento di prospettiva dello scienziato di fronte ai fenomeni

fisici, essa nasce dal desiderio di comprensione della realtà fisica oggettiva in quanto tale. E, come in ogni attività umana, i criteri di scelta che hanno innescato questa svolta hanno trovato ispirazione nella matrice culturale della singola persona, responsabile della scelta.

Questa matrice culturale è quella europea, riconducibile a tre radici principali: la ricerca dell'intelligibilità del reale perseguita dai greci, il progetto imperiale della *pax romana* e la fede religiosa del popolo ebraico e della tradizione giudaico-cristiana.¹

La cultura greca nasce senza avere una tradizione scientifica alle spalle: è una cultura fondata su testi poetici, come l'*Iliade* e l'*Odissea*, che deve interpretare. Si tratta di un testo poetico, che i greci sapevano bene essere opera di immaginazione. Tuttavia, esso è un *μῦθος*, un racconto che tratta di teogonie e cosmogonie, una storia passata, ma sempre presente nella vita dell'uomo immerso in una realtà da capire. Si è obbligati allora a trovare delle interpretazioni che correggano i testi, in modo da orientarsi verso l'esperienza del reale. È qui che nasce il *λόγος*, il pensiero razionale, unito al *θαυμάζειν*, lo stupore non per i problemi della vita quotidiana, ma come base del pensiero filosofico e del pensiero scientifico.

La scoperta dell'intelligibilità del reale è concepita fin dalle sue origini secondo il modello di interpretazione di un testo, di una scrittura. Si comprende il reale come si comprende la parola del prossimo: si tratta di afferrare il linguaggio della natura. Galileo Galilei (1564–1642) dirà poi che il linguaggio della natura è la matematica.

Il contributo dell'impero romano consiste nell'idea di una comunità di uomini-cittadini che vivono in pace perché sono governati dalla legge. Il vero legame tra la legge come fondamento di una comunità politica e la pace come premessa di prosperità e sicurezza non era stato colto dai greci, piuttosto individualisti. I romani furono i primi a scoprire che una comunità politica, vivendo su un territorio ben definito, non può vivere in pace se non è amministrata in virtù di leggi che trattano ogni individuo sulla base di un principio di uguaglianza. L'individuo, in quanto soggetto alla *pax romana*, cittadino dell'impero civilizzato, ha dei diritti indipendenti dalla provenienza razziale o culturale. Ciò significa che l'uomo ha chiaro il senso di una legge e di una legge a misura d'uomo, ma di carattere universale e oggettivo.

La religione ebraica conosce un solo Dio e se c'è un Dio solo, il mondo che ci circonda non è sacro e può essere oggetto di indagine e di manipolazione. Solo un monoteismo radicale poteva produrre la dedificazione della natura

¹ Questo concetto è ormai acquisito tra i pensatori contemporanei. Per un'esposizione più dettagliata si rimanda all'intervento di Nicolaus Lobkowics tenuto al Colloquio Internazionale di Torino, *L'identità culturale dell'Europa: Le vie della pace*, 19–22 gennaio 1984, i cui Atti sono pubblicati in *Synesis*, suppl. al n. 1, febbraio 1985, anno II: *Le radici culturali dell'uomo moderno*, *ibid.* pagg. 53–66. Lobkowics, nato a Praga nel 1931, è professore di Teoria politica e filosofia nell'Università di Monaco, di cui è stato Rettore e poi Presidente.

quale presupposto per qualsiasi scienza con implicazioni tecnologiche. Occorre aggiungere che i primi due capitoli della *Genesi*, per un credente, sono un invito pressante a considerare il creato come un bene a disposizione dell'uomo, fatto a immagine e somiglianza di Dio, e a partecipare alla creazione stessa nel soddisfare il desiderio di conoscenza e di possesso del mondo fisico.

L'eredità giudaica è stata in parte ripresa e sviluppata nella cultura islamica: “750 versi del *Corano*, quasi un ottavo di tutto il libro, esortano i fedeli a studiare la natura, a riflettere, a fare il miglior uso della ragione nella ricerca delle cause ultime e a rendere l'acquisizione della conoscenza e della comprensione scientifica parte della vita della comunità”.²

Queste tre radici culturali hanno trovato la loro sintesi per opera dei filosofi arabi³ e i monaci medievali, e i padri della scolastica ne hanno trasmesso un'elaborazione all'epoca moderna.⁴

Non è dunque inspiegabile la difficoltà di altre culture (specialmente le orientali) ad inserirsi in un discorso di scienza, intesa come una ricerca sul reale e le sue leggi per renderne ragione.

² Mohammad Abdus Salam (1926–1996): *Islam and Science, in Ideals and Realities. Selected Essays of Abdus Salam*, ed. C. H. Lai (World Scientific, Singapore, 1987), p. 179–213. Salam, musulmano devoto e premio Nobel per la Fisica nel 1979 insieme con Sheldon Lee Glashow (n. 1932) e Steven Weinberg (n. 1933) per i loro contributi alla teoria unificata delle interazioni elettrica e debole tra le particelle elementari, è stato Direttore del Centro Internazionale di Fisica Teorica di Miramare, Trieste, dalla sua fondazione nel 1964 fino al 1993.

³ Anche per gli arabi si poneva il problema di interpretare un testo, che però era un testo sacro, rivelazione di Dio; ma l'attività dei filosofi arabi, diversamente dai naturalisti greci, poteva fondarsi su una tradizione culturale. Accanto al più noto Ibn-Rushd (Averroè, 1126–1198), per quanto attiene allo sviluppo della scienza che qui interessa si possono ricordare principalmente Ibn Musa al-Khwarismi (Alchorismus, 780(?)–850(?)), Ibn-al-Haythan (Alhazen, 965–1139), Al Biruni (973–1048) e Ibn-Sina (Avicenna, 980–1037). Alchorismus, vissuto a Bagdad, è l'iniziatore della matematica araba con un trattato di algebra e uno di aritmetica, in cui introduce la notazione posizionale indiana e alcuni fondamentali procedimenti di calcolo: dal suo nome latinizzato deriva il nostro termine *algoritmo*. Alhazen, vissuto al Cairo e autore di un grande trattato di *Ottica*, anticipa di oltre cinque secoli Pierre de Fermat (1601–1665) nell'affermare l'idea che il raggio di luce percorre il cammino più breve: la sua opera è ripresa, tra gli altri, da Ruggero Bacone (1219(?)–1292(?)), Witelo (Vitellione, c. 1220–1300) e Johannes Kepler (1571–1630). Al Biruni, scienziato enciclopedico, visse nell'odierno Afghanistan: è inventore di un metodo per la determinazione del peso specifico mediante un tipo di picnometro molto simile a quelli raffinati oggi in uso. Il persiano Avicenna, medico e filosofo, riprende la teoria dell'*impetus* formulata da Giovanni Filopono; questi, vissuto ad Alessandria tra la fine del V e la metà del VI secolo, è autore di numerosi commentari ad Aristotele (384/3 a.C.–322/1 a.C.), tra cui uno alla *Fisica*, e di un trattato *De opificio mundi [La creazione del mondo]*. Secondo la teoria dell'*impetus*, la causa del moto di un proiettile non sarebbe il mezzo in cui il proiettile si muove dopo essersi staccato dal proicente (come aveva sostenuto Aristotele), bensì l'impulso trasmessogli dal proicente. Anticipando Galileo, Avicenna aggiunge l'idea che nel vuoto, cioè in assenza di azione esterna, il moto persisterebbe all'infinito.

⁴ Grazie ai monaci benedettini prima e poi ai frati domenicani e francescani, fino a giungere ad Alberto di Böllstadt (Alberto Magno, 1193–1280) e a Tommaso d'Aquino (1225–1274), si chiude il lungo medio evo del mondo occidentale e si avvia un rinnovato fervore intellettuale che favorisce lo sviluppo della scienza moderna.

Però “la scienza non è una raccolta di leggi, un catalogo di fatti senza nesso. È una creazione dell’intelletto umano, con le sue libere invenzioni di idee e di concetti. Le teorie fisiche tentano di costruire una rappresentazione della realtà e di determinarne i legami col vasto mondo delle impressioni sensibili. Pertanto le nostre costruzioni mentali si giustificano solo se le teorie costituiscono realmente un legame di tal fatta . . .

“Senza la convinzione che con le nostre costruzioni teoriche è possibile raggiungere la realtà, senza la convinzione nell’intima armonia del nostro mondo, non potrebbe esserci scienza. Questa convinzione è, e sempre sarà, il motivo essenziale della ricerca scientifica. In tutti i nostri sforzi, in ogni drammatico contrasto fra vecchie e nuove interpretazioni riconosciamo l’eterno anelito d’intendere, nonché l’irremovibile convinzione nell’armonia del nostro mondo, convinzione ognor più rafforzata dai crescenti ostacoli che si oppongono alla comprensione”.⁵

Questo processo conoscitivo è alimentato dalla passione personale per la ricerca, per il capire, che si traduce in uno sforzo continuo e fortemente voluto, che per esempio non fa smettere ai fisici di parlare di fisica neppure intorno al tavolo di una cena sociale di qualche congresso e che faceva dire a Enrico Fermi (1901–1954) che un buon fisico teorico non deve perdere tempo neppure per giocare a scacchi.

Questa passione ha una sublimazione nelle parole di Jacques Maritain:⁶ “. . . il sapere [del fisico] non è una conoscenza del reale (del reale dato) per mezzo del reale (per mezzo di un reale più profondo), ma piuttosto una conoscenza del reale per mezzo del preterreale matematico; è una conoscenza del reale fisico che diventa simbolica, in quanto la sua regolazione matematica l’obbliga a tentare di questo reale una spiegazione completa, in cui sarà formulato in modo completamente quantitativo ciò la cui forma e formazione dipendono da un mondo di qualità; o, ancora, se è permesso usare qui un vecchio termine platonico, forse più espressivo del termine moderno di simbolo, è [. . .] una conoscenza del reale fisico per mezzo di miti, intendo di miti verificati, che concordano, cioè, con le *apparenze* misurabili e che le *salvano*. Una scienza ad un tempo sperimentale e mito-poetica del reale fisico.

“È questo che dà alla fisica teorica e alle sue più geniali scoperte una parentela così sorprendente con la creazione artistica; ma si tratta (ed è la cosa più mirabile) di un’arte speculativa, di un’arte per conoscere, dove l’immaginazione

⁵ Così si conclude il libro di Albert Einstein (1879–1955) e Leopold Infeld (1898–1968): *The Evolution of Physics*, Simon and Schuster, New York [*L’evoluzione della fisica*, trad. it. di A. Graziadei, Giulio Einaudi ed., 1948, p.301 e 303].

⁶ J. Maritain: *Distinguer pour unir ou les degrés du savoir*, Desclée de Brouwer, Parigi, 1932 [*Distinguere per unire. I gradi del sapere*, trad. it., Morcelliana, Brescia, 1974, p. 197–198]. Maritain (1882–1973), filosofo neoscolastico francese, è sostenitore di un realismo critico nell’assumere, come punto di partenza della sua riflessione, l’evidenza dell’essere, nella sua identità, alla coscienza: l’essere, comprensivo dell’intera realtà, può essere colto nell’unità del tutto insieme alla distinzione delle sue parti.

non è feconda se non subendo la costrizione di un mondo di determinazioni rigorose, di leggi stabilite secondo la più rigorosa esattezza”.

In questa libera attività creativa dell’intelletto, tuttavia, un ruolo essenziale, anche se spesso a livello inconscio, è giocato dall’insieme di nozioni, di idee, di concetti, di atteggiamenti che si trasmettono da una generazione all’altra: quel bagaglio culturale che costituisce l’insegnamento di base informale e che può a ragione essere definito come una *mitologia scientifica*.⁷ Tramandata senza più riferimento alle fonti, ma fatta propria nel profondo, questa mitologia scientifica è la forza motrice dell’immaginazione e rappresenta la cornice entro la quale lo spirito creativo si esprime.⁸

Il dualismo onda–corpuscolo rientra in questa mitologia scientifica e risale ai primissimi tentativi dei filosofi naturalisti ionici di organizzare la visione del mondo. L’idea della struttura discontinua della materia secondo Eraclito,⁹ contrapposta a quella dell’essere indivisibile e continuo di Parmenide,¹⁰ rinasce nelle dispute settecentesche sulla natura della luce tra i sostenitori della teoria corpuscolare di Newton¹¹ e quelli della teoria ondulatoria di Huyghens.¹² E anche, dopo gli esperimenti di Young, di Fizeau e Foucault,¹³ dopo gli studi di Fresnel¹⁴ e la sintesi di Maxwell¹⁵ relativa ai fenomeni elettrici e magnetici, il problema si riapre con la teoria dei quanti di luce agli inizi del nostro secolo. Se Einstein nel 1905 reintroduce la concezione corpuscolare per spiegare l’effetto fotoelettrico,¹⁶ de Broglie nel 1923 propone

⁷ T. M. Christidis: *La mythologie des ondes et des particules [La mitologia delle onde e delle particelle]*, Annales de la Fondation Louis de Broglie **13** (1988) 259–278.

⁸ G. Holton: *Thematic Origins of Scientific Thought, Kepler to Einstein*, Harvard University Press, 1980.

⁹ Vissuto a Efeso verso il 500 a. C.

¹⁰ Contemporaneo di Eraclito, ma operante a Elea (l’odierna Velia) sulla costa occidentale della Magna Grecia a sud di Paestum e creatore della scuola “eleatica”.

¹¹ Isaac Newton (1642–1727): *Opticks, or a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colour of light*, S. Smith, London, 1704.

¹² Christiaan Huyghens (1629–1695): *Traité de la lumière*, P. van der Aa, Leiden, 1690.

¹³ Thomas Young (1773–1829): *On the theory of light and colour [Teoria della luce e dei colori]*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **92** (1802) 12–24; Armand-Hippolyte-Louis Fizeau (1819–1896): *Sur une expérience relative à la vitesse de propagation de la lumière [Un’esperienza relativa alla velocità di propagazione della luce]*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences **29** (1849) 90–92; Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868): *Méthode générale pour mesurer la vitesse de la lumière dans l’air et les milieux transparents [Metodo generale per misurare la velocità di propagazione della luce nell’aria e nei mezzi trasparenti]*, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences **30** (1850) 551–560.

¹⁴ Augustin-Jean Fresnel (1788–1827) nelle sue *Mémoires sur la diffusion de la lumière* del 1818, ma pubblicate solo nel 1826 in *Mémoires de l’Académie des Sciences*, Parigi, vol. 5, divulgò i risultati degli esperimenti di interferenza di Young.

¹⁵ James Clerk Maxwell (1831–1879): *Treatise on electricity and magnetism*, Oxford at the Clarendon Press, 1873.

¹⁶ Albert Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden*

il comportamento ondulatorio degli elettroni e, in generale, delle particelle della fisica atomica.¹⁷

Le analogie formali nella descrizione matematica del moto di una particella e della propagazione di un'onda consentono di riconoscere forti connessioni tra la meccanica analitica e l'ottica geometrica già nel 1824.¹⁸ Ma è solo un secolo più tardi, tra il 1923 e il 1926, che viene formulata la meccanica ondulatoria. Al moto di una particella viene associata un'onda e quest'onda è descritta da una funzione che risolve l'equazione di Schrödinger.¹⁹ Il formalismo appare perfettamente adeguato per spiegare tutti quegli aspetti della fisica atomica che avevano messo in crisi la descrizione classica negli anni precedenti. Ma il significato di questa funzione d'onda è immediatamente oggetto di grossi dibattiti. È qui che gioca un ruolo fondamentale la *mitologia*

heuristischen Gesichtspunkt [Un punto di vista euristico riguardante la produzione e la conversione di luce], Annalen der Physik 17 (1905) 132–148.

¹⁷ L. de Broglie: *Recherches sur la théorie des quanta [Ricerche sulla teoria dei quanti]*, *Annales de Physique* **3** (1925) 22–128. La tesi di dottorato di de Broglie raccoglie i risultati da lui già pubblicati nel 1923 in tre memorie: *Ondes et quanta [Onde e quanti]*, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **177** (1923) 507–510; *Quanta de lumière, diffraction et interférences [Quanti di luce, diffrazione e interferenza]*, *ibid.* **177** (1923) 548–550; *Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat [I quanti, la teoria cinetica dei gas e il principio di Fermat]*, *ibid.* **177** (1923) 630–632.

¹⁸ William Rowan Hamilton (1805–1865): *Theory of Systems of Rays [Teoria dei sistemi di raggi]*, *Transactions of the Royal Irish Academy* **15** (1828) 69–176, comunicazione letta all'Accademia il 3 dicembre 1824, come riferito da Jagdish Mehra e Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory*, Springer-Verlag, New York - Berlino, 1987, vol. 5, p. 506.

¹⁹ Erwin Schrödinger tra il gennaio e il giugno 1926 scrisse quattro lavori con lo stesso titolo, in cui sviluppava la nuova meccanica ondulatoria sulla base dell'equazione che porta il suo nome: *Quantisierung als Eigenwertproblem [Quantizzazione come problema agli autovalori]*, *Annalen der Physik* **79** (1926) 361–376, 489–527; **80** (1926) 437–490; **81** (1926) 109–139. Questi lavori sono presentati in questa collana nel Quaderno dedicato a Schrödinger dal titolo “La meccanica delle onde”.

Nella prima comunicazione, partendo dall'equazione classica di Hamilton–Jacobi, Schrödinger introduce quella che oggi viene chiamata equazione di Schrödinger degli stati stazionari, un'equazione agli autovalori per l'energia che permette di calcolare i livelli energetici di un sistema fisico: il primo esempio considerato è quello di un elettrone in un atomo. La seconda comunicazione sviluppa l'analogia formale tra ottica geometrica e meccanica analitica ed è corredata da numerosi esempi di risoluzione di equazioni agli autovalori.

La teoria delle perturbazioni e la spiegazione dell'effetto Stark nell'atomo di idrogeno sottoposto a un campo elettrico esterno sono oggetto della lunga e tecnica terza comunicazione. L'effetto di separazione delle righe spettrali ad opera del campo elettrico applicato, analogo a quello provocato dal campo magnetico e già messo in evidenza da Pieter Zeeman (1865–1943), fu previsto teoricamente da Woldemar Voigt (1850–1919) (*Über das elektrische Analogon des Zeeman-Effektes [Analogo elettrico dell'effetto Zeeman]*, *Annalen der Physik* **4** (1901) 197–208), che però stimò la separazione troppo piccola per essere messa in evidenza. Invece l'effetto fu misurato indipendentemente e contemporaneamente da Johannes Stark (1874–1957) (*Beobachtung über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien [Osservazione dell'effetto del campo elettrico sulle righe spettrali]*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (1913) 932–946; *Annalen der Physik* **43** (1914) 965–982) e da Antonino Lo Surdo (1880–1949) (*Sul fenomeno analogo a quello*

scientifica.

Louis de Broglie era un grande ammiratore di Einstein, di cui apprezzava la proposta dei quanti di luce per spiegare l'effetto fotoelettrico e la legge di Planck sulla distribuzione energetica della radiazione di corpo nero.²⁰ Nel 1922 fa sua l'ipotesi dei quanti di luce per studiare gli aspetti termodinamici²¹ e le fluttuazioni d'energia della radiazione di corpo nero,²² precedendo di poco e in modo indipendente, anche se parziale, le idee di Bose e di Einstein stesso sulla statistica dei fotoni.²³

Iniziato agli studi di fisica dal fratello Maurice (1875–1960) e lavorando con lui, de Broglie si familiarizzò da subito con le idee del fratello sui raggi X, da lui considerati una combinazione di onde e corpuscoli già prima degli esperimenti di Compton.²⁴

L'amicizia con Marcel Brillouin,²⁵ autore di un modello idrodinamico

di Zeeman nel campo elettrico, Atti della Reale Accademia dei Lincei **22** (1913) 664–666). Stark fu premiato col Nobel per la Fisica del 1919.

È solo nella quarta comunicazione che Schrödinger scrive quell'equazione che oggi porta il suo nome e che costituisce un'equazione differenziale del primo ordine nel tempo per la funzione d'onda Ψ . Questo quarto lavoro si conclude anche con un paragrafo che affronta finalmente il problema del significato fisico della Ψ : in esso viene suggerita l'idea che $|\Psi|^2$ sia una funzione di peso, utile per calcolare la distribuzione spaziale della carica elettrica associata alla particella.

- ²⁰ Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947): *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum* [Teoria della legge di distribuzione energetica dello spettro normale], Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **2** (1900) 237–245. A questa relazione, presentata il 14 dicembre 1900 alla Società Tedesca di Fisica riunita in Berlino e che segna la data di nascita della fisica quantistica, seguì l'articolo: *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum*, Annalen der Physik **4** (1901) 553–563. L'ipotesi del quanto di luce fu utilizzata da Einstein nella sua spiegazione dell'effetto fotoelettrico (*loc. cit.*).
- ²¹ L. de Broglie: *Rayonnement noir et quanta de lumière* [Radiazione di corpo nero e quanti di luce], Journal de Physique et le Radium **3** (1922) 422–428.
- ²² L. de Broglie: *Sur les interférences et la théorie des quanta de lumière* [I fenomeni di interferenza e la teoria dei quanti di luce], Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **175** (1922) 811.
- ²³ Satyendra Nath Bose (1894–1974): *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese* [Legge di Planck e ipotesi dei quanti di luce], Zeitschrift für Physik **26** (1924) 178–181; Albert Einstein: *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases* [Teoria quantistica del gas perfetto monoatomico], Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin) **22** (1924) 261–267 (presentato alla seduta del 10 luglio 1924), **23** (1925) 3–14, 18–25.
- ²⁴ Arthur Holley Compton (1892–1962): *The degradation of gamma-ray energy* [La degradazione dell'energia dei raggi gamma], Philosophical Magazine **41** (1921) 749–769; *Secondary radiations produced by X-rays by light elements* [Radiazioni secondarie prodotte dai raggi X diffusi da elementi leggeri], Bulletin of the National Research Council **4** (1922) 1–56; *A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements* [Teoria quantistica della diffusione di raggi X da parte di elementi leggeri], Physical Review **21** (1923) 483–502.
- ²⁵ Louis Marcel Brillouin (1854–1948): *Action mécanique à hérédité discontinue par propagation: essai de théorie dynamique de l'atome à quanta* [Azione meccanica a eredità discontinua per propagazione: tentativo di teoria dinamica dell'atomo secondo i quanti],

di atomo in vibrazione, lo confermò nell'idea di reali fenomeni ondulatori associati alla dinamica dei sistemi atomici. È perciò naturale per de Broglie credere a un'onda reale che accompagna il moto di una particella e sviluppare le idee di Hamilton nella direzione di una meccanica ondulatoria.

Erwin Schrödinger aveva profondi interessi filosofici fin dal tempo degli studi universitari: grande ammiratore del mondo classico greco, era anche attratto in modo particolare dalle idee di Schopenhauer²⁶ e dalle filosofie indiane.²⁷ Nella spiritualità indiana il *Karma*, l'idea che non appartiene a un singolo individuo, ma esiste e vive di generazione in generazione, è alla base di una consapevolezza universale che mette in relazione gli individui nello spazio e nel tempo e che non muore con l'individuo: è una forma più estesa e profonda di quella mitologia scientifica citata in precedenza. Da qui all'idea di continuità nel tempo e nello spazio il passo è breve e questa consapevolezza per Schrödinger, con Schopenhauer, rappresenta uno stimolo a considerare il mondo fisico in modo unitario: c'è un'unica sostanza che è la base essenziale e permanente a fronte di forme mutevoli e, d'altra parte, le forme di questa sostanza sono anche forme della nostra esperienza e quindi della nostra consapevolezza. Perciò Schrödinger trovava faticoso accettare la duplice natura statistica e dinamica delle leggi fisiche e, pur essendo convinto che la funzione d'onda Ψ con il suo significato probabilistico dia una descrizione completa del sistema fisico, indulgeva alla tentazione di recuperare una visione deterministica nel desiderio di costruire una teoria in grado di descrivere tutti i fenomeni naturali.²⁸

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **168** (1919) 1318–1320.

²⁶ Per Arthur Schopenhauer (1788–1861) il mondo non esiste se non come rappresentazione, cioè sempre e soltanto in relazione con un altro essere che lo percepisce ricorrendo alle forme a priori della coscienza: spazio, tempo e causalità. L'intelletto, nell'ordinare i dati delle intuizioni spazio-temporali attraverso la categoria della causalità, non è però in grado di portarci oltre il mondo sensibile, oltre il *fenomeno*. Come nei *Veda* indiani che definiscono la conoscenza del mondo "il velo di Maya", il fenomeno è l'illusione che vela la realtà delle cose, il *noumeno*. Ma contrariamente a Immanuel Kant (1724–1804), Schopenhauer ritiene che il noumeno sia conoscibile attraverso la volontà, tensione continua, lacerante, che si annienta nell'esperienza estetica quando viene raggiunta la consapevolezza non di sé, ma dell'oggetto intuito.

²⁷ Per una discussione del contenuto di sette quaderni di appunti filosofici scritti da Schrödinger intorno al 1918 e raccolti nei *Nachlass*, si veda J. Mehra e H. Rechenberg, *loc. cit.*, vol. V, p. 406–410.

²⁸ Si veda ad esempio l'articolo di E. Schrödinger: *Might perhaps Energy be a merely Statistical Concept? [L'energia potrebbe essere forse un concetto puramente statistico?]*, Nuovo Cimento **9** (1958) 162–170. In questo lavoro, letto il 26 marzo 1958 al Congresso congiunto della Società di Fisica e della Società di Chimica-Fisica austriache, Schrödinger sostiene che "l'opinione diffusa che il proposito di dare una descrizione oggettiva della realtà fisica debba essere abbandonato [va] respinta, basandosi sul fatto che il cosiddetto mondo esterno è costituito soltanto di elementi delle singole menti ed è caratterizzato come ciò che è comune a tutti, e riconosciuto da ogni persona sana e ragionevole. Donde è inevitabile la richiesta di una descrizione non soggettiva, naturalmente senza pregiudizio del fatto che essa sia deterministica o di altra natura".

In questo quaderno, dopo un riesame nel §2 dell'analogia formale tra ottica geometrica e meccanica del punto materiale, viene presentato un aspetto del dibattito sul significato della funzione d'onda Ψ che descrive il moto di una particella nella meccanica ondulatoria. I successi numerici ottenuti risolvendo l'equazione di Schrödinger per i sistemi atomici hanno subito imposto la domanda se la Ψ rappresenta realmente il moto di una particella o se non è piuttosto un artificio di calcolo. Il discorso, qui riprodotto, che Schrödinger tenne in occasione della sua premiazione da parte della Fondazione Nobel nel 1933, è un saggio mirabile di vivezza esplicativa nel riassumere la sua originale visione della meccanica ondulatoria.

L'interpretazione statistica della funzione d'onda, nota come interpretazione di Copenhagen, è oggi comunemente accettata. Conseguenze immediate sono una nuova definizione di ciò che si deve intendere per fenomeno fisico e l'abbandono di un determinismo causale a favore della capacità di predizione statistica, che viene ricordata nei suoi postulati nel §3. De Broglie, pur uniformandosi nel suo insegnamento ufficiale per circa 25 anni, non condivise mai nel suo intimo l'idea di una realtà inafferrabile nella sua evoluzione di tipo causale. A prova di ciò viene qui presentato un suo lavoro di rassegna del 1970, in cui riprende la proposta di un'onda che pilota il moto della particella mediante la teoria di una doppia soluzione dell'equazione di Schrödinger, una con significato statistico e una legata alla descrizione deterministica.

Queste sue idee, rifiutate dalla comunità scientifica maggioritaria fin dal loro primo apparire nel 1927, hanno trovato però nuovo vigore con i lavori di David Joseph Bohm (1917–1992) a partire dal 1951. L'interpretazione statistica sarebbe conseguenza del fatto che la meccanica quantistica è una teoria incompleta: esisterebbero variabili che rimangono nascoste, ma la cui conoscenza permetterebbe di recuperare in linea di principio la descrizione causale dei processi fisici. Il dibattito su questa possibilità si è ampliato in anni recenti, portando ad approfondire il problema dell'interazione tra osservatore, strumento di misura e oggetto osservato. Di ciò si fa breve cenno nel §4, rimandando a successivi quaderni il problema della teoria della misurazione e dei fondamenti della meccanica quantistica.

§2. Ottica geometrica e meccanica del punto

Nel vuoto la propagazione di luce monocromatica di frequenza ν nella direzione individuata dal vettore \mathbf{k} , detto *vettore d'onda*, è descritta mediante una funzione d'onda del tipo:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \quad (2.1)$$

dove $\omega = 2\pi\nu$ e $|A|^2$ determina l'intensità dell'onda. Fisicamente, la funzione Φ rappresenta per esempio il potenziale scalare del campo elettromagnetico

associato alla propagazione della luce, così come viene determinato dalle equazioni di Maxwell.

L'onda (2.1) è detta *onda piana*, perché il luogo dei punti investiti all'istante t dalla perturbazione ondulatoria è un piano ortogonale al vettore \mathbf{k} . Tale piano rappresenta il *fronte d'onda*, i cui punti vibrano con la stessa *fase* $\phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$: esso si sposta nel tempo avanzando nella direzione di \mathbf{k} e il suo moto è descritto dalla condizione

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \text{costante.} \quad (2.2)$$

I punti \mathbf{r} , in concordanza di fase lungo la direzione di \mathbf{k} , sono spazati di $\lambda = 2\pi/k$, dove λ è la *lunghezza d'onda* della radiazione luminosa; essi sono raggiunti successivamente dal fronte d'onda a intervalli temporali pari a $T = 1/\nu$, per cui il fronte avanza con velocità $v = \lambda\nu = \omega/k$, detta *velocità di fase*. Per la luce nel vuoto la velocità di fase è uguale per tutte le frequenze e coincide con la sua velocità di propagazione c .

In un mezzo omogeneo e isotropo, la velocità di fase v dipende dalla frequenza ed è inferiore a c : $v = c/n$, dove $n (>1)$ è l'*indice di rifrazione* del mezzo. Di conseguenza si riduce anche la lunghezza d'onda, ma l'onda rimane un'onda piana nel suo propagarsi. Se il mezzo non è omogeneo, l'indice di rifrazione (oltre a dipendere dalla frequenza) varia da punto a punto influenzando la dipendenza da \mathbf{r} della fase $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}) - \omega t$. Perciò anche il fronte d'onda non è più un piano, ma è individuato dalla condizione

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \text{costante} \quad (2.3)$$

e il suo avanzamento nello spazio è regolato dalla condizione di fase costante;

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}) - \omega t = \text{costante.} \quad (2.4)$$

Da un punto di vista geometrico, l'avanzamento del fronte d'onda può essere ricostruito ricorrendo al principio di Huyghens, in base al quale ogni punto del fronte d'onda Σ diventa a sua volta sorgente di luce per il mezzo circostante, emettendo onde in tutte le direzioni, che si propagano con velocità $v = c/n$ (fig. 2.1). Dopo un tempo dt , a partire dal fronte d'onda Σ si può costruire un fronte d'onda Σ' , ottenuto come involuppo di tutte le superfici sferiche di raggio vdt , centrate nei vari punti di Σ . Il raggio luminoso, che è partito dal punto P su Σ , ha raggiunto il punto P' su Σ' muovendosi in direzione perpendicolare al fronte d'onda Σ . Perciò il vettore d'onda locale risulta

$$\mathbf{k} = \nabla\phi_0. \quad (2.5)$$

Per individuare il cammino percorso da un raggio di luce monocromatica per andare dal punto P_0 al generico punto P , durante l'intervallo di tempo finito

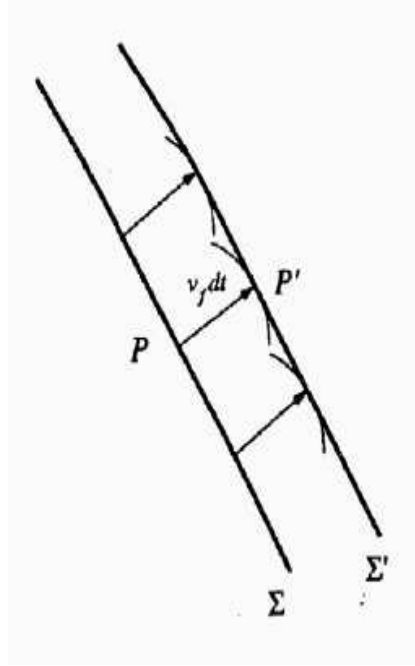


Fig. 2.1. Il fronte d'onda Σ' come inviluppo delle onde sferiche emesse dai punti di Σ , secondo il principio di Huyghens.

τ , conviene considerare un sistema di fronti d'onda generati dalla superficie Σ_0 cui appartiene P_0 (fig. 2.2). Il tempo necessario al raggio di luce per andare da P_0 a P è dato da:

$$\tau = \int_{P_0}^P \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_{P_0}^P n ds \equiv \frac{1}{c} L, \quad (2.6)$$

dove L è la lunghezza del *cammino ottico* percorso dal raggio di luce da P_0 a P .

In un mezzo rifrangente la propagazione avviene lungo una traiettoria incurvata. Ma se, in accordo con la (2.5), la propagazione viene descritta secondo traiettorie sempre perpendicolari al fronte d'onda, nella (2.6) il contributo $n ds$ va preso nella direzione del vettore \mathbf{k} , cioè perpendicolarmente al fronte d'onda. Dato che ogni altro contributo $n ds' = n ds / \cos \theta$ risulta non inferiore a $n ds$ ($|\cos \theta| \leq 1$), nella (2.6) l'intervallo di tempo τ risulta minimo lungo la traiettoria effettivamente descritta dal raggio di luce. È questo il risultato del principio di Fermat, che in termini variazionali si esprime nel modo seguente:

$$\delta L = \delta \int n ds = 0. \quad (2.7)$$

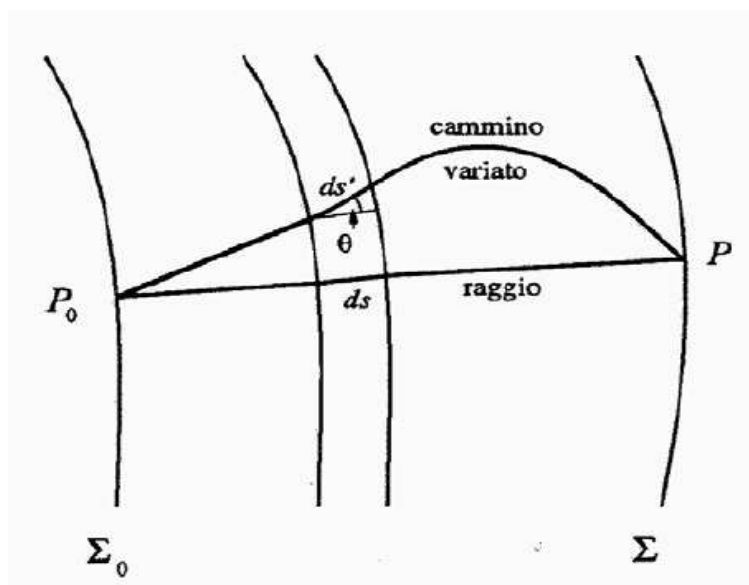


Fig. 2.1. Il principio di Fermat per la determinazione del cammino percorso dal raggio di luce.

Ne consegue che il gradiente del cammino ottico, diretto come \mathbf{k} , ha componenti pari ai coseni direttori di \mathbf{k} moltiplicati per n e quindi

$$(\nabla L)^2 = n^2. \quad (2.8)$$

Questa equazione, detta equazione dell'*iconale*,²⁹ individua i possibili cammini ottici di un sistema di raggi di luce in un mezzo di indice di rifrazione n .

In generale, in un mezzo ottico rifrangente, anche l'ampiezza A dell'onda viene a dipendere dalla posizione. La propagazione dell'onda è governata

²⁹ Il nome *iconale* deriva dal greco $\epsilon\iota\kappa\acute{\omega}\nu = immagine$ ed è stato coniato da Heinrich Bruns (1848–1919) nello stabilire i criteri generali per la formazione delle immagini nei sistemi ottici nell'ambito dell'ottica geometrica. H. Bruns: *Das Eikonale*, Abhandlungen der math.-phys. Classe der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (Lipsia) **35** (1895) 325–435.

dall'equazione di d'Alembert:³⁰

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.9)$$

Si possono cercare soluzioni della (2.9) nella forma:

$$\Phi = A(\mathbf{r}) e^{i[\phi_0(\mathbf{r}) - \omega t]}, \quad (2.10)$$

con $A(\mathbf{r})$ e $\phi_0(\mathbf{r})$ funzioni reali. Sostituendo la (2.10) nella (2.9) e separando la parte reale da quella immaginaria, si ottengono le due seguenti equazioni:

$$\nabla^2 A - A(\nabla \phi_0)^2 + \frac{\omega^2}{v^2} A = 0, \quad (2.11)$$

$$2\nabla A \cdot \nabla \phi_0 + A \nabla^2 \phi_0 = 0. \quad (2.12)$$

La quantità $\omega^2/v^2 \equiv n^2 k_0^2 = n^2 4\pi^2/\lambda_0^2$ è legata alla lunghezza d'onda λ_0 che la radiazione avrebbe nel vuoto. La (2.11) può risciversi allora nella forma:

$$\frac{1}{k_0^2} \frac{\nabla^2 A}{A} - \left[\frac{1}{k_0^2} (\nabla \phi_0)^2 - n^2 \right] = 0. \quad (2.13)$$

Nell'ipotesi che λ_0 sia piccola rispetto alla distanza su cui l'indice di rifrazione subisce sensibili variazioni, si può trascurare il primo termine della (2.13), che diventa:

$$\frac{1}{k_0^2} (\nabla \phi_0)^2 = n^2. \quad (2.14)$$

La (2.13) equivale all'equazione dell'iconale (2.8). L'equazione dell'iconale, caratteristica dell'ottica geometrica, è quindi il risultato della descrizione ondulatoria nel limite di piccole lunghezze d'onda.

La (2.12) serve a determinare l'ampiezza A e quindi l'intensità della luce.

Il moto di una particella di massa m e velocità \mathbf{v} è descritto in termini classici assegnandone ad ogni istante posizione \mathbf{r} e impulso $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$: conoscendo

³⁰ Il nome di Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783) è legato all'equazione che descrive la propagazione di un'onda e alle proprietà dell'operatore

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

che permette di riscrivere la (2.9) nella forma concisa, relativisticamente invariante:

$$\square \Phi = 0.$$

la posizione raggiunta a un certo istante, la direzione di \mathbf{p} permette di prevedere in che direzione la particella si muoverà nell'istante successivo; il modulo di \mathbf{p} ne determina la rapidità con cui verrà percorso il successivo tratto di cammino. In questo modo è possibile seguire lo sviluppo della traiettoria descritta dalla particella. Il problema del moto è quindi ricondotto alla determinazione dell'impulso \mathbf{p} istante per istante, nei punti che si trovano lungo la linea che costituisce la traiettoria effettivamente percorsa dalla particella.

Per una particella libera, l'impulso è legato alla sua energia costante E dalla relazione

$$\frac{p^2}{2m} = E. \quad (2.15)$$

Mediante la definizione della funzione

$$S(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et, \quad (2.16)$$

che ha le dimensioni di un'azione, la (2.15) può essere riscritta nella forma ³¹

$$\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (2.17)$$

La condizione

$$S(\mathbf{r}, t) = \text{costante}, \quad (2.18)$$

similmente alla (2.2), definisce un piano che avanza nella direzione di \mathbf{p} a lui perpendicolare,

$$\mathbf{p} = \nabla S, \quad (2.19)$$

con velocità di avanzamento pari a E/p . Il moto della particella avviene lungo la retta, individuata dalla direzione costante di \mathbf{p} , perpendicolarmente al piano (2.18). ³²

Mediante la funzione S la (2.15) diventa

$$(\nabla S)^2 = 2mE, \quad (2.20)$$

che ha una struttura simile all'equazione (2.8) dell'iconale.

In presenza di un campo di forze conservative, descritte dal potenziale $V(\mathbf{r})$, ancora l'energia E è costante e la (2.15) diventa

$$\frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = E. \quad (2.21)$$

³¹ La (2.17) è l'equazione di Hamilton-Jacobi per la particella libera. Karl Gustav Jacobi (1804–1851): *Vorlesungen über Dynamik*, 1843 [Lezioni sulla dinamica, pubblicate postume dal matematico Alfred Clebsch (1833–1872) (Reiner, Berlino, 1866)].

³² Si osservi che, per la (2.15), la velocità di fase E/p del piano (2.18) è pari alla metà della velocità v della particella.

Volendo conservare la definizione (2.19), conviene porre

$$S(\mathbf{r}, t) = W(\mathbf{r}, t) - Et, \quad (2.22)$$

in modo che la (2.21) si riscrive

$$(\nabla W)^2 = 2m[E - V(\mathbf{r})], \quad (2.23)$$

che è ancora della stessa forma della (2.8).

Questa analogia con l'ottica geometrica è più profonda: non solo la quantità $\{2m[E - V(\mathbf{r})]\}^{1/2} = p$ corrisponde all'indice di rifrazione n variabile da punto a punto, ma anche la funzione W corrisponde al cammino ottico L . Infatti la condizione

$$W(\mathbf{r}, t) = \text{costante}, \quad (2.24)$$

analogamente alla condizione di fase costante (2.3), definisce una superficie ad azione costante, che in presenza di un potenziale $V(\mathbf{r})$ non è più un piano e che avanza nello spazio secondo la condizione

$$S(\mathbf{r}, t) = W(\mathbf{r}, t) - Et = \text{costante}, \quad (2.25)$$

analogamente alla (2.4). La definizione (2.19) permette dunque di considerare la traiettoria descritta dalla particella come quella linea, sempre perpendicolare alla superficie ad azione costante (2.24), corrispondente al raggio di luce perpendicolare al fronte d'onda di fase costante. La velocità di avanzamento del *fronte d'onda della particella* è pari a $E/|\nabla S| = E/p$. Siccome l'energia rimane costante durante il moto, la velocità di fase con cui avanza il fronte d'onda della particella è inversamente proporzionale alla velocità della particella.

Inoltre, siccome $p ds = |\nabla S| ds = dW$, si riconosce subito che la traiettoria percorsa dalla particella a energia costante può essere determinata ricorrendo a un principio variazionale simile a quello di Fermat utilizzato nell'ottica geometrica. È questo infatti il significato del principio di Maupertuis che stabilisce la condizione

$$\delta \int p ds = 0. \quad (2.26)$$

Il principio di minima azione di Maupertuis impone la stazionarietà dell'*azione* $W = \int p ds$ lungo la linea, tra le infinite possibili, corrispondente alla traiettoria davvero percorsa, allo stesso modo in cui il principio di Fermat impone la stazionarietà del cammino ottico L .³³

³³ Questo metodo fu proposto da Pierre-Louis de Maupertuis (1698–1759) nel 1744 e successivamente ripreso da Leonhard Euler (1707–1783) e da Giuseppe Luigi Lagrange (1736–

L'analogia si completa osservando che l'identificazione della velocità di fase di un'onda di luce, ω/k , con la velocità di fase dell'onda di una particella, E/p , stabilisce una proporzionalità tra l'energia E e la frequenza ω e tra l'impulso p e il numero d'onda k . Il fattore di proporzionalità deve essere lo stesso che esiste tra l'azione W della particella e la fase ϕ dell'onda, cioè deve avere le dimensioni di un'azione. Sappiamo oggi che tale fattore, \hbar , è la costante di Planck h , divisa per 2π :

$$E = \hbar\omega, \quad p = \hbar k, \quad (2.27)$$

cioè

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad (2.28)$$

in accordo con le ipotesi di Planck-Einstein sui quanti di luce e di de Broglie sulla lunghezza d'onda di un elettrone.³⁴

A questo punto si può spingere oltre l'analogia, descrivendo il moto della particella mediante una funzione d'onda Ψ che risolva un'equazione analoga alla (2.9), cui soddisfa la funzione (2.10). Assumendo anche per la Ψ della particella libera una dipendenza temporale del tipo

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, 0) \exp(-iEt/\hbar) \quad (2.29)$$

e ponendo $\omega/v = k$, con $k^2 = (2m/\hbar^2)(E - V)$, la (2.9) diventa per la Ψ :

$$\nabla^2 \Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\Psi = 0. \quad (2.30)$$

1813). Il principio di minima azione classico, che viene indicato solitamente come principio di Hamilton, è applicato all'integrale d'azione per variazioni sincrone che rispettano le configurazioni estreme: ne risultano così le equazioni del moto nella forma canonica di Hamilton; invece il principio di minima azione di Maupertuis riguarda variazioni asincrone a fissata energia, individuando così la traiettoria effettivamente descritta durante il moto quando la hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo.

I due principi non sono equivalenti: dal principio di Hamilton si ricavano equazioni di moto che sono equazioni differenziali di secondo ordine nel tempo e che vanno risolte assegnando le condizioni iniziali. Nel principio di Maupertuis la conservazione dell'energia permette di ricavare subito un integrale primo del moto, cioè la traiettoria.

³⁴ Può sorgere il dubbio che, in virtù dell'identificazione del principio di Maupertuis con il principio di Fermat, la traiettoria descritta da una particella in un campo di forze sia la stessa compiuta dal raggio di luce. In realtà, grazie alle (2.27) e alla definizione di $n = c/v = c/\nu\lambda$, il principio di Fermat e il principio di Maupertuis possono essere scritti nella stessa forma:

$$\delta \int \frac{ds}{\lambda} = 0.$$

Ciò indica che il cammino percorso dalla particella risulta quello con il minor numero di lunghezze d'onda, come per la luce, ma non quello corrispondente al minor tempo di percorrenza, perché la velocità di fase E/p della particella *non* coincide con la sua velocità di moto, mentre per la luce la velocità di propagazione di un'onda monocromatica è sempre uguale alla velocità di fase $v = \omega/k$.

Per una particella libera ($V = 0$) si ha

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi = E\Psi, \quad (2.31)$$

che coincide con l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo se si assume

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = E\Psi. \quad (2.32)$$

Con l'ipotesi che la dipendenza temporale dell'onda Ψ , per una particella che si muove con energia costante E , sia sempre la stessa anche in presenza di potenziale, $V \neq 0$, la (2.30) diventa allora

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi, \quad (2.33)$$

che è l'equazione di Schrödinger.

L'idea fondamentale della meccanica ondulatoria † ³⁵

Nel passare attraverso uno strumento ottico, come un telescopio o un obiettivo fotografico, un raggio di luce è soggetto a una variazione di direzione in corrispondenza di ogni superficie rifrangente o riflettente. Il cammino dei raggi può essere ricostruito se si conoscono le due semplici leggi che governano il cambiamento di direzione: la legge della rifrazione, che fu scoperta da Snellius alcuni secoli orsono, ³⁶ e la legge della riflessione, nota ad Archimede più di 2000 anni fa. ³⁷ Come semplice esempio, la fig. 1 mostra un raggio $A - B$, che, in corrispondenza delle quattro superfici che delimitano le due lenti, è soggetto a una rifrazione che si deve pensare regolata dalla legge di Snellius.

Fermat definì il cammino totale del raggio di luce da un punto di vista molto più generale. In mezzi ottici diversi, la luce si propaga con velocità

† di E.Schrödinger: *Der Grundgedanke der Wellenmechanik*, in *Les Prix Nobel en 1933*, Imprimerie Royale P. A. Norstedt & Söner, Stoccolma, 1935. Testo della conferenza pronunciata a Stoccolma il 12 dicembre 1933 in occasione del ricevimento del premio Nobel.

³⁵ Viene qui utilizzato per la traduzione il testo originale in tedesco riportato nel libretto che ogni anno la Fondazione Nobel pubblica per registrare la cerimonia del conferimento. Esiste anche una traduzione inglese (*The fundamental idea of wave mechanics*), comparsa nel libro a cura della stessa Fondazione: *Nobel Lectures in Physics 1922–1941*, Elsevier Publ. Co., Amsterdam, 1965, p. 305–316.

³⁶ Willebrod Snell van Royen, secondo un costume ancora oggi prediletto dagli olandesi, aveva latinizzato il suo nome in Willebrordus Snellius: vissuto tra circa il 1581 e il 1626, si occupò di trigonometria, ricoprendo la cattedra di matematica del padre all'Università di Leida. Il suo nome è però noto principalmente per avere scoperto la legge della rifrazione, analizzando numerosi dati sperimentali raccolti soprattutto da Kepler. Un raggio luminoso, che attraversa la superficie di separazione tra due mezzi ottici (trasparenti) diversi, subisce una deviazione dal percorso originale rettilineo che è governata dalla legge:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n ,$$

dove i è l'angolo di incidenza (formato dal raggio di luce incidente e dalla normale alla superficie), r l'angolo di rifrazione (misurato allo stesso modo per il raggio che emerge nel secondo mezzo) e n è l'indice di rifrazione del secondo mezzo relativamente al primo. In generale, rispetto al vuoto, è $n > 1$. La legge della rifrazione, detta anche legge dei seni, fu scoperta indipendentemente da René Descartes (1596–1650), che la pubblicò per primo nel 1637 come risultato della teoria corpuscolare della luce. Perciò spesso la legge della rifrazione viene indicata come legge di Snell-Cartesio.

³⁷ È noto che Archimede (287 a. C. (?) – 212 a. C.), durante la seconda guerra punica, aveva fatto costruire degli specchi concavi, detti specchi ustori, in grado di concentrare la luce solare che, proiettata sulle vele delle navi romane in assedio a Siracusa, le bruciò.

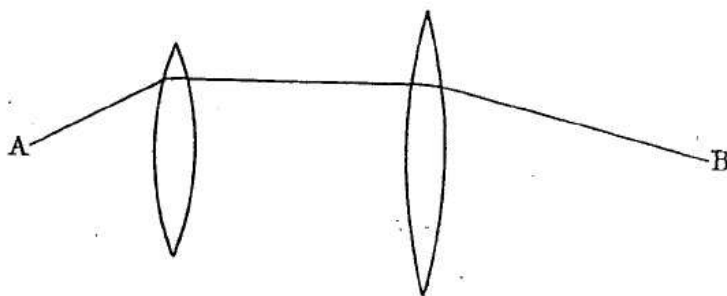


Fig. 1.

diverse e il cammino della radiazione dà l'impressione che la luce debba arrivare alla sua destinazione *il più velocemente possibile*. (Incidentalmente, si possono considerare qui come punti di partenza e di arrivo *due punti qualsiasi* lungo il raggio). La minima deviazione dal cammino effettivamente percorso significherebbe un ritardo. Questo è il famoso *principio del minimo tempo di percorrenza della luce* di Fermat, che in modo meraviglioso determina l'intero destino del raggio di luce per mezzo di un solo enunciato e include anche il caso più generale, in cui la natura del mezzo non varia repentinamente in corrispondenza di singole superfici, ma gradualmente da punto a punto. L'atmosfera della terra ne è un esempio. Più profondamente vi penetra il raggio di luce che proviene dall'esterno, più lentamente procede nell'aria che diventa via via più densa. Sebbene le differenze di velocità di propagazione siano estremamente piccole, il principio di Fermat in queste circostanze richiede che il raggio di luce si debba incurvare verso terra (fig. 2), in modo da rimanere un po' più a lungo negli strati superiori "più veloci" e raggiungere la sua destinazione più rapidamente che non attraverso il percorso rettilineo più breve (linea tratteggiata nella figura; si ignori per il momento il quadrato WWW^1W^1). Penso che tutti voi abbiate già osservato il sole, basso sull'orizzonte, apparire non rotondo, ma schiacciato: il suo diametro verticale sembra accorciato. Questa è una conseguenza della curvatura dei raggi.

Secondo la teoria ondulatoria della luce, i raggi luminosi hanno solo un significato fittizio. Essi non sono i cammini fisici percorsi da qualche particella luminosa, ma sono un artificio matematico, le cosiddette traiettorie ortogonali dei fronti d'onda, immaginarie linee di guida che in ogni posto puntano nella direzione perpendicolare alla superficie del fronte dell'onda secondo cui queste avanzano (cfr. fig. 3, che mostra il caso più semplice di onde sferiche concentriche e dei corrispondenti raggi rettilinei, mentre la fig. 4 illustra il caso di raggi incurvati). È sorprendente che un principio generale così importante come quello di Fermat si riferisca direttamente a queste linee di guida matematiche e non ai fronti d'onda e si potrebbe essere indotti a considerarlo per questa ragione come una pura curiosità matematica. Ben lungi da ciò. Esso diventa del tutto comprensibile solo dal punto di

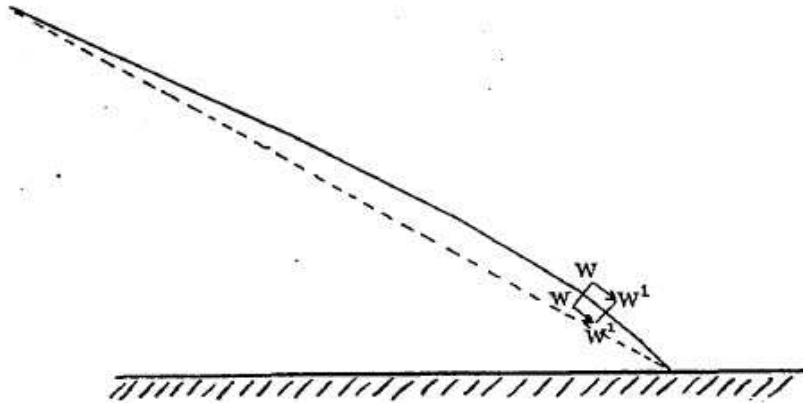


Fig. 2.

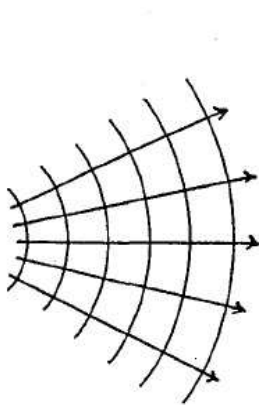


Fig. 3.

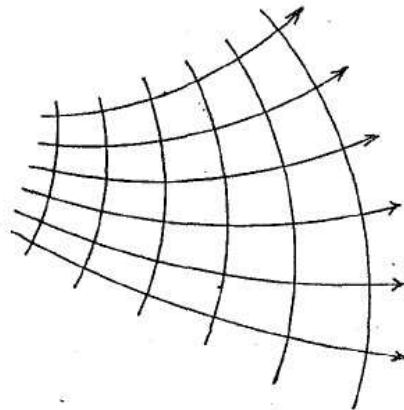


Fig. 4.

vista della teoria ondulatoria e cessa di essere un miracolo divino. Dal punto di vista ondulatorio, la cosiddetta *curvatura* del raggio di luce è molto più facilmente comprensibile in termini di una *deviazione* del fronte d'onda, che si deve verificare ovviamente quando parti vicine del fronte d'onda avanzano con velocità diverse; esattamente nello stesso modo in cui una compagnia di soldati in marcia esegue l'ordine "marcia a destra", con gli uomini che procedono con passi di diversa lunghezza, l'uomo dell'ala destra col passo più corto e quello dell'ala sinistra col passo più lungo.³⁸ Nella rifrazione atmosferica della radiazione per esempio (fig. 2), la sezione WW del fronte d'onda deve necessariamente deviare a destra verso W^1W^1 , perché la sua metà di sinistra è situata nell'aria leggermente più alta e rarefatta e perciò

³⁸ Quanto avrà giocato, per questa geniale immagine del fronte d'onda, l'esperienza del servizio militare durante la prima guerra mondiale sul fronte dell'Isonzo?

avanza più rapidamente della parte destra inferiore. † ³⁹ Con un esame più dettagliato si trova che il principio di Fermat corrisponde completamente all'enunciato banale e ovvio che – data una distribuzione locale di velocità – il fronte d'onda deve deviare nel modo indicato. Non posso dimostrarlo qui, ma cercherò di renderlo plausibile. Vi chiederò ancora di visualizzare una riga di soldati che procedono marciando. Per assicurarsi che la riga rimanga dritta, immaginiamo che gli uomini siano collegati con una lunga sbarra che ciascuno tiene stretta con le sue mani. Non viene dato alcun ordine di direzione; l'unico ordine è questo: ogni uomo marci o corra il più velocemente possibile. Se la natura del suolo varia lentamente da posto a posto, ora sarà l'ala destra, ora la sinistra che avanza più rapidamente e le variazioni di direzione avverranno spontaneamente. Dopo un certo tempo si vedrà che l'intero cammino percorso non è rettilineo, ma piuttosto incurvato. Che questo cammino incurvato sia esattamente quello per cui la destinazione raggiunta in ogni istante sia quella che è possibile raggiungere *il più rapidamente possibile* in accordo con la natura del terreno, è almeno assai plausibile, in quanto ogni uomo ha fatto del suo meglio. Si vedrà anche che la deviazione avviene anche invariabilmente nella direzione nella quale il terreno è peggiore, in modo che alla fine sembrerà che gli uomini abbiano intenzionalmente “aggirato” un posto dove sarebbero avanzati lentamente.

Il principio di Fermat appare dunque come la *banale quintessenza* della teoria ondulatoria. Fu perciò un fatto memorabile la scoperta di Hamilton che anche il vero moto dei punti materiali in un campo di forze (per esempio di un pianeta nel suo moto intorno al sole o di un sasso lanciato nel campo gravitazionale terrestre) è governato da un principio generale molto simile, che da allora porta e ha reso famoso il nome del suo scopritore. ⁴⁰ Occorre ammettere che il principio di Hamilton non dice esattamente che il punto materiale sceglie il cammino più veloce, ma esso dice qualcosa di *così* simile – l'analogia con il principio del tempo di percorrenza più breve della luce è *così* stretta, che si era posti di fronte a un dilemma. Sembrava che la Natura avesse realizzato la stessa legge due volte in modi completamente diversi: una

† Incidentalmente, desidero riferirmi a un punto in cui la visione di Snellius fallisce. Un raggio di luce emesso orizzontalmente dovrebbe rimanere orizzontale perché l'indice di rifrazione non varia in direzione orizzontale. In realtà, un raggio orizzontale si incurva più fortemente di ogni altro e ciò è evidente secondo la teoria della deviazione dei fronti d'onda.

³⁹ Un raggio con incidenza radente viene deviato secondo l'angolo *limite* nel passare da uno strato meno rifrangente a uno più rifrangente. In realtà ciò si può dedurre ancora dalla legge di Snell-Cartesio ricordata in precedenza: per un angolo di incidenza $i = 90^\circ$ si ottiene l'angolo massimo di rifrazione r con $\sin r = 1/n$. Tale angolo viene detto angolo limite, perché per un raggio, che percorra lo stesso cammino in senso inverso, è l'angolo massimo per il quale si può verificare rifrazione: per un'incidenza ad angolo superiore il raggio viene completamente riflesso alla superficie di separazione tra i due mezzi e si ha il fenomeno della *riflessione totale*.

⁴⁰ Come già sottolineato al §2, l'analogo meccanico del principio di Fermat è piuttosto il principio di Maupertuis.

prima volta nel caso della luce, per mezzo di un gioco abbastanza ovvio dei raggi; e di nuovo nel caso dei punti materiali, che non era per nulla ovvio, a meno che si attribuisse loro in qualche modo una natura ondulatoria. E ciò sembrava impossibile, dato che i “punti materiali”, per cui le leggi della meccanica avevano davvero trovato conferma sperimentale fino ad allora, erano solo i corpi grandi, visibili, talvolta *molto* grandi, i pianeti, per i quali l’idea di “natura ondulatoria” non sembrava potere entrare in discussione.

I componenti della materia più piccoli, elementari, che oggi, molto più specificatamente, chiamiamo “punti materiali”, a quel tempo erano puramente ipotetici. Solo dopo la scoperta della radioattività l’affinamento costante dei metodi di misurazione ha permesso di studiare in dettaglio le proprietà di queste particelle e permette ora di fotografare e misurare con molta esattezza (con misure di stereofotogrammetria) i cammini percorsi da tali particelle col metodo brillante di C. T. R. Wilson.⁴¹ Fino al punto in cui si estendono, queste misure confermano la validità delle stesse leggi meccaniche per le particelle e per i corpi grandi, i pianeti, ecc.⁴² Del resto però si è trovato che né la molecola né il singolo atomo possono essere considerati i “componenti ultimi”: ma piuttosto anche l’atomo è un sistema di struttura assai complessa.⁴³ Nella nostra mente si sono formate delle immagini sulla struttura degli atomi *costituiti* da particelle, immagini che sembravano avere una certa somiglianza col sistema planetario. Fu perciò naturale il tentativo successivo di considerare valide le stesse leggi del moto che si erano dimostrate così sorprendentemente soddisfacenti su larga scala. In altre parole, la meccanica di Hamilton, che, come ho detto prima, culmina nel principio di Hamilton, fu applicata anche alla *vita interna* dell’atomo. Che ci fosse un’analogia molto stretta tra il principio di Hamilton e il principio di Fermat in ottica nel frattempo si era completamente

⁴¹ Lo scozzese Charles Thomson Rees Wilson (1869–1959) aveva inventato nel 1912 una speciale camera a nebbia, in grado di visualizzare la traccia lasciata da particelle cariche nell’attraversare un gas soprassaturo, grazie ai nuclei di condensazione provocati dalla ionizzazione degli atomi del gas: *On an expansion apparatus for making visible the tracks of ionising particles in gases and some results obtained by its use [Un apparato di espansione che rende visibili le tracce di particelle ionizzanti nei gas e alcuni risultati ottenuti col suo uso]*, Proceedings of the Royal Society of London **A87** (1912) 277–292. Questo dispositivo, di importanza fondamentale nelle ricerche di fisica atomica e nucleare, gli valse la condivisione del premio Nobel del 1927 insieme con A. H. Compton che fu uno dei primi utilizzatori della camera di Wilson.

⁴² L’effetto Compton fu spiegato proprio con l’uso della camera di Wilson (A. H. Compton e A. W. Simon: *Directed quanta of scattered X-rays [Quanti direzionati di raggi X diffusi]*, Physical Review **26** (1925) 289–299). L’esperimento di Compton e Simon è solo il primo di una serie che continua ancora oggi con le tecniche visualizzanti utilizzate per rivelare le particelle elementari attraverso le tracce lasciate nei rivelatori. Queste tracce permettono il riconoscimento della particella attraverso i valori di energia e di impulso che si ricavano con l’uso delle leggi generali della meccanica classica del punto materiale.

⁴³ “Atomo” deriva dalla radice del vocabolo greco τέμνειν = tagliare, preceduta da una α privativa: significa pertanto “ciò che non si può ulteriormente suddividere”. Ma questa è una definizione che risale ai filosofi naturalisti ionic del quinto secolo a. C. e a Democrito di Abdera (Tracia), vissuto tra la metà del quinto secolo e circa il 370 a. C.

dimenticato. Se mai qualcuno se ne fosse ricordato, lo avrebbe considerato nulla più che un aspetto curioso della teoria matematica.

Ora è molto difficile, senza addentrarsi in ulteriori dettagli, comunicare una corretta idea del successo o del fallimento di queste immagini di meccanica classica per l'atomo. Da un lato, il principio di Hamilton in particolare si è dimostrato la guida più fedele e attendibile, cosa che era comunque inevitabile; d'altra parte però si doveva sopportare, per rendere giustizia ai fatti, la pesante interferenza di postulati interamente nuovi e incomprensibili, le cosiddette condizioni quantiche e i postulati della teoria dei quanti. Una stridente disarmonia nella sinfonia della meccanica classica – tuttavia stranamente familiare – risuonava come proveniente dallo stesso strumento. In termini matematici possiamo formulare ciò nel modo seguente: mentre il principio di Hamilton postula semplicemente che un dato integrale sia minimo, senza che il valore numerico del minimo sia stabilito da questo postulato, viene ora richiesto che il valore numerico del minimo sia limitato a multipli interi di una costante universale, il quanto d'azione di Planck.⁴⁴ E ciò solo accidentalmente. La situazione era abbastanza disperata. Se la vecchia meccanica avesse fatto completo fallimento, non sarebbe poi stato tanto male. Ci sarebbe stata via libera allo sviluppo di un nuovo sistema di meccanica. Per come stavano le cose, si era posti di fronte al compito difficile di salvare l'*anima* del vecchio sistema, la cui ispirazione chiaramente dominava in questo microcosmo, e allo stesso tempo di blandirlo come se dovesse accettare le condizioni quantiche non come una grossa interferenza, ma come se discendessero dalla sua stessa essenza intima.⁴⁵

La via d'uscita sta proprio nella possibilità, già indicata prima, di attribuire al principio di Hamilton anche il modo di operare di un meccanismo ondulatorio, su cui sono basati essenzialmente i processi della meccanica del punto materiale, proprio come ci si era abituati a fare da tempo nel caso dei fenomeni correlati con la luce e il principio di Fermat che li governa. Perciò la traiettoria individuale di un punto materiale perde sicuramente il proprio

⁴⁴ Le condizioni quantiche qui ricordate sono quelle di Bohr–Sommerfeld per i moti periodici, in base alle quali l'integrale d'azione esteso a un periodo del moto è un multiplo intero del quanto elementare d'azione h :

$$\oint p dq = n h.$$

Niels Henrik David Bohr (1885–1962): *On the constitution of atoms and molecules* [*Struttura degli atomi e delle molecole*], *Philosophical Magazine* **26** (1913) 1–25, 476–502, 857–875; Arnold Sommerfeld (1868–1951): *Zur Quantentheorie der Spektrallinien* [*Teoria quantistica delle righe spettrali*], *Annalen der Physik* **51** (1916) 1–94, 125–167.

⁴⁵ Tutto lo sforzo della scuola di Göttingen, dove lavoravano Max Born (1882–1970), Werner Heisenberg (1901–1976) e Pascual Jordan (1902–1980), era in questa direzione. Per un'esposizione dettagliata della meccanica atomica concepita in questo senso, immediatamente prima che sorgesse la nuova meccanica quantistica, si veda il testo di M. Born: *Vorlesungen über Atommechanik*, Springer, Berlino, 1925.

significato fisico e diventa qualche cosa di fittizio come un singolo raggio di luce isolato. ⁴⁶ Però l'anima della teoria, il principio di minimo, rimane non solo intatta, ma rivela il suo vero e semplice significato solo sotto l'aspetto ondulatorio, come già spiegato. La nuova teoria in realtà non è affatto *nuova*, ma è uno sviluppo completamente organico, si sarebbe piuttosto tentati di dire una spiegazione più raffinata della vecchia teoria.

Come fu allora possibile che questa nuova spiegazione “più raffinata” portasse a risultati considerevolmente diversi? che cosa le permise, quando applicata all'atomo, di ovviare alle difficoltà che la vecchia teoria non aveva saputo affrontare? Che cosa le permise di rendere sopportabile la pesante interferenza o addirittura di farla propria?

Anche questi argomenti possono essere illustrati meglio con un'analogia ottica. Molto opportunamente, infatti, ho definito prima il principio di Fermat la quintessenza della teoria ondulatoria della luce. Tuttavia esso non può rendere superfluo un più esatto studio del processo ondulatorio stesso. I cosiddetti fenomeni di rifrazione e di interferenza luminosa si possono comprendere solo se si segue il processo in dettaglio, in quanto ciò che importa è non solo la destinazione finale dell'onda, ma anche se a un certo istante essa vi arriva con una cresta d'onda o con un minimo. Nei dispositivi sperimentali più vecchi e grossolani questi fenomeni avvenivano come piccoli dettagli e sfuggivano all'osservazione. Non appena furono notati e interpretati correttamente per mezzo delle onde, è stato facile escogitare esperimenti in cui la natura ondulatoria della luce si manifesta non solo in piccoli dettagli, ma anche su scala molto grande, nell'intero carattere del fenomeno stesso.

Permettetemi di illustrare questo punto con due esempi, il primo dei quali è quello di uno strumento ottico, come un telescopio, un microscopio, ecc. Con tale strumento lo scopo è quello di ottenere un'immagine nitida, cioè si vuole che i raggi emergenti da un punto oggetto si riuniscano in un punto, il cosiddetto punto immagine (fig. 5a). Si è creduto dapprima che ci fossero solo difficoltà di tipo ottico-geometrico che lo impedivano: infatti esse sono comunque grandi. Più tardi si è scoperto che, anche negli strumenti meglio concepiti, il foceggiamento dei raggi era considerevolmente inferiore a quanto ci si sarebbe aspettato se ogni raggio obbedisse davvero al principio di Fermat, indipendentemente dai raggi vicini. La luce che proviene da un punto oggetto e che viene ricevuta dallo strumento si riunisce al di là di esso non più in un sol punto, ma si distribuisce su una piccola area circolare, il cosiddetto disco di diffrazione, che per altro nella maggior parte dei casi è un cerchio solo perché le aperture e i contorni delle lenti in genere sono circolari. E ciò perché la causa del fenomeno che chiamiamo *diffrazione* è che non tutte le onde sferiche emergenti dal punto oggetto possono essere accettate dallo strumento. I bordi

⁴⁶ Ciò è in accordo con le relazioni di indeterminazione che conseguono dai postulati della meccanica quantistica (cfr. §3).

delle lenti e ogni apertura ritagliano solo una parte dei fronti d'onda (cfr. fig. 5b) e – se mi consentite di usare un'espressione più viva – i margini feriti fanno resistenza a rinsaldarsi in un punto, provocando l'immagine in qualche modo confusa o vaga. Il grado di defocaggio è strettamente legato alla *lunghezza d'onda* della luce ed è del tutto inevitabile a causa di questo profondo legame teorico. Appena notato all'inizio, esso governa e limita le prestazioni del moderno microscopio in cui ogni altro errore di riproduzione è stato posto sotto controllo. Di oggetti, le cui dimensioni non siano molto più grandi oppure del tutto più piccole della lunghezza d'onda della luce, si ottengono immagini che assomigliano solo lontanamente o per nulla all'originale.⁴⁷

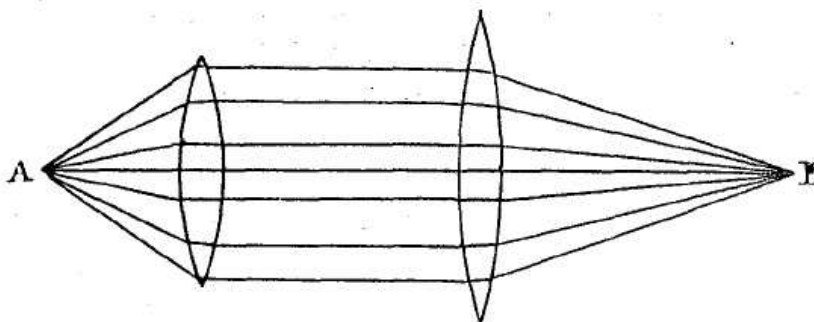


Fig. 5a.

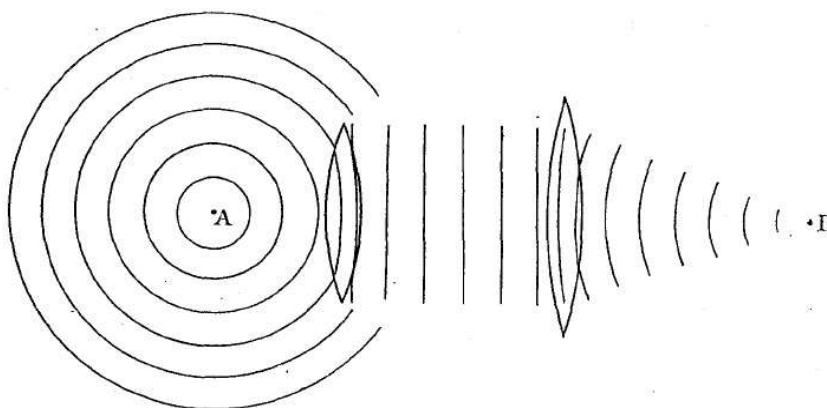


Fig. 5b.

Un secondo esempio, anche più semplice, è l'ombra che un ostacolo opaco getta su uno schermo quando viene illuminato da una piccola sorgente di luce puntiforme. Per costruire la forma dell'ombra, si deve seguire ogni

⁴⁷ Qui Schrödinger ha dato vita alla definizione del potere risolutivo di un microscopio, limitato dalla lunghezza d'onda della luce utilizzata.

raggio luminoso e si deve stabilire se il corpo opaco gli impedisce o no di raggiungere lo schermo. L' *orlo* dell'ombra è formato da quei raggi luminosi che passano sfiorando appena il contorno del corpo. L'esperienza ha dimostrato che l'orlo dell'ombra non è assolutamente nitido, anche con una sorgente di luce puntiforme e un ostacolo che provoca l'ombra che abbia bordi nitidi. La ragione di ciò è ancora la stessa del primo caso. Il fronte d'onda è come se venisse diviso in due dal corpo (cfr. fig. 6) e le tracce di questa ferita risultano nel margine sfumato dell'ombra, cosa che sarebbe incomprensibile se i singoli raggi luminosi fossero entità a sé stanti che avanzano indipendentemente uno dall'altro senza riferimento reciproco.

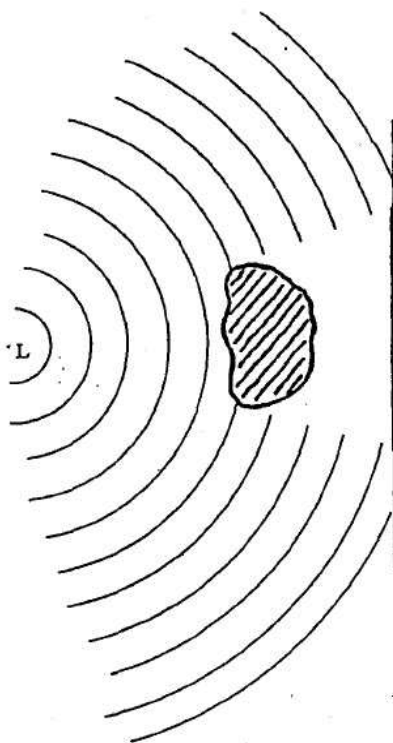


Fig. 6.

Questo fenomeno – che è ancora indicato come diffrazione – non è di regola osservabile con i corpi grandi. Ma se il corpo che fa ombra è molto piccolo almeno in una dimensione, la diffrazione si manifesta innanzi tutto nel fatto che l'ombra vera e propria non si forma per nulla e, in secondo luogo – cosa molto più sorprendente – nel fatto che il piccolo corpo stesso diventa a sua volta come una sorgente che irraggia luce in tutte le direzioni (soprattutto preferenzialmente a piccoli angoli rispetto alla luce incidente). Ognuno di voi conoscerà senza dubbio la cosiddetta “polvere di sole” in un fascio di luce che penetra in una stanza buia. Sottili foglie d'erba e i fili di una ragnatela

sulla cresta di una collina dietro cui si nasconde il sole, o i capelli sciolti di una persona che sta in piedi con alle spalle il sole, spesso si illuminano miracolosamente per la luce diffratta, e la possibilità di vedere il fumo e la nebbia è basata su questo fenomeno. La luce non proviene in realtà dal corpo stesso, ma dalle sue immediate vicinanze, una regione in cui si verifica una notevole interferenza con i fronti d'onda della luce incidente. È interessante, e importante per ciò che segue, osservare che la zona di interferenza ha sempre e in ogni direzione l'estensione almeno di una o di qualche lunghezza d'onda, indipendentemente da quanto piccola possa essere la particella che provoca il disturbo. Ancora una volta perciò osserviamo una stretta correlazione tra il fenomeno di diffrazione e la lunghezza d'onda. Ciò è forse illustrato in modo più intuitivo riferendoci a un altro processo ondulatorio, cioè il suono. A causa della lunghezza d'onda molto più grande, che è dell'ordine dei centimetri e dei metri, la formazione dell'ombra viene meno nel caso del suono e la diffrazione gioca il ruolo principale e importante praticamente: possiamo facilmente *sentire* una persona che ci chiama da dietro un alto muro o l'angolo di una solida casa, anche se non la possiamo *vedere*.

Torniamo dall'ottica alla meccanica ed esploriamo l'analogia in tutta la sua estensione. Al *vecchio* sistema meccanico corrisponde in ottica il modo di operare concettualmente con raggi di luce isolati e reciprocamente indipendenti. La nuova meccanica ondulatoria corrisponde alla teoria ondulatoria della luce. Quello che si è guadagnato nel passare dal vecchio al nuovo punto di vista è che i fenomeni di diffrazione possono essere sistemati o, detto meglio, ciò che si è guadagnato è qualche cosa di strettamente analogo ai fenomeni di diffrazione della luce e che nel complesso deve essere, come lì, molto irrilevante, altrimenti il vecchio punto di vista della meccanica non sarebbe stato così a lungo del tutto soddisfacente. Tuttavia, non è difficile fare la congettura che il fenomeno trascurato possa in certe circostanze diventare molto apprezzabile, dominare completamente il processo meccanico e sottoporre il vecchio sistema a un vaglio senza soluzioni, se *l'intero sistema meccanico è confrontabile nella sua estensione con le lunghezze d'onda delle "onde di materia"*, che giocano lo stesso ruolo nei processi meccanici che giocavano le onde luminose nei processi ottici.

Questa è la ragione per cui in questi sistemi minuscoli, gli atomi, il vecchio punto di vista era destinato a fallire, in quanto, pur rimanendo intatto come prima approssimazione per i processi meccanici su larga scala, non è però più adeguato per il delicato gioco di interferenza in regioni dell'ordine di grandezza di una o di qualche lunghezza d'onda. È stato stupefacente osservare il modo in cui tutti questi strani requisiti addizionali si siano sviluppati spontaneamente dal nuovo punto di vista ondulatorio, mentre dal vecchio punto di vista venivano forzati ad adattarsi alla vita intima dell'atomo in modo da fornire una qualche spiegazione dei fatti osservati.

Si vede che il punto saliente dell'intera questione è che i diametri atomici e

la lunghezza d'onda delle ipotetiche onde di materia sono approssimativamente dello stesso ordine di grandezza. E ora certamente vi domanderete se si deve considerare un puro caso che nella nostra continua analisi della struttura della materia ci si sia imbattuti nell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda proprio a questo punto, o se ciò è in qualche misura comprensibile. Inoltre, vi chiederete come mai sappiamo che è così, dato che le onde di materia sono un requisito della teoria interamente nuovo, sconosciuto in ogni altro contesto. O non è semplicemente che questa è un'ipotesi che si doveva fare?

Ora, l'accordo tra gli ordini di grandezza non è un puro caso e non è necessaria alcuna speciale ipotesi su ciò; esso segue automaticamente dalla teoria nel notevole modo seguente. Che il *nucleo* pesante di un atomo sia molto molto più piccolo dell'atomo e possa quindi essere considerato come un centro puntiforme di attrazione nel ragionamento che segue, può essere considerato un fatto stabilito sperimentalmente dagli esperimenti di diffusione dei raggi alfa di Rutherford e Chadwick.⁴⁸ Invece degli *elettroni* introduciamo le ipotetiche onde, le cui lunghezze d'onda sono lasciate completamente indeterminate a causa del fatto che non ne sappiamo nulla. Ciò lascia nei nostri calcoli una lettera, diciamo *a*, che indica un numero ancora sconosciuto. Però in questi calcoli siamo abituati a ciò e la cosa non ci impedisce di calcolare che il nucleo atomico debba produrre una specie di fenomeno di diffrazione in queste onde, in modo simile a quanto fa la minuscola particella di polvere con le onde luminose. Proprio come in questo caso, si verifica che l'estensione della zona di interferenza con cui si circonda il nucleo e la lunghezza d'onda siano in stretta connessione e con dimensioni dello stesso ordine di grandezza. Quanto siano grandi, dobbiamo lasciarlo aperto; ma ora viene il passo più importante: *noi identifichiamo la zona di interferenza, l'alone di diffrazione, con l'atomo; noi affermiamo che l'atomo in realtà non è altro che il fenomeno di diffrazione*

⁴⁸ L'anomala diffusione a grandi angoli subita dalle particelle α nell'esperimento di Ernest Rutherford of Nelson (1871–1937) è alla base dell'idea che esiste un nucleo dell'atomo con dimensioni molto più piccole dell'atomo stesso: *The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom [Diffusione di particelle α e β da parte di materia e struttura dell'atomo]*, Philosophical Magazine **21** (1911) 669–688.

Rutherford, all'epoca di questo esperimento, aveva già ricevuto il premio Nobel per la Chimica del 1908 per i suoi studi sulla disintegrazione degli elementi e sulla chimica delle sostanze radioattive.

James Chadwick (1891–1974) lavorò dal 1919 con Rutherford nel Cavendish Laboratory dove riuscì a mostrare che la nuova radiazione, messa in evidenza da Frédéric Joliot (1900–1958) e Irène Joliot-Curie (1897–1956), era dovuta a particelle neutre della stessa massa del protone. La breve nota da lui spedita il 17 febbraio 1932 alla rivista *Nature*, che la pubblicò nel fascicolo del 27 febbraio (*Possible Existence of a Neutron [Possibile esistenza di un neutrone]*, *Nature* **129** (1932) 312), segna, con il successivo lavoro (*The existence of the Neutron*, *Proceedings of the Royal Society of London A* **136** (1932) 692–708), l'inizio delle ricerche sulla fisica dei nuclei atomici. Per la scoperta del neutrone Chadwick ricevette il premio Nobel per la Fisica nel 1935. Nello stesso anno i coniugi Joliot-Curie furono insigniti del premio Nobel per la Chimica per i loro studi sulla radioattività artificiale.

*di un'onda di elettrone che è come se venisse catturata dal nucleo atomico.*⁴⁹ Allora non è più un caso che le dimensioni atomiche e la lunghezza d'onda siano dello stesso ordine di grandezza: diventa una cosa naturale. Non conosciamo il valore numerico di nessuno dei due, perché abbiamo ancora nei nostri conti una costante indeterminata che abbiamo chiamata a . Ci sono due modi possibili di determinarla, che forniscono un riscontro reciproco. In primo luogo, possiamo sceglierla in modo che le manifestazioni della vita dell'atomo, soprattutto le righe spettrali emesse, risultino corrette quantitativamente; dopo tutto, ciò può essere misurato molto accuratamente. In secondo luogo possiamo scegliere a in modo che l'alone di diffrazione acquisti le dimensioni richieste per l'atomo. Queste due determinazioni di a (di cui la seconda è certamente di gran lunga più imprecisa perché le "dimensioni atomiche" non sono un termine chiaramente definito) *sono in completo accordo tra di loro*. In terzo luogo, possiamo infine osservare che la costante rimasta indeterminata, da un punto di vista fisico non ha in realtà le dimensioni di una lunghezza, ma di un'azione, cioè energia \times tempo. È quindi un passo ovvio sostituirvi il valore numerico della costante del quanto d'azione universale di Planck, che è noto con precisione dalle leggi della radiazione termica. Si vede così che, con precisione completa e considerevole, *si ritorna alla prima determinazione* (accuratissima).

In termini quantitativi, la teoria perciò manovra un numero minimo di ipotesi nuove. Essa contiene una sola costante disponibile, alla quale deve essere assegnato un valore numerico ben noto dalla vecchia teoria dei quanti,

⁴⁹ Le prime misure sulle dimensioni atomiche mediante l'uso di fasci di elettroni si possono fare risalire alla misura del libero cammino medio degli elettroni di bassa energia in vari gas inerti. L'azzerarsi della sezione d'urto (effetto Ramsauer) in corrispondenza di valori caratteristici di energia (0.75–1.10 eV) poteva essere messa in relazione con le dimensioni della regione di efficacia del potenziale di interazione tra elettrone e atomo (Carl Ramsauer (1879–1955): *Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen [Sezione d'urto di molecole di gas sottoposte a elettroni lenti]*, *Annalen der Physik* **64** (1921) 513–540; **66** (1921) 546–558; **72** (1923) 345–352). Ma le prime figure di diffrazione prodotte nella diffusione atomica di elettroni sono state realizzate da Nevill Francis Mott (1905–1996): *The Scattering of Fast Electrons by Atomic Nuclei [La diffusione di elettroni veloci da parte di nuclei atomici]*, *Proceedings of the Royal Society of London A* **124** (1929) 425–442. Per una rassegna di queste prime misure e della teoria quantistica della diffusione, si veda il testo di N. F. Mott e Harrie Stewart Wilson Massey (1908–1983): *The Theory of Atomic Collisions*, Oxford at the Clarendon Press, 1933, e successive edizioni. Mott condivise il premio Nobel per la Fisica del 1977 con Philip Warren Anderson (n. 1923) e John Hasbrouck Van Vleck (1899–1980) per gli studi teorici sulla struttura elettronica e sulle proprietà magnetiche di un sistema disordinato. Per la misura delle dimensioni dei nuclei e dei loro protoni e neutroni costituenti, occorre attendere fino a metà degli anni cinquanta, quando le tecniche di accelerazione consentirono la realizzazione di fasci di elettroni di energia di qualche centinaio di MeV. Gli esperimenti fatti a Stanford da Robert Hofstadter (1915–1990) e collaboratori sono da lui illustrati, per esempio, in: *Nuclear and Nucleon Scattering of High-Energy Electrons*, *Annual Review of Nuclear Science* **7** (1957) 231–316. Una raccolta dei lavori fondamentali sull'argomento si trova nel testo di R. Hofstadter: *Nuclear and Nucleon Structure. A Collection of Reprints with an Introduction*, W. A. Benjamin, New York, 1963. Per questi studi Hofstadter è stato insignito del premio Nobel per la Fisica del 1961, condividendolo con Rudolph Mössbauer (n. 1929).

in primo luogo per attribuire all'alone di diffrazione le giuste dimensioni, in modo da poterlo identificare ragionevolmente con l'atomo, e in secondo luogo per valutare correttamente e quantitativamente tutte le manifestazioni della vita degli atomi, la luce da loro irraggiata, l'energia di ionizzazione, ecc.

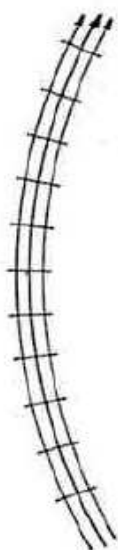


Fig. 7.

Ho cercato di presentarvi l'idea fondamentale della teoria ondulatoria della materia nella forma più semplice possibile. Lasciatemi ora confessare che – nel mio desiderio di non confondere le idee fin dal principio – ho dipinto un bel quadro. Non per ciò che riguarda l'alto grado con cui ogni conclusione tratta con sufficiente rigore sia confermata dall'esperienza, ma per quanto riguarda la facilità e la semplicità concettuale con cui si possono raggiungere queste conclusioni. Non parlo qui delle difficoltà matematiche, che alla fine risultano sempre banali, ma delle difficoltà concettuali. Naturalmente non è difficile dire che si passa dal concetto di *traiettoria* a un sistema di fronti d'onda a lui perpendicolari. Però i fronti d'onda, anche se se ne vuole considerare solo piccole porzioni (v. fig. 7), includono almeno uno stretto *fascio* di possibili traiettorie, rispetto alle quali si trovano nella stessa relazione di perpendicolarità. Secondo il vecchio punto di vista, ma non secondo il nuovo, in ogni singolo caso concreto ognuna di loro, quella “realmente percorsa”, è distinta da tutte le altre, che sono “solo possibili”. Ci troviamo di fronte alla totale forza dell'opposizione logica ⁵⁰ tra un

o – o (meccanica del punto)

⁵⁰ L'opposizione logica tra la meccanica del punto e la meccanica ondulatoria ricorda quella tra la logica classica aristotelica del *tertium non datur* (che corrisponderebbe al latino *aut-*

e un

sia – sia (meccanica ondulatoria).

Ciò non sarebbe molto grave, se si trattasse in realtà di abbandonare totalmente il vecchio sistema per *sostituirlo* col nuovo. Sfortunatamente, le cose non stanno così. Dal punto di vista della meccanica ondulatoria, la schiera infinita di possibili traiettorie sarebbe un puro artificio, nessuna di esse avrebbe la prerogativa sull'altra di essere quella realmente percorsa nel caso individuale. Però, come ho già accennato prima una volta, in certi casi abbiamo davvero osservato queste traiettorie individuali delle particelle. La rappresentazione ondulatoria può riprodurre questo aspetto o per nulla affatto o solo in modo molto imperfetto. Troviamo maledettamente difficile interpretare le tracce che *vediamo* come nulla più di fasci stretti di traiettorie ugualmente possibili tra le quali i fronti d'onda stabiliscono dei collegamenti trasversali. Pure, questi collegamenti sono necessari per la comprensione dei fenomeni di diffrazione e di interferenza che si possono mettere in evidenza per la stessa particella con la stessa plausibilità – e ciò su grande scala, non già come conseguenza delle idee teoriche sull'interno dell'atomo di cui si parlava prima. Le condizioni sono proprio tali che, in ogni singolo caso concreto, non succede mai che i due aspetti diversi portino a prevedere risultati diversi compiendo un certo esperimento. Però non si può continuare a destreggiarsi con quei cari vecchi termini, apparentemente indispensabili, di “reale” e “solo possibile”: non si può mai dire che cosa in realtà *sia* o che cosa in realtà *avvenga*, ma grosso modo si può solo dire che cosa *verrà osservato* in ogni caso singolo concreto. Dobbiamo accontentarci per sempre di questa situazione ...? In linea di principio, sì. In linea di principio, non c'è nulla di nuovo nel postulato che alla fine la scienza esatta dovrebbe tendere a null'altro che a una descrizione di ciò che è davvero osservato. La questione riguarda solo se da ora in avanti dobbiamo esimerci dalla descrizione finora legata a una chiara ipotesi sulla reale natura del mondo. Ci sono molte persone che vorrebbero pronunciare tale atto di rinuncia già oggi. Ma io credo che ciò significhi rendersi le cose un po' troppo facili.⁵¹

Definirei lo stato attuale della nostra conoscenza nel modo seguente. I raggi o le traiettorie delle particelle corrispondono a un rapporto *longitudinale* del processo di propagazione (cioè *nella direzione* della propagazione), il fronte d'onda d'altra parte corrisponde a un rapporto *trasversale* (cioè *perpendicolare* a essa). *Entrambi* i rapporti sono senza dubbio reali; uno è dimostrato dalle fotografie delle traiettorie delle particelle, l'altro dagli esperimenti di

aut) e quella (corrispondente al latino *vel-vel*) che richiama la logica indiana delle molte possibilità e che può portare anche alla *coincidentia oppositorum*.

⁵¹ Qui Schrödinger ha chiarissima di fronte a sé l'interpretazione statistica della meccanica quantistica, come sviluppata dalla scuola di Copenhagen. Ha però altrettanto viva l'insoddisfazione per certi aspetti di tale interpretazione.

interferenza. Combinarli entrambi in un quadro unitario finora si è rivelato impossibile. Solo in casi estremi predomina o il rapporto trasversale, strati-forme, oppure quello longitudinale, radiale, in misura tale che noi *pensiamo* di poterci accontentare solo dell'aspetto ondulatorio oppure solo dell'aspetto corpuscolare.⁵²

⁵² Questa immagine della trasversalità del fronte d'onda e della direzione longitudinale dei raggi di luce rispetto alla direzione di propagazione dell'onda di materia o del moto di una particella è un'originale revisione del principio di complementarità, che per Bohr costituisce uno dei pilastri della nuova interpretazione dei fenomeni naturali (il dualismo onda-corpuscolo rappresenta due facce della stessa realtà, che non intervengono mai simultaneamente: in un esperimento, atto a rivelare gli aspetti ondulatori della materia, si perde la possibilità di metterne in evidenza gli aspetti corpuscolari, e viceversa). E il ricorso al nostro *pensiero* nel processo di descrizione dei fenomeni naturali riprende il concetto di *consapevolezza*, introducendo un elemento di soggettività che disturbava anche Schrödinger, nonostante la sua inclinazione alle filosofie indiane. Prova ne sia che un paio d'anni dopo aver pronunciato questo discorso propone il seguente esempio.

“Si possono anche costruire casi del tutto burleschi. Si rinchioda un gatto in una scatola d'acciaio insieme con la seguente macchina infernale (che occorre proteggere dalla possibilità d'essere afferrata direttamente dal gatto): in un contatore di Geiger si trova una minuscola porzione di sostanza radioattiva, *così* poca che nel corso di un'ora *forse* uno dei suoi atomi si disintegra, ma anche in modo parimente verisimile nessuno; se ciò succede, allora il contatore lo segnala e aziona un relais di un martelletto che rompe una fiala con del cianuro. Dopo avere lasciato indisturbato questo intero sistema per un'ora, si direbbe che il gatto è ancora vivo *se* nel frattempo nessun atomo si è disintegrato. La prima disintegrazione atomica lo avrebbe avvelenato. La funzione ψ dell'intero sistema porta ad affermare che in essa il gatto vivo e il gatto morto non sono stati puri, ma miscelati con uguale peso” (*Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik [La situazione attuale della meccanica quantistica]*, *Naturwissenschaften* **23** (1935) 807–812, 823–828, 844–849; l'esempio citato è a pagina 812).

È solo aprendo la scatola che si può decidere il destino del gatto “riducendo” la sua funzione d'onda: la consapevolezza dell'osservatore determina la realtà del gatto.

Per una divertente discussione su questo e altri simili aspetti sconvolgenti della fisica quantistica, si veda il libro di John Gribbon: *In Search of Schrödinger's Cat. The Startling Word of Quantum Physics Explained*, Wildwood House, Londra, 1984.

§3. I postulati elementari della meccanica quantistica

Il dualismo onda-corpuscolo, messo in evidenza dall'analogia tra ottica geometrica e meccanica hamiltoniana, non è solo una curiosità matematica. Il comportamento corpuscolare della luce, ipotizzato da Einstein nella sua spiegazione dell'effetto fotoelettrico, è stato rivelato dagli esperimenti di Compton sulla diffrazione dei raggi X ; ciò suggerisce l'idea di una coesistenza delle onde luminose (che subiscono diffrazione e interferenza) e dei fotoni (quanti di luce che possono urtare gli elettroni di un atomo). Il comportamento ondulatorio delle particelle, intuito da de Broglie sulla base dell'analogia formale tra il principio di Fermat e il principio di minima azione, ha trovato inattesa conferma sperimentale attraverso l'interpretazione dei risultati di Davisson e Germer: anche gli elettroni possono subire la diffrazione.⁵³ Dunque la soluzione $\Psi(\mathbf{r}, t)$ dell'equazione di Schrödinger (2.33), mediante il suo modulo quadrato, deve essere in grado di spiegare l'intensità della radiazione diffratta di un fascio di elettroni, così come l'intensità della luce è data dal modulo quadrato della funzione associata all'onda luminosa.

Però nella descrizione ondulatoria della luce si considerano simultaneamente più particelle: l'effetto fotoelettrico ha messo in evidenza che l'intensità dell'onda di luce è proporzionale al numero di fotoni che interagiscono con la materia.⁵⁴ Viene quindi naturale pensare che anche nella descrizione ondulatoria degli elettroni occorra considerare il moto non di un singolo elettrone, ma di tanti contemporaneamente. Allora la $\Psi(\mathbf{r}, t)$ non è una proprietà della singola particella, ma piuttosto risulta associata a un insieme di particelle.

Se ci si vuole ricondurre allo studio del comportamento di una particella dell'insieme, bisogna introdurre concetti statistici. Le modulazioni spaziali di $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$, corrispondenti alla maggiore o minore intensità della radiazione, possono essere riferite alla singola particella se si invoca la nozione di probabilità: $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r}$ rappresenta la probabilità di trovare la particella nel volume $d\mathbf{r}$ all'istante t . In tal modo l'equazione di Schrödinger governa la variazione di probabilità nel tempo, non le vicende temporali di un particolare corpuscolo.

Nella descrizione ondulatoria si perde dunque la determinazione strettamente causale della meccanica hamiltoniana, che è in grado di predire con esattezza il valore di una qualunque quantità osservabile associata a una specifica particella, qualora si conoscano a un certo istante la sua posizione e il suo impulso. Nella meccanica ondulatoria, una volta preparato il sistema

⁵³ Clinton Joseph Davisson (1881–1958) e Lester Halbert Germer (1896–1971): *Diffraction of electrons by a crystal of nickel* [Diffrazione di elettroni da parte di un cristallo di nichel], *Physical Review* **30** (1927) 705–740.

⁵⁴ Philipp Eduard Anton von Lenard (1862–1947): *Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht* [Produzione di raggi catodici mediante luce ultravioletta], *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Wien)* **108** (1899) 1649–1666; *Über die Lichtelektrische Wirkung* [L'azione fotoelettrica], *Annalen der Physik* **8** (1902) 149–198.

all'istante iniziale, assegnata cioè la $\Psi(\mathbf{r}, 0)$, l'equazione di Schrödinger fornisce, in modo perfettamente deterministico, la $\Psi(\mathbf{r}, t)$ ad ogni altro istante successivo. Però con la Ψ si possono soltanto formulare previsioni sul comportamento di una particella attraverso il calcolo della probabilità di trovarla in un certo posto. In particolare è possibile prevedere le posizioni delle frange di diffrazione provocate su una parete da un fascio di particelle che hanno attraversato la fenditura di uno schermo, ma non il preciso punto della parete colpito da una specifica particella. La meccanica quantistica dunque è essenzialmente una teoria statistica, in grado di descrivere i processi fisici attraverso il *calcolo del valor medio* che una quantità fisica può assumere, quando viene misurata su un insieme di sistemi fisici identici, e non la previsione del valore preciso che questa quantità assume in un sistema particolare.⁵⁵

Questa interpretazione statistico-probabilistica emerse a fatica in seno alla comunità dei fisici, in seguito a vivaci discussioni e non senza illustri oppositori.⁵⁶

Schrödinger stesso, dopo avere introdotto la sua equazione, aveva cercato di interpretare la quantità $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$, moltiplicata per la carica e della particella, come la densità della sua carica elettrica. Questa interpretazione è possibile a prima vista, se si riconosce con Schrödinger che si può costruire un'equazione di continuità derivante direttamente dall'equazione (2.33). Infatti se si moltiplica per Ψ^* la (2.33) e per Ψ la sua complessa coniugata, sottraendo membro a membro le due equazioni così ottenute, si trova:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (3.1)$$

dove si sono definite le seguenti quantità

$$\rho = |\Psi|^2, \quad (3.2)$$

⁵⁵ L'idea del ricorso a un'interpretazione statistica della Ψ ebbe origine nell'uso dell'equazione di Schrödinger per l'analisi dei processi d'urto fatta da M. Born: *Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge* [Meccanica quantistica dei processi d'urto], *Zeitschrift für Physik* **37** (1926) 863–867; *Quantenmechanik der Stossvorgänge* [Meccanica quantistica dei processi d'urto], *Zeitschrift für Physik* **38** (1926) 803–827.

Va rilevato che la descrizione della meccanica quantistica è profondamente diversa da quella della meccanica statistica classica, in cui l'aspetto statistico e il ricorso a valori medi sono collegati all'impossibilità pratica di seguire l'evoluzione deterministica del moto di tutte le particelle che costituiscono il sistema fisico in esame. L'insieme statistico quantistico riguarda repliche identiche dello stesso sistema fisico e quindi ha senso anche quando questo è costituito da una sola particella: l'insieme di particelle che si considera in meccanica quantistica in questo caso comprende particelle tutte con le stesse caratteristiche e con la stessa Ψ iniziale; purtroppo, a seguito di una misurazione, ognuna di queste particelle può fornire un risultato individuale diverso, se la Ψ non è autofunzione dell'operatore associato all'osservabile fisica che si misura.

⁵⁶ È nota l'insoddisfazione di Einstein, ma anche de Broglie, come vedremo, e Schrödinger stesso, per qualche aspetto, non si riconoscevano nell'interpretazione oggi comunemente accettata.

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) \quad (3.3)$$

e si è supposto che V sia reale. Grazie all'equazione di continuità (3.1), la ρ e la \mathbf{j} , moltiplicate per la carica e della particella, possono essere intese come la densità di carica elettrica e la densità di corrente elettrica associate alla particella.

Però questa interpretazione apparve subito problematica. Durante la sua evoluzione temporale la Ψ subisce uno sparpagliamento nello spazio, che implicherebbe un analogo sparpagliamento della carica elettrica della particella; ciò contrasta con il fatto che l'elettrone viene sempre rivelato come unità indivisibile in un preciso punto dello spazio. Inoltre, se questo modello fosse valido, nell'equazione di Schrödinger occorrerebbe tenere presente anche l'azione generata dal fluido carico associato alla particella e distribuito su tutto lo spazio. Per esempio, nel caso dell'elettrone nell'atomo di idrogeno, il potenziale da inserire nell'equazione di Schrödinger sarebbe:

$$V = -\frac{e^2}{r} + e^2 \int d\mathbf{r}' \frac{\Psi^*(\mathbf{r}', t)\Psi(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}.$$

Ma, oltre che rendere nonlineare l'equazione di Schrödinger violando il principio di sovrapposizione lineare,⁵⁷ tale potenziale non permetterebbe più di ritrovare correttamente i livelli energetici dell'atomo di idrogeno, per il quale invece si deve prendere $V = -e^2/r$.⁵⁸

L'idea che la meccanica quantistica costituisca essenzialmente un insieme di regole matematiche che permettono la previsione del risultato della misurazione di una quantità fisica, una volta che si conoscano le condizioni iniziali del sistema allo studio, è stata sostenuta da Bohr al Congresso dei Fisici di Como⁵⁹ e completata al Quinto Congresso Solvay, tenutosi a Bruxelles dal

⁵⁷ Il principio di sovrapposizione lineare è fondamentale in una descrizione ondulatoria per garantire la possibilità dell'interferenza tra due onde, entrambe soluzioni della stessa equazione, così come la loro risultante combinazione. In particolare, esso giustifica il principio di Huyghens per la ricostruzione del fronte d'onda come involuppo delle singole onde.

⁵⁸ Questo argomento è tratto dal testo di Piero Caldirola, Renzo Cirelli e Giovanni Maria Prosperi: *Introduzione alla Fisica Teorica*, UTET, Torino, 1982, pagg. 258–259. Per una discussione dei primi tentativi di interpretazione della Ψ secondo quanto ora detto, si veda il testo di Shin'ichiro Tomonaga (1906–1979): *Quantum Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1962.

⁵⁹ In occasione del primo centenario della morte del comasco Alessandro Volta (1745–1827), il comitato per le onoranze, presieduto dal senatore Guglielmo Marconi (1874–1937), organizzò un Congresso Internazionale dei Fisici dall'11 al 20 settembre 1927. I lavori si svolsero a Como dall'11 al 16 settembre; il 17 seguì una celebrazione nell'aula universitaria di Pavia dove Volta aveva insegnato dal 1778 al 1819 e il 19 i congressisti furono accolti a Roma in Campidoglio dalle autorità di governo per la commemorazione ufficiale fatta da Marconi stesso. La presidenza del Congresso fu tenuta dal presidente della Società Italiana di Fisica, Quirino Majorana (1871–1957), eletto per acclamazione all'inizio dei lavori su

24 al 29 ottobre 1927. ⁶⁰

Anche se una formulazione assiomatica della meccanica quantistica fu

proposta di Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928). Vice-presidenti, oltre a Lorentz, furono eletti Aimé Auguste Cotton (1869–1959), Robert Andrews Millikan (1868–1953), Max von Laue (1879–1960), Giancarlo Vallauri (1882–1957). Al Congresso parteciparono i più eminenti cultori della fisica e dei vari rami dell'elettrotecnica, in tutto 61 scienziati di 14 nazioni, tra i quali 12 premi Nobel (Francis William Aston (1877–1945), Niels Hendrik David Bohr (1885–1962), William Lawrence Bragg (1890–1971), Arthur Holly Compton (1892–1962), James Franck (1882–1964), Max von Laue (1879–1960), Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), Guglielmo Marconi (1874–1937), Robert Andrews Millikan (1868–1953), Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947), Ernest Rutherford of Nelson (1871–1937), Pieter Zeeman (1865–1943)) e 7 futuri premi Nobel (Max Born (1882–1970), Petrus Josephus Debye (1884–1966), Enrico Fermi (1901–1954), Werner Heisenberg (1901–1976), Wolfgang Pauli (1900–1958), Owens Williams Richardson (1879–1959), Otto Stern (1888–1969)). Tra gli assenti si possono notare Louis de Broglie (1892–1987), Erwin Schrödinger (1887–1961), Albert Einstein (1879–1955), Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), Percy Williams Bridgman (1882–1961). I rendiconti furono pubblicati negli *Atti del Congresso Internazionale dei Fisici*, Zanichelli, Bologna, 1928.

Qui interessa la giornata del 16 settembre, dedicata alle teorie sulla struttura della materia e sulle radiazioni, con gli interventi di Max Born e di Niels Bohr e la discussione che seguì la relazione di Bohr, in cui intervennero Max Born, Hendrik Antoon Kramers, Werner Heisenberg, Enrico Fermi, Wolfgang Pauli (M.Born: *Über die Bedeutung der Stössvorgänge für das Verständnis der Quantenmechanik [Il significato dei processi d'urto per la comprensione della meccanica quantistica]*, p. 443–447; N.Bohr: *The quantum postulate and the recent development of atomic theory [Il postulato quantistico e il recente sviluppo della teoria atomica]*, p. 565–588. È in questa occasione che Bohr formulò il principio di complementarità. Secondo Bohr è impossibile ottenere una netta separazione tra il comportamento dei sistemi atomici e l'interazione con l'apparato di misura utilizzato nell'esperimento; il risultato è il fenomeno osservato, che include le condizioni di realizzazione del fenomeno stesso. Solo la totalità dei fenomeni, tra loro complementari, esaurisce l'informazione sul sistema.

I testi di Bohr e Born sono presentati in questa collana nel Quaderno intitolato "Il postulato dei quanti e il significato della funzione d'onda".

⁶⁰ Seguendo la tradizione, instauratasi nel 1911 grazie al suggerimento di Walter Hermann Nernst (1864–1941) accolto con entusiasmo dall'industriale belga Ernest Solvay (1838–1922), il Quinto Congresso Solvay fu dedicato a un tema di grande attualità: elettroni e fotoni. Per la quinta volta consecutiva, e ultima, Presidente del Congresso fu Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), che morì pochi mesi più tardi a Haarlem in Olanda. Vi parteciparono al solito pochi scienziati selezionati con cura dal Comitato Scientifico, presieduto dallo stesso Lorentz e formato da William Henry Bragg (1862–1942) da Londra, Marie Skłodowska Curie (1867–1934) da Parigi, Albert Einstein (1879–1955) da Berlino, Charles Eugene

completata qualche anno più tardi, ⁶¹ dalle discussioni avvenute durante il congresso emerse un insieme di postulati che, per quanto qui interessa, si possono riassumere nei seguenti:

- 1) Ad ogni sistema fisico è associata una funzione d'onda Ψ (in generale a valori complessi), la cui evoluzione temporale è regolata dall'equazione di Schrödinger;
- 2) ad ogni quantità fisica osservabile A è associato un operatore (autoaggiunto) \hat{A} , i cui autovalori (reali) a_i rappresentano i valori ottenibili dalla misurazione della quantità A ;
- 3) se la misurazione della quantità A ha prodotto il risultato a_i , il sistema viene a trovarsi descritto dall'autofunzione Φ_i dell'operatore \hat{A} appartenente all'autovalore a_i , indipendentemente dalla funzione Ψ che lo de-

Guye da Ginevra, Martin Hans Knudsen (1871–1949) da Copenhagen, Paul Langevin (1872–1946) da Parigi, Owens Williams Richardson (1879–1959) da Londra e E. van Aubel da Gent. Il segretario scientifico della Conferenza fu Jules Émil Verschaffelt da Gent. Tra i partecipanti c'erano: Niels Hendrik David Bohr (1885–1962) da Copenhagen, Max Born (1882–1970) da Göttingen, William Lawrence Bragg (1890–1971) da Manchester, Léon Nicolas Brillouin (1889–1979) da Parigi, Arthur Holly Compton (1892–1962) da Chicago, Louis-Victor de Broglie (1892–1987) da Parigi, Petrus Josephus Debye (1884–1966) da Lipsia, Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) da Cambridge, Paul Ehrenfest (1880–1933) da Leiden, Ralph Howard Fowler (1889–1944) da Cambridge, Werner Heisenberg (1901–1976) da Copenhagen, Hendrik Antoon Kramers (1894–1952) da Utrecht, Irving Langmuir (1881–1957) da Schenectady (New York), Wolfgang Pauli (1900–1958) da Amburgo, Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947) da Berlino, Erwin Schrödinger (1887–1961) da Zurigo, Charles Thomson Rees Wilson (1869–1959) da Cambridge. I rendiconti furono pubblicati l'anno successivo: *Électrons et photons, rapports et discussions du Cinquième Conseil de Physique tenue à Bruxelles du 24 à 29 octobre 1927*, Gauthier-Villars, Parigi, 1928.

⁶¹ Inizialmente la meccanica quantistica si è presentata con formulazioni apparentemente diverse e contrastanti.

Lo stesso Schrödinger (*Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen [Relazione tra la meccanica quantistica di Born-Heisenberg-Jordan e la mia]*, *Annalen der Physik* **79** (1926) 734–756) seppe riconoscere l'equivalenza tra la sua meccanica e la meccanica delle matrici della scuola di Göttingen (W. Heisenberg: *Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen [Reinterpretazione di relazioni cinematiche e meccaniche secondo la teoria dei quanti]*, *Zeitschrift für Physik* **33** (1925) 879–893; M. Born e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik [Meccanica quantistica]*, *Zeitschrift für Physik* **34** (1925) 858–888; M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan: *Zur Quantenmechanik. II. [Meccanica quantistica. II.]*, *Zeitschrift für Physik* **35** (1926) 557–615).

Ma contemporaneamente anche Dirac aveva proposto un altro modo di ottenere le regole di quantizzazione: *The Fundamental Equations of Quantum Mechanics [Le equazioni fondamentali della meccanica quantistica]*, *Proceedings of the Royal Society of London A* **109** (1925) 642–653.

Dopo il lavoro di M. Born e Norbert Wiener (1894–1964) (*A new foundation of the laws of quantization of periodic and aperiodic phenomena [Una nuova fondazione delle leggi di quantizzazione dei fenomeni periodici e non periodici]*, *Journal of Mathematics and Physics*, Massachusetts Institute of Technology, **5** (1926) 84–98; *Eine neue Formulierung der Quantengesetze für periodische und aperiodische Vorgänge [Una nuova formulazione delle leggi quantistiche per i processi periodici e non periodici]*, *Zeitschrift für Physik* **36** (1926) 174–187), il primo tentativo di assiomatizzazione può essere fatto risalire all'uso della teoria

scriveva prima della misurazione.

Per quanto riguarda il primo postulato, occorre precisare che non tutte le classi di funzioni che risolvono l'equazione di Schrödinger sono accettabili. Dato che il significato fisico della $\Psi(\mathbf{r}, t)$ deve essere associato a quello di una probabilità, occorre che la $\Psi(\mathbf{r}, t)$ di una particella sia *normalizzata*, cioè

$$\int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = 1, \quad (3.4)$$

in modo che si abbia la certezza (probabilità = 1) di trovare la particella in un punto qualsiasi dello spazio. La (3.4) è possibile per tutte le funzioni cosiddette a quadrato sommabili, cioè per quelle funzioni per le quali l'integrale nella (3.4) è limitato.⁶²

Inoltre la probabilità deve conservarsi, cioè se localmente si verifica una variazione di probabilità di presenza della particella è perchè c'è un flusso di probabilità verso altre regioni. Ciò è garantito dall'equazione di continuità (3.1) che deriva direttamente dall'equazione di Schrödinger. La ρ dunque rappresenta la densità di probabilità e la \mathbf{j} ne è la densità di corrente. Integrando la (3.1) su tutto lo spazio a disposizione per la particella, si ritrova la condizione di quadrato sommabilità per la Ψ : infatti il flusso si azzerà sulla superficie del volume di integrazione e si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int \rho d\mathbf{r} = 0, \quad (3.5)$$

delle trasformazioni per passare da una rappresentazione a un'altra all'interno dello spazio di Hilbert in cui sono definite le funzioni d'onda. Fritz Wolfgang London (1900–1954): *Über die Jacobischen Transformationen der Quantenmechanik [Le trasformazioni di Jacobi della meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **37** (1926) 915–925; P. Jordan: *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik [Una nuova fondazione della meccanica quantistica]*, Zeitschrift für Physik **40** (1927) 809–838; P. A. M. Dirac: *The physical interpretation of the quantum mechanics [L'interpretazione fisica della meccanica quantistica]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 113** (1927) 621–641.

Ma il primo vero tentativo di dare fondamento matematico alla meccanica quantistica è dovuto a David Hilbert (1862–1943), matematico di Göttingen in diretto contatto con Born, Heisenberg e Jordan (D. Hilbert, J. von Neumann e L. Nordheim: *Über die Grundlagen der Quantenmechanik [Sui fondamenti della meccanica quantistica]*, Mathematische Annalen **98** (1927) 1–30). La nozione di spazio di Hilbert astratto fu introdotta da Johann (John) von Neumann (1903–1957) che, a partire da una conferenza tenuta a Göttingen il 20 maggio 1927 (*Mathematische Begründung der Quantenmechanik [Fondazione matematica della meccanica quantistica]*, Göttingen Nachrichten (1927) 1–57), riuscì a chiarire la struttura matematica della meccanica quantistica in un testo fondamentale ancora oggi: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlino, 1932 (trad. inglese: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1955).

⁶² Conviene ricordare che l'onda piana (2.1), che è stata utilizzata nell'analogia tra ottica geometrica e meccanica del punto al §2, *non* è una funzione a quadrato sommabile e, riferita a una particella non relativistica, ha una velocità di fase $\omega/k = E/p$ pari alla metà della velocità v della particella. Invece una sovrapposizione di onde piane, che prende il nome di *pacchetto di onde*, è una funzione a quadrato sommabile e la sua *velocità di gruppo*, $v_g = \partial\omega/\partial k$, cioè la velocità con cui si sposta il suo baricentro, coincide con la velocità v del moto della particella.

cioè

$$\int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = \text{costante}, \quad (3.6)$$

e, siccome l'equazione di Schrödinger è lineare omogenea, si può sempre moltiplicare la Ψ per un opportuno fattore (di *normalizzazione*) in modo da rendere questa costante (*norma* di Ψ) uguale a 1.

Il secondo postulato impone una limitazione sui possibili valori ottenuti dalla misurazione di una quantità fisica: nel caso che l'operatore autoaggiunto in questione possieda solo un insieme di autovalori discreto, anche se da un punto di vista classico la quantità fisica associata ammette una continuità di valori, non tutti questi sarebbero ottenibili sperimentalmente. Tipico esempio è l'energia di un oscillatore armonico di frequenza ν , che risulta quantizzata con valori multipli del quanto elementare $h\nu$, come postulato da Planck nella sua spiegazione della radiazione di corpo nero.

Infine, siccome l'insieme delle autofunzioni $\{\Phi_n\}$ di un operatore autoaggiunto è completo, nel senso che una qualsiasi funzione può essere considerata come sovrapposizione di tali autofunzioni,

$$\Psi = \sum_n c_n \Phi_n, \quad (3.7)$$

il terzo postulato implica che il processo di misurazione ha l'effetto *improvviso e irreversibile* di far precipitare la Ψ , originariamente nella forma (3.7), nella particolare autofunzione Φ_i : questo processo non è descrivibile mediante l'equazione di Schrödinger, che non è in grado di considerare questi effetti dell'interazione tra sistema fisico in oggetto e apparato di misura dell'osservatore. Prima della misurazione, dalla (3.7) si può solo inferire che un'eventuale misurazione di A possiede la probabilità $|c_n|^2$ di trovare il valore a_n e quindi si può solo calcolare il valore medio $\langle \hat{A} \rangle = \sum_n a_n |c_n|^2$ che si può prevedere di ottenere in media dalla misurazione di A ripetuta su repliche identiche dello stesso sistema descritto dalla Ψ .⁶³ Una volta fatta la misurazione e trovato il valore a_i , il sistema si dispone nello stato Φ_i , che evolve successivamente in rispetto dell'equazione di Schrödinger: l'operazione di misurazione ha preparato il sistema nello stato Φ_i e ha *ridotto* la Ψ della (3.7) alla particolare Φ_i .⁶⁴

⁶³ Sullo stato Ψ lo scarto quadratico medio di \hat{A} , $\Delta A \equiv \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$, è in generale diverso da zero, mentre sullo stato Φ_i , autostato di \hat{A} , è $\Delta A = 0$.

⁶⁴ Il pacchetto di onde piane quali la (2.1), autofunzioni dell'impulso, può essere un esempio di tipo (3.7). Se si descrive la particella mediante un'onda piana, lo si fa immaginando che nello sviluppo (3.7) tutti i coefficienti c_n siano trascurabili eccetto uno, c_i : ciò corrisponde a concentrare il pacchetto di onde intorno al valore di impulso selezionato mediante la Φ_i scelta, ma nello stesso tempo si rende sempre più uniforme spazialmente il modulo quadrato della Ψ , con conseguente delocalizzazione della probabilità di presenza della

De Broglie riconobbe subito la meccanica ondulatoria come la sintesi, necessaria e ricercata per anni dalla comunità dei fisici, tra la dinamica del punto materiale e la teoria delle onde di luce. La meccanica ondulatoria permette di introdurre in ottica la nozione di punti di concentrazione di energia in relazione all'esistenza dei fotoni (quanti di luce) nell'interazione radiazione–materia; d'altra parte essa introduce opportunamente anche il comportamento ondulatorio nella descrizione del moto di un corpo materiale. Ma la struttura atomica della materia non risulta evidente dalle soluzioni delle equazioni, soluzioni continue, senza singolarità, estese su tutto lo spazio: l'esistenza del punto materiale deve, secondo de Broglie, riflettersi in una singolarità puntuale, o comunque limitata a una piccolissima regione, nell'ampiezza dell'onda. Allora de Broglie è portato a postulare una doppia soluzione dell'equazione di Schrödinger. Accanto alla soluzione Ψ , normalizzata e continua, in grado di fornire una descrizione statistica dello spostamento della particella, egli introduce una soluzione v che, eccettuata una piccola regione singolare dove è concentrata l'energia e localizzata la particella, risulta proporzionale a Ψ , ma ha un significato di realtà, in quanto descrive davvero il moto di propagazione di quella particella: “il punto materiale è una realtà essenziale e il suo movimento è interamente determinato da quello della singolarità dell'ampiezza nell'onda che si propaga”.⁶⁵ In questo modo l'onda continua è concepita come una guida per il moto della particella: è l'idea dell'*onda pilota* che dovrebbe permettere, in linea di principio, di recuperare una descrizione causale del moto della particella.

particella. Viceversa, una particella localizzata con precisione nello spazio richiede il contributo di tutti i possibili valori di impulso nel costruire il pacchetto di onde e quindi a priori non si è in grado di assegnare un valore di impulso a una particella localizzata. Di conseguenza, non è prevedibile una misura precisa e simultanea di posizione e impulso e non è possibile azzerare simultaneamente gli scarti quadratici medi per la posizione e l'impulso di una particella. È questo un aspetto delle relazioni di indeterminazione, scoperte da W.Heisenberg (*Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik [Il contenuto intuitivo della cinematica e della meccanica in teoria quantistica]*, Zeitschrift für Physik **43** (1927) 172–198) e che formano oggetto del Quaderno intitolato “Il principio di indeterminazione”.

⁶⁵ L. de Broglie: *La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement [La meccanica ondulatoria e la struttura atomica della materia e della radiazione]*, Journal de Physique et le radium **8** (1927) 225–241.

L'interpretazione della meccanica ondulatoria mediante la teoria della doppia soluzione [†]

1. – *Le origini della meccanica ondulatoria*

Quando nel 1923–24 ho avuto le mie prime idee sulla meccanica ondulatoria [1], ⁶⁶ sono stato guidato dal desiderio di ottenere una vera immagine fisica concreta, valida per tutte le particelle, della coesistenza di onde e particelle scoperta nel 1905 da Albert Einstein nella sua “teoria dei quanti di luce”. Allora io non mettevo in dubbio neanche per un istante il carattere di realtà fisica delle onde e delle particelle.

Un’osservazione mi aveva soprattutto colpito fin dall’inizio. La frequenza di un’onda piana monocromatica si trasforma nella teoria della relatività secondo la formula $\nu = \nu_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$, mentre la frequenza di un orologio si trasforma secondo la formula diversa $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ (con $\beta = v/c$). In seguito avevo notato che il quadrivettore definito dal gradiente della fase di un’onda piana monocromatica poteva essere messo in relazione con il quadrivettore impulso–energia di una particella, introducendo la costante h in accordo con le idee di Planck e ponendo ⁶⁷

$$(1) \quad W = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda},$$

per legare l’energia W alla frequenza ν e la quantità di moto p alla lunghezza d’onda λ . Allora ero indotto a rappresentare la particella come se fosse costantemente localizzata in un punto dell’onda monocromatica con l’energia W e la quantità di moto p e descrivesse uno dei raggi rettilinei dell’onda.

[†] di Louis de Broglie, in *Foundations of Quantum Mechanics*, ed. B. d’Espagnat, Academic Press, New York, 1971, p. 345–367. Di questo lavoro, presentato al IL Corso della Scuola Internazionale “E.Fermi” di Varenna nell’estate del 1970, originariamente in lingua francese, esiste una traduzione inglese fatta da Maurice Surdin e pubblicata per desiderio dell’autore stesso, quasi un testamento scientifico, in *Annales de la Fondation Louis de Broglie* **12** (1987) 399–421. In questa traduzione sono stati corretti alcuni errori di stampa, presenti sia nell’originale, sia nella versione inglese.

⁶⁶ I numeri entro parentesi quadra si riferiscono alle note bibliografiche originali riportate alla fine dell’articolo, a pag. 76.

⁶⁷ Nel presentare questo lavoro di de Broglie, ci si attiene rigorosamente alla notazione da lui utilizzata, anche se nell’uso corrente di oggi alcuni simboli sono stati sostituiti con altri e qualche ambiguità può sorgere con le notazioni degli altri paragrafi del testo.

Ma, e ciò non è mai ricordato nelle esposizioni abituali della meccanica ondulatoria, avevo anche osservato che, se si considera che la particella contiene a riposo un'energia interna $M_0c^2 = h\nu_0$, è naturale assimilarla a un piccolo orologio di frequenza propria ν_0 in modo che, quando essa è in moto con velocità $v = \beta c$, la sua frequenza, diversa da quella dell'onda, è $\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}$. Allora avevo facilmente dimostrato che durante il suo movimento nell'onda la particella aveva una vibrazione interna che restava costantemente in fase con quella dell'onda.⁶⁸

L'esposizione fatta nella mia tesi aveva l'inconveniente di non potere essere applicata che al caso particolare dell'onda piana monocromatica, che non è mai rigorosamente realizzato in natura a causa dell'esistenza inevitabile di una larghezza spettrale. Capivo bene che, se un'onda complessa è rappresentata da un integrale di Fourier, cioè da una sovrapposizione di componenti, queste componenti non esistono che nella mente del teorico e che, finché queste componenti non siano state separate con un processo fisico che distrugge la sovrapposizione iniziale, è la sovrapposizione che è la realtà fisica.⁶⁹ Fui così portato, poco tempo dopo la mia tesi, a generalizzare le idee che mi avevano guidato in questo lavoro, da un lato considerando un'onda che non fosse un'onda piana monocromatica e dall'altro distinguendo l'onda fisica reale della mia teoria dall'onda fittizia ψ , con significato statistico e arbitrariamente normalizzata, che in seguito ai lavori di Schrödinger e Born si cominciava a introdurre sistematicamente nelle trattazioni della meccanica ondulatoria. Così le mie riflessioni mi hanno portato a esporre nell'articolo del maggio 1927 sul *Journal de Physique* [2], sotto il nome di "teoria della doppia soluzione", una nuova interpretazione della meccanica ondulatoria e a generalizzare al caso di onda qualunque la legge di moto della particella, che avevo inizialmente

⁶⁸ In questa introduzione de Broglie riassume rapidamente, ma anche incisivamente e con una gentile punta polemica, i problemi affrontati nel suo lavoro di tesi e i principali risultati ottenuti. In particolare, l'ultima affermazione si riferisce al teorema dell'armonia di fase, che è il fondamento dell'ipotesi del comportamento ondulatorio dell'elettrone. Si veda il Quaderno "Le onde di de Broglie" per la presentazione e la discussione di questi aspetti.

⁶⁹ In realtà, nel suo lavoro di tesi, de Broglie parte dall'analisi delle proprietà dei quanti di luce, la cui esistenza per lui era reale già prima degli esperimenti di Compton sulla diffusione dei raggi X, e attribuisce ai quanti di luce una piccolissima massa, con la conseguenza che la loro velocità di propagazione non coincide più con la velocità c , anche se ne differisce in modo non apprezzabile sperimentalmente. Trasferendo l'idea ondulatoria alle particelle come gli elettroni, per i quali la massa non è trascurabile, de Broglie si accorge che per descrivere la velocità di una particella non si deve ricorrere alla velocità di fase dell'onda, perché questa risulta in generale diversa dalla velocità della particella e, per una particella relativistica, superiore a c e quindi in contrasto con la teoria della relatività di Einstein. Occorre invece associare la velocità della particella alla velocità di gruppo. Implicitamente, dunque, de Broglie utilizza già nella tesi un *pacchetto di onde*, anche se molto concentrato attorno alla frequenza ν_0 del moto periodico interno della particella. Occorre sottolineare che proprio questa distinzione tra velocità di fase e velocità di gruppo ha permesso a de Broglie di superare il limite dell'ottica geometrica nella formulazione di Hamilton. Ciò che mancava nella tesi, però, era un'estensione del teorema dell'armonia di fase al caso di un'onda che non fosse semplicemente un'onda piana monocromatica.

concepita solo nel caso particolare dell'onda piana monocromatica.

Alla luce del successo della meccanica quantistica come era stata sviluppata allora in relazione alle idee della Scuola di Copenhagen, per lungo tempo abbandonai il mio tentativo del 1927. Ma da una ventina d'anni l'ho ripreso e assai sviluppato.⁷⁰

2. – *La teoria della doppia soluzione e la legge della guida*

Non posso esporre qui in tutti i suoi dettagli lo stato attuale della teoria della doppia soluzione. A questo riguardo si potranno consultare le opere indicate nella bibliografia [3]. Ma vorrei lo stesso precisare le due idee principali su cui riposa questa interpretazione della meccanica ondulatoria.

a) L'onda, essendo secondo me un'onda fisica di ampiezza molto piccola che non può essere arbitrariamente normalizzata, deve essere distinta dall'onda ψ normalizzata, con significato statistico, del formalismo usuale della meccanica quantistica. Indico con v quest'onda fisica e collego l'onda statistica ψ all'onda fisica v con la relazione $\psi = Cv$, dove C è un fattore di normalizzazione. L'onda ψ ha il carattere di una rappresentazione soggettiva delle probabilità costruita con l'aiuto dell'onda oggettiva v . È questa distinzione, a mio avviso essenziale, che mi ha fatto dare alla teoria il nome di “teoria della doppia soluzione”, perché così v e ψ risultano due soluzioni della medesima equazione delle onde.

b) Per me la particella, sempre ben localizzata nello spazio durante tutto il tempo, costituisce nell'onda v una piccolissima regione di alta concentrazione di energia che si può, in prima approssimazione, assimilare a una singolarità mobile. Alcune considerazioni sulle quali ritornerò più avanti, portano ad ammettere che il movimento della particella debba essere definito nel modo seguente. Se la soluzione complessa dell'equazione delle onde che rappresenta l'onda v (o, se si preferisce, l'onda ψ , che qui è la stessa cosa in virtù della relazione $\psi = Cv$) è scritta sotto la forma

$$(2) \quad v = a(x, y, z, t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \phi(x, y, z, t) \right], \quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi} \right)$$

dove a e ϕ sono funzioni reali, l'energia W e la quantità di moto \mathbf{p} della particella, quando si trova nel punto di coordinate x, y, z all'istante t , sono date da

$$(3) \quad W = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \mathbf{p} = -\mathbf{grad} \phi,$$

⁷⁰ De Broglie fu aspramente criticato da Pauli al Quinto Congresso Solvay; come già detto, lo stimolo a riconsiderare la sua teoria gli venne dai lavori di David Bohm (cfr. §4.).

che, nel caso dell'onda piana monocromatica in cui è

$$\phi = h \left(\nu t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda} \right),$$

fornisce proprio le espressioni (1) di W e di \mathbf{p} .⁷¹ Se nelle formule (3) si scrivono W e \mathbf{p} sotto la forma⁷²

$$W = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{M_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

si ottiene

$$(4) \quad \mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{W} = -c^2 \frac{\mathbf{grad} \phi}{\partial \phi / \partial t}.$$

Io ho chiamato questa formula che determina il movimento della particella nell'onda "la formula della guida". Essa può essere generalizzata facilmente al caso in cui la particella è sottoposta a un campo esterno.

Introduciamo ora l'idea che risale, l'ho ricordato, alle origini della meccanica ondulatoria, secondo la quale la particella può essere assimilata a un piccolo orologio di frequenza $\nu_0 = M_0 c^2 / h$, e attribuiamole la velocità definita

⁷¹ Come un numero complesso $z = a + ib$ con a e b reali può sempre porsi nella forma di Eulero $z = \rho e^{i\theta}$ con ρ e θ reali, così una funzione delle variabili reali (x, y, z, t) , che assume valori complessi, può sempre porsi nella forma (2). Se nella (2) a è costante e $\phi(x, y, z, t) = Wt - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$, la v diventa un'onda piana monocromatica di frequenza $\nu = W/h$ e lunghezza d'onda $\lambda = h/p$. Le definizioni di W e \mathbf{p} nella (3) generalizzano l'osservazione, ricordata da de Broglie nella sezione 1, che il gradiente della fase di un'onda individua il quadrivettore energia-impulso di una particella.

Si noti che la fase ϕ usata da de Broglie è opposta alla fase ϕ del §2. Di conseguenza, nel passaggio dalle osservabili della meccanica classica agli operatori quantistici, de Broglie assume la corrispondenza

$$E \rightarrow -i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \mathbf{p} \rightarrow i \hbar \nabla,$$

anziché la corrispondenza in uso

$$E \rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \mathbf{p} \rightarrow -i \hbar \nabla.$$

Questa scelta si ripercuote sui segni dei termini che compaiono nelle equazioni di Schrödinger e di Klein-Gordon più avanti.

In particolare, la Ψ di de Broglie corrisponde alla usuale Ψ^* e l'equazione di Schrödinger da lui usata è la complessa coniugata di quella che viene proposta di solito oggi. Questa ambiguità, già riconosciuta da Schrödinger stesso nella sua quarta comunicazione, non ha ripercussioni sostanziali, in quanto il significato fisico è legato a $|\Psi|^2$.

⁷² Le espressioni che seguono rappresentano la definizione relativistica per l'energia W e l'impulso \mathbf{p} di una particella libera di massa a riposo M_0 .

dalla formula (4). Per un osservatore che vede passare la particella che si sposta con l'onda alla velocità βc , la frequenza interna del piccolo orologio è $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$, secondo la formula del rallentamento degli orologi in moto. Ciò permette di dimostrare facilmente, come lo faremo più avanti, che, nel caso generale di un'onda che non è un'onda piana monocromatica, la vibrazione interna della particella resta costantemente in fase con l'onda che la porta. Questo risultato, che contiene come caso particolare quello che era stato ottenuto originariamente nel caso dell'onda piana monocromatica, può essere considerato il contenuto essenziale della legge della guida.

Come vedremo più avanti, la teoria mostra allora facilmente che la massa propria M_0 che figura nelle espressioni di W e di \mathbf{p} non è in generale uguale alla massa propria m_0 usualmente attribuita alla particella. La si trova uguale a

$$(5) \quad M_0 = m_0 + \frac{Q_0}{c^2},$$

dove Q_0 è nel sistema proprio della particella ⁷³ una variazione positiva o negativa della sua massa propria. La grandezza Q_0 è il "potenziale quantistico" della teoria della doppia soluzione. Vedremo che dipende dalle variazioni dell'ampiezza della funzione d'onda.

3. – Studio più dettagliato della teoria della doppia soluzione

Dopo avere delineato schematicamente la teoria della doppia soluzione, sviluppiamo ora le equazioni su cui essa riposa, partendo dalle equazioni d'onda di Schrödinger e di Klein–Gordon, cioè senza introdurre lo spin. ⁷⁴

⁷³ Il sistema proprio è quello in cui la particella risulta in quiete.

⁷⁴ L'equazione che oggi è indicata coi nomi di Oskar Benjamin Klein (1894–1977) e di Walter Gordon (1893–c.1940) fu proposta contemporaneamente e indipendentemente da molti autori. Per una storia dell'equazione di Klein–Gordon si rimanda all'articolo di Helge Kragh: *Equation with many fathers. The Klein–Gordon equation in 1926 [Un'equazione con molti padri. L'equazione di Klein–Gordon nel 1926]*, *American Journal of Physics* **52** (1984) 1024–133. Qui si può ricordare che lo stesso Schrödinger, prima di presentare la sua prima comunicazione, aveva cercato un'equazione relativistica senza rimanerne soddisfatto e quindi senza pubblicarla. Inoltre Pauli, non appena venuto a conoscenza dell'approccio di Schrödinger, nel dimostrarne l'equivalenza con la meccanica delle matrici in una lettera a Jordan del 12 aprile 1926, ricava anche l'equazione relativistica di Klein–Gordon. La lettera è riprodotta nel contributo di Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996): *From Matrix Mechanics and Wave Mechanics to Unified Quantum Mechanics [Dalla meccanica delle matrici e dalla meccanica ondulatoria a una meccanica quantistica unificata]* nel libro *The Physicist's Conception of Nature*, edito da Jagdish Mehra, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1973, pagg. 276–293.

L'equazione traduce quantisticamente la descrizione classica relativistica del moto di una particella, per la quale l'energia E , l'impulso \mathbf{p} e la massa a riposo m_0 sono legate dalla relazione relativisticamente invariante:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

L'estensione delle considerazioni che seguono, al caso di particelle a spin $\frac{1}{2}$ come l'elettrone e al caso di particelle a spin 1 come il fotone, si trova in alcuni libri che ho pubblicati. [†] Ci limiteremo dunque al caso in cui l'onda v obbedisce all'equazione non relativistica di Schrödinger o all'equazione relativistica di Klein–Gordon, che nell'approssimazione newtoniana (per $c \rightarrow \infty$) degenera nell'equazione di Schrödinger. D'altra parte si sa che si ottiene così una rappresentazione approssimata delle proprietà ondulatorie dell'elettrone.

Scriveremo dapprima l'equazione di Schrödinger per l'onda v sotto la forma seguente, in cui U è il potenziale della forza che si esercita sull'elettrone:

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\hbar}{2im} \nabla^2 v + \frac{i}{\hbar} U v.$$

Questa equazione complessa implica che l'onda v sia rappresentata da due funzioni reali legate l'una all'altra da due equazioni reali. Siamo dunque portati a scrivere:

$$(7) \quad v = a \exp \frac{i\phi}{\hbar},$$

con a e ϕ reali; a è l'ampiezza dell'onda e ϕ la sua fase. ⁷⁵ Sostituendo la (7) nella (6), otteniamo facilmente ⁷⁶

$$(J) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} - U - \frac{1}{2m} (\mathbf{grad} \phi)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 a}{a},$$

$$(C) \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} - \frac{1}{m} \mathbf{div} (a^2 \mathbf{grad} \phi) = 0.$$

Con le consuete prescrizioni per passare dalle osservabili agli operatori e introducendo l'operatore di d'Alembert, si ottiene:

$$\square \Psi = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi.$$

[†] Vedere [3a], capitolo XVI e [3d], p. 23.

⁷⁵ L'equazione di Schrödinger (6), nella forma consueta oggi, si scriverebbe con un segno relativo opposto tra primo e secondo membro. Ciò è conseguenza della scelta (2) o (7) per la fase ϕ , che comporta il segno opposto a quello tradizionale, già rilevato, nel definire il passaggio dalle osservabili classiche agli operatori quantistici.

⁷⁶ Le due equazioni (J) e (C) si ottengono azzerrando separatamente la parte immaginaria e la parte reale, rispettivamente, della (6), riscritta con la sostituzione (7).

Per ragioni che appariranno chiare più avanti, chiameremo l'equazione (J) "equazione di Jacobi generalizzata" e l'equazione (C) "equazione di continuità".⁷⁷

Se, per ottenere una forma relativistica della teoria, invece dell'equazione di Schrödinger applichiamo all'onda v l'equazione di Klein–Gordon, otteniamo, al posto della (6), l'equazione

$$(8) \quad \square v - \frac{2i}{\hbar} \frac{\epsilon V}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{2i}{\hbar} \frac{\epsilon}{c} \sum_{xyz} A_x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\hbar^2} \left[m_0^2 c^2 - \frac{\epsilon^2}{c^2} (V^2 - A^2) \right] v = 0,$$

dove abbiamo supposto che la particella porti una carica elettrica ϵ e che sia soggetta all'azione di un campo elettromagnetico esterno derivante da un potenziale scalare $V(x, y, z, t)$ e da un potenziale vettore $\mathbf{A}(x, y, z, t)$.⁷⁸

⁷⁷ Le equazioni (J) e (C) furono scritte da de Broglie nel suo lavoro [2]. Contemporaneamente e indipendentemente le stesse equazioni, con il significato di descrizione di un fluido, furono proposte anche da Erwin Madelung: *Quantentheorie in hydrodynamischen Form [Teoria quantistica in forma idrodinamica]*, *Zeitschrift für Physik* **40** (1926) 322–326.

⁷⁸ Nella (8) la definizione dell'operatore di d'Alembert \square è la seguente:

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

In ogni caso la derivata temporale e il laplaciano compaiono in una relazione relativisticamente invariante, come succede all'energia E e all'impulso \mathbf{p} nell'espressione relativistica

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

In presenza di campo elettromagnetico questa relazione si modifica, con la sostituzione minimale, nella seguente:

$$(E - \epsilon V)^2 - \left(\mathbf{p} - \frac{\epsilon}{c} \mathbf{A} \right)^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

Passando al quantistico, con le definizioni di de Broglie si ha

$$\left(-i \hbar \frac{\partial}{\partial t} - \epsilon V \right)^2 v - \left(i \hbar \nabla - \frac{\epsilon}{c} \mathbf{A} \right)^2 c^2 v = m_0^2 c^4 v,$$

che può risciversi nella forma (8), se ci si pone nel gauge di Lorentz:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Introducendo nella (8) la forma (7) per v , dopo alcuni passaggi otteniamo un'equazione di Jacobi generalizzata (J') e un'equazione di continuità (C'), le cui espressioni sono:

$$(J') \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon V \right)^2 - \sum_{xyz} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\epsilon}{c} A_x \right)^2 = m_0^2 c^2 + \hbar^2 \frac{\square a}{a} = M_0^2 c^2,$$

$$(C') \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon V \right) \frac{\partial a}{\partial t} - \sum_{xyz} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\epsilon}{c} A_x \right) \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{a}{2} \square \phi = 0,$$

dove nell'ultimo membro della (J') abbiamo introdotto ciò che chiameremo massa propria variabile M_0 , definita da

$$(9) \quad M_0 = \sqrt{m_0^2 + \frac{\hbar^2 \square a}{c^2 a}},$$

quantità che più avanti vedremo avere la massima importanza.

4. – Formula della guida e potenziale quantistico

Studieremo ora le equazioni (J) e (J') che corrispondono all'equazione non relativistica di Schrödinger e all'equazione relativistica di Klein–Gordon.

Occupiamoci dapprima dell'equazione di Schrödinger e dell'equazione (J). Se nella (J) si trascurano i termini del secondo membro in cui figura la costante \hbar di Planck, cosa che corrisponde a prescindere dai quanti, e se si pone $\phi = S$, l'equazione (J) diventa

$$(10) \quad \frac{\partial S}{\partial t} - U = \frac{1}{2m} (\mathbf{grad} S)^2.$$

Ritroviamo qui per la funzione S , che è la funzione di Jacobi, l'equazione di Jacobi della meccanica classica. È dunque unicamente la presenza del termine in \hbar^2 che rende il movimento della particella diverso dal moto classico.⁷⁹ Qual è il significato di questo termine? Esso si può interpretare ammettendo che, oltre al potenziale classico U intervenga un altro potenziale Q , dato dalla formula⁸⁰

$$(11) \quad Q = -\frac{\hbar^2 \nabla^2 a}{2m a}.$$

⁷⁹ L'equazione di Hamilton–Jacobi come limite classico dell'equazione di Schrödinger era già stata riconosciuta dallo stesso Schrödinger, che anzi nel suo primo lavoro (*Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung) [Quantizzazione come problema agli autovalori (Prima comunicazione)]*, Annalen der Physik **79** (1926) 361–376) era partito proprio dall'equazione di Hamilton–Jacobi per impostare il problema della quantizzazione.

⁸⁰ Si osservi che Q non dipende dalla grandezza di a , ma solo dalle variazioni seconde relative di a .

In analogia con le formule classiche $\partial S/\partial t = E$ e $\mathbf{p} = -\mathbf{grad} S$, dove E e \mathbf{p} sono l'energia e la quantità di moto classiche, possiamo scrivere

$$(12) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = E, \quad -\mathbf{grad} \phi = \mathbf{p}.$$

Come in meccanica non relativistica, dove la quantità di moto \mathbf{p} si esprime in funzione della velocità con la formula $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, otteniamo

$$(13) \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} = -\frac{1}{m}\mathbf{grad} \phi.$$

Questa è l'equazione che abbiamo chiamato "formula della guida", che ci dà la velocità della particella, quando si trova nel punto di coordinate x, y, z all'istante t , in funzione della variazione locale della fase a quell'istante.

Bisogna precisare che a e ϕ sono l'ampiezza e la fase dell'onda v quali esisterebbero se non esistesse la regione piccolissima di ampiezza molto grande che costituisce la particella. Se si preferisce, si può dire che a e ϕ sono l'ampiezza e la fase dell'onda v , in prossimità immediata della regione quasi puntiforme u_0 , di un'onda definita mediante la relazione $u = u_0 + v$. Ho potuto dare delle giustificazioni della formula della guida basandomi su quest'ultima idea; tornerò più avanti su questo punto.

La forza quantistica $\mathbf{F} = -\mathbf{grad} Q$ che si esercita sulla particella ne incurva la traiettoria. Ma nel caso importante, un po' schematico, dell'onda piana monocromatica, Q è costantemente nullo e non c'è forza quantistica: ⁸¹ la particella descrive allora con velocità costante una traiettoria rettilinea che costituisce uno dei raggi dell'onda piana monocromatica e si ritrova così l'immagine che avevo in mente al momento della mia tesi.

Ma, quando la propagazione dell'onda è sottoposta a condizioni limite, possono apparire fenomeni di interferenza o diffrazione e allora, sotto l'influenza della forza quantistica, il movimento definito dalla formula della guida cessa d'essere rettilineo e uniforme. Tutto avviene allora come se gli ostacoli che intralciano la propagazione dell'onda esercitassero a distanza sulla particella, per la mediazione del potenziale quantistico, un'azione deviante. ⁸²

⁸¹ Si ricordi che l'onda piana monocromatica ha ampiezza costante e quindi il potenziale quantistico Q è identicamente nullo.

⁸² Si riconosce facilmente che la formula della guida (13), o la sua espressione più generale (4), si riconduce alla definizione (2.5) dell'ottica geometrica. Il potenziale quantistico Q corrisponde al termine che è stato trascurato nella (2.13) per ritrovare l'equazione dell'iconale. Adesso Q non può essere trascurato, perché non si pongono limitazioni sulla lunghezza d'onda; anzi, il ruolo di Q è essenziale per recuperare l'interpretazione statistica all'interno di questa descrizione deterministica della meccanica ondulatoria della particella. Le variazioni violente di a , nella regione di alta concentrazione d'energia corrispondente alla localizzazione della particella, provocano valori di Q che fluttuano rapidamente senza che li si possa conoscere con precisione: il potenziale Q resta perciò definito in linea di principio, ma sconosciuto in pratica, introducendo un aspetto di casualità.

I sostenitori dell'antica "teoria dell'emissione" pensavano che la luce fosse interamente formata da particelle e, siccome sapevano già che la luce può aggirare il bordo di uno schermo, dicevano che il bordo dello schermo esercita una forza sulle particelle di luce che vi passano vicino. Sotto una forma molto più elaborata, ritroviamo qui un'idea analoga.⁸³

Passiamo ora allo studio dell'equazione di Klein–Gordon e alla formula (J'). Osserviamo dapprima che se, nell'equazione (J'), trascuriamo i termini in \hbar^2 e poniamo $\phi = S$, otteniamo

$$(14) \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} - \epsilon V \right)^2 - \sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\epsilon}{c} A_x \right)^2 = m_0^2 c^2.$$

Ora, in meccanica relativistica senza i quanti, questa è l'equazione di Jacobi per una particella di massa propria m_0 e di carica elettrica ϵ , soggetta a un campo elettromagnetico derivante da un potenziale scalare V e da un potenziale vettore \mathbf{A} , come ci si doveva aspettare.

Se conserviamo i termini in \hbar^2 e se utilizziamo la massa propria variabile M_0 definita nella (9), in modo naturale siamo portati a porre

$$(15) \quad \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon V, \quad \frac{M_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -(\mathbf{grad} \phi + \frac{\epsilon}{c} \mathbf{A}),$$

con $\beta = v/c$, che ci porta alla formula della guida relativistica

$$(16) \quad \mathbf{v} = -c^2 \frac{\mathbf{grad} \phi + \epsilon \mathbf{A}/c}{\partial \phi / \partial t - \epsilon V}.$$

Nell'approssimazione newtoniana, con $\mathbf{A} = 0$ e $\partial \phi / \partial t - \epsilon V \simeq m_0 c^2$, ritroviamo proprio la formula (13).

La forza quantistica risulta qui dalle variazioni della quantità $M_0 c^2$ quando la particella si sposta con l'onda. Per avere sempre un potenziale quantistico nullo nel caso dell'onda piana monocromatica, potremo porre

$$(17) \quad Q = M_0 c^2 - m_0 c^2.$$

Nell'approssimazione non relativistica, in cui $c \rightarrow \infty$ e $\square a \simeq -\nabla^2 a$, ritroviamo il valore

$$Q = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \hbar^2 \square a/a} - m_0 c^2 \simeq -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\nabla^2 a}{a}.$$

⁸³ Il potenziale quantistico Q , definito nella (11), è implicitamente un effetto di non località che interviene nella teoria.

Le formule relativistiche qui studiate sono molto importanti per il seguito in quanto la meccanica ondulatoria è, come l'avevo presentato fin dal suo inizio, una teoria essenzialmente relativistica e l'equazione di Schrödinger, che non è relativistica, non è sufficiente per rivelarne la vera natura. ⁸⁴

5. – Interpretazione del moto della guida

È importante mettere in evidenza ora due caratteristiche essenziali del moto della guida.

La prima è che la particella nel suo spostamento con l'onda resta costantemente in fase con l'onda stessa. Per dimostrarlo supponiamo prima di tutto che la particella non sia soggetta ad alcuna forza se non alla forza quantistica definita in precedenza, il che equivale a porre $V = \mathbf{A} = 0$ nell'equazione di Klein–Gordon. Se allora ci spostiamo lungo la traiettoria di guida di una distanza dl nel tempo dt , la variazione corrispondente della fase dell'onda è

$$(18) \quad \begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial l}dl = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \phi \right) dt \\ &= \left(\frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{M_0v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) dt = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}dt. \end{aligned}$$

Ora, quando la particella di frequenza interna $\nu_0 = M_0c^2/h$ si sposta di dl nel tempo dt , la sua fase interna ϕ_i varia di ⁸⁵

$$(19) \quad d\phi_i = M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}dt = d\phi.$$

Vediamo dunque che la particella si sposta con l'onda proprio in modo che la sua vibrazione [†] resti costantemente in fase con quella dell'onda.

Si può interpretare questo risultato osservando che la particella è definita in questa teoria come una piccolissima regione dell'onda in cui l'ampiezza è molto grande e che sembra naturale che il ritmo interno della particella sia sempre lo stesso di quello dell'onda nel luogo in cui si trova.

A questo proposito faremo la seguente seconda osservazione molto importante. Perché questa interpretazione della guida sia accettabile, occorre che le dimensioni della piccola regione singolare che costituisce la particella

⁸⁴ Effettivamente il dualismo onda–corpuscolo nella descrizione dei fenomeni su scala atomica e nucleare acquista pieno significato solo in una teoria quantistica dei campi, in cui gli aspetti relativistici siano stati debitamente inclusi. L'equazione di Klein–Gordon è un esempio di equazione di campo in questo senso, valida per la descrizione di particelle prive di spin come il mesone π .

⁸⁵ Nel sistema proprio della particella la fase interna ϕ_i è legata all'energia $h\nu_0 = M_0c^2$ dalla relazione $d\phi_i/dt_0 = h\nu_0$, analoga alla (3). Ma $dt_0 = dt\sqrt{1-\beta^2}$, da cui segue la (19).

[†] Definita con l'espressione $a_i \exp[i\phi_i/\hbar]$, con a_i e ϕ_i reali.

siano molto piccole rispetto alla lunghezza d'onda dell'onda v . Si può dire che tutta la teoria che abbiamo sviluppata avrebbe un limite di validità per le lunghezze d'onda troppo piccole, cioè per le energie troppo elevate. Questa è un'osservazione senza rilevanza nei casi usualmente considerati, ma potrebbe diventare capitale nel caso di energie molto grandi.

Estendiamo ora la dimostrazione precedente al caso in cui, nell'equazione di Klein–Gordon, V e \mathbf{A} non siano nulli. L'armonia di fase tra l'onda e la particella si esprime sempre per mezzo dell'equazione

$$(20) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \phi \right) dt = \frac{d\phi_i}{dt} dt.$$

Poniamo $h\nu_0 = \partial\phi/\partial t = M_0c^2 + \epsilon V_0 = M'_0c^2$, con $M'_0c^2 = M_0c^2 + \epsilon V_0$ nel sistema proprio della particella in cui è momentaneamente in quiete. D'altra parte, si ha

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= h\nu = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M'_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \frac{d\phi_i}{dt} &= h\nu_i = h\nu_0\sqrt{1-\beta^2} = M'_0c^2\sqrt{1-\beta^2}, \end{aligned}$$

e la relazione (20) risulta verificata.

Esiste ancora un'altra caratteristica essenziale del moto della guida. *Il movimento della particella si effettua secondo una dinamica relativistica a massa propria variabile.* Per vederlo, in modo completamente naturale prendiamo, come funzione di Lagrange della particella in assenza di campi classici,

$$(22) \quad \mathcal{L} = -M_0c^2\sqrt{1-\beta^2}.$$

Il principio di minima azione, $\delta \int \mathcal{L} dt = 0$, ci porta allora alle equazioni di Lagrange ⁸⁶

$$(23) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i},$$

che qui diventano

$$(24) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -c^2\sqrt{1-\beta^2}\mathbf{grad} M_0,$$

⁸⁶ Al torinese Giuseppe Luigi Lagrange (1736–1813), autore nel 1788 del testo *Mécanique analytique*, va il merito di avere posto su basi matematiche sicure, mediante l'introduzione della *lagrangiana* \mathcal{L} , il problema di esprimere in forma concisa e generale le equazioni di moto della meccanica classica. Qui de Broglie utilizza un'estensione relativistica della lagrangiana e applica il principio di minima azione in forma non covariante. Perciò è costretto ad aggiungere in modo intuitivo la (25) all'equazione di moto (24); ma (24) e (25) insieme determinano l'evoluzione temporale del quadrivettore energia–impulso.

indicando appunto che la dinamica della particella è una dinamica relativistica a massa propria variabile. La simmetria relativistica tra lo spazio e il tempo ci porta a completare l'equazione (24) con la seguente

$$(25) \quad \frac{dW}{dt} = c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\partial M_0}{\partial t}.$$

Siccome $dM_0/dt = \partial M_0/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} M_0$, le equazioni precedenti forniscono

$$(26) \quad \frac{dW}{dt} - \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{dM_0}{dt}.$$

Ora, si ha

$$(27) \quad \begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) - \frac{M_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \\ c^2 \sqrt{1 - \beta^2} \frac{dM_0}{dt} &= \frac{d}{dt}(M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}) + \frac{M_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \end{aligned}$$

da cui

$$(28) \quad \frac{d}{dt}(W - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}) = 0,$$

e, dato che quando la particella è in quiete abbiamo $\beta = 0$ e $W = M_0 c^2$, ne risulta che è ⁸⁷

$$(29) \quad W = M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{M_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

relazione che è ben verificata, in quanto $W = M_0 c^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$.

La relazione (29), che abbiamo ottenuta a partire dalla dinamica della guida a massa propria variabile, possiede, come vedremo, un significato termodinamico notevole.

Si otterrebbe la generalizzazione del ragionamento precedente al caso in cui è presente un campo elettromagnetico esterno, partendo dalla funzione di Lagrange

$$(30) \quad \mathcal{L} = -M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \epsilon \left(V - \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) = M_0' c^2 \sqrt{1 - \beta^2},$$

⁸⁷ Dunque non solo la derivata nella (28) è nulla, ma in generale lo è anche la funzione entro parentesi; da ciò segue la (29).

e tenendo conto della formula di trasformazione relativistica:

$$V_0 = \frac{V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

6. – Interpretazione delle equazioni di continuità (C) e (C')

Cerchiamo ora il significato delle equazioni (C) e (C') ottenute nella sezione 3, che corrispondono rispettivamente all'equazione non relativistica di Schrödinger e all'equazione di Klein–Gordon.

Cominciamo con l'equazione (C):

$$(C) \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} - \frac{1}{m} \operatorname{div} (a^2 \mathbf{grad} \phi) = 0.$$

In virtù della formula della guida (4)⁸⁸ e ponendo $\rho = K a^2$, dove K è una costante, l'equazione (C) prende la forma

$$(31) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Questa è quella che in idrodinamica viene chiamata equazione di continuità, dove $\rho d\tau$ è il numero di molecole del fluido nell'elemento di volume $d\tau$ e \mathbf{v} è la loro velocità. Essa si può scrivere $D(\rho d\tau)/Dt = 0$, dove la derivata D/Dt è presa seguendo il moto delle molecole, ed esprime la conservazione del fluido. Ma qui non abbiamo che una particella; sembra allora naturale considerare la quantità $\rho d\tau$ come proporzionale alla probabilità di presenza della particella nell'elemento di volume $d\tau$.⁸⁹ Eppure, come mostreremo più avanti, questa interpretazione solleva una difficoltà se si suppone che la particella segua regolarmente la sua traiettoria di guida. Ritorniamo su questa difficoltà e questo ci porterà a completare la teoria della guida, così come l'abbiamo sviluppata fin qui, mediante un elemento aleatorio, cosa che ci aprirà nuovi orizzonti.

Senza insistere per il momento su questo punto, ammetteremo che la quantità $\rho = a^2(x, y, z, t)$ moltiplicata per $d\tau$ ci fornisca, a meno di un fattore di normalizzazione, la probabilità di presenza della particella all'istante t nell'elemento di volume $d\tau$ di coordinate x, y, z . Come saremo portati a definire la funzione statistica ψ in funzione dell'onda reale v con la relazione $\psi = Cv$, dove C è una costante di normalizzazione tale che $\int |\psi|^2 d\tau = 1$, così

⁸⁸ Qui intesa nella forma (13).

⁸⁹ Va ricordato che quando arrivò per primo a questa equazione di continuità soddisfatta dalla soluzione ψ della sua equazione, Schrödinger l'interpretò in modo naturale come l'equazione di continuità per la distribuzione di carica elettrica della particella. Evidentemente qui de Broglie fa tesoro della successiva interpretazione statistica di Born.

siamo indotti a dire che $|\psi|^2 d\tau$ rappresenta in valore assoluto la probabilità di presenza in questione.

Esaminiamo ora la relazione (C') relativa all'equazione relativistica di Klein–Gordon. Dopo una moltiplicazione per $2a$, essa si può scrivere

$$(C') \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon V \right) \frac{\partial a^2}{\partial t} - \left(\mathbf{grad} \phi + \frac{\epsilon}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \mathbf{grad} a^2 + a^2 \square \phi = 0.$$

Qui definiamo ρ mediante la formula

$$(32) \quad \rho = K a^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \epsilon V \right).$$

Con questa definizione di ρ e tenendo conto della definizione (16) della velocità di guida e della relazione di Lorentz tra i potenziali

$$\frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

si ritrova la relazione di continuità (31).

Si può dunque ammettere, con le stesse riserve precedenti, che quando si può utilizzare l'equazione relativistica delle onde di Klein–Gordon, la quantità $\rho d\tau = K a^2 ((\partial \phi / \partial t) - \epsilon V) d\tau$ dà la probabilità di presenza della particella nell'elemento di volume $d\tau$ all'istante t .⁹⁰

7. – Introduzione dell'onda statistica ψ

Finora abbiamo introdotto solamente l'onda v che, secondo noi, contiene una piccolissima regione singolare, in generale mobile, costituente la particella. Questa onda v , che avrebbe un'ampiezza molto bassa, occuperebbe la quasi totalità del dominio occupato da un'onda $u = u_0 + v$, dove u_0 rappresenterebbe l'onda nella regione estremamente piccola dove l'ampiezza è molto grande. La struttura di u_0 nella regione singolare potrebbe essere complicata: è lei che definirebbe la struttura interna della particella. Noi non insistiamo qui su questo problema il cui studio ci appare ancora prematuro. Sembra molto naturale che la propagazione dell'onda v , onda fisica reale che si propaga

⁹⁰ È evidente dalla (32) che la ρ non è definita positiva e quindi è problematico interpretarla come probabilità di presenza della particella, che invece deve essere definita positiva. Questa difficoltà fu riconosciuta subito al primo apparire dell'equazione di Klein–Gordon, che perciò fu temporaneamente abbandonata. Essa fu ripresa solo nel 1934 da Wolfgang Pauli e Victor Frederick Weisskopf (1908–2002) in un contesto di teoria quantistica dei campi, in cui intervengono stati (di particella) a energia positiva e stati (di antiparticella) a energia negativa, come avviene per l'equazione di Dirac valida per particelle a spin $\frac{1}{2}$. W. Pauli e V. Weisskopf: *Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung [La quantizzazione dell'equazione d'onda scalare relativistica]*, *Helvetica Physica Acta* **7** (1934) 709–729.

nello spazio durante il tempo, possa determinare, come l'abbiamo ammesso nella teoria della guida, lo spostamento della particella che vi è integrata, così come gli stati stazionari di quest'onda v nei sistemi quali l'atomo di idrogeno possono determinare lo stato quantico del sistema.

Ma, dopo i lavori di Schrödinger del 1926, ci si è abituati a considerare unicamente l'onda ψ , la cui ampiezza è arbitrariamente normalizzata. Ora, questa onda non può essere considerata come un'onda fisica, prima di tutto perché l'ampiezza di un'onda fisica ha un valore ben determinato e non può essere arbitrariamente normalizzata, ma anche perché, se ψ_1 e ψ_2 sono due soluzioni particolari normalizzate dell'equazione lineare delle onde ψ , la somma $\psi_1 + \psi_2$ delle due soluzioni non è una soluzione normalizzata, di modo che l'onda ψ normalizzata non possiede la proprietà di sovrapposizione che caratterizza le onde fisiche soluzioni di un'equazione di propagazione lineare. Così si è stati portati a considerare l'onda ψ come una rappresentazione di probabilità, un semplice strumento di previsione, che permette di prevedere i risultati possibili della misurazione delle grandezze attribuite a una particella o a un insieme di particelle. Ora, è impossibile che una semplice rappresentazione di probabilità possa provocare dei fenomeni fisici quali la manifestazione localizzata di una particella, fenomeni di interferenza o di diffrazione, ecc. o imporre dei valori alle energie degli stati stazionari degli atomi. Solo una realtà oggettiva può provocare simili effetti e una rappresentazione di probabilità non ha questo carattere.

D'altra parte, è certo che l'uso dell'onda ψ e delle sue generalizzazioni ha condotto a un gran numero di previsioni esatte e a teorie fruttuose. Questo è un fatto che non si può mettere in discussione. La situazione si chiarisce se si fa intervenire, accanto all'onda statistica ψ , l'onda v che, realtà fisica oggettiva, può provocare i fenomeni di cui l'onda ψ fornisce l'aspetto statistico. È importante dunque stabilire una relazione tra l'onda ψ e l'onda v .

Definendo una costante C che può essere complessa, introduciamo questa relazione scrivendo

$$(33) \quad \psi = Cv = Ca \exp[i\phi/\hbar],$$

dove C è un fattore di normalizzazione tale che sia $\int_V |\psi|^2 d\tau = 1$, dove V è il volume occupato dall'onda. Come abbiamo ricordato nel paragrafo precedente, nella teoria di Schrödinger dove $|\psi|^2 d\tau$ fornisce la probabilità di presenza della particella nell'elemento di volume $d\tau$, la quantità $|\psi|^2 d\tau$ dà questa probabilità *in valore assoluto* e questa è la ragione dell'introduzione della funzione statistica ψ , normalizzata a partire dall'onda reale v mediante la relazione (33).

Una prima osservazione da fare a proposito della relazione (33) è la seguente. Dato che è $|\psi| = |C|a$ e che la fase di ψ non può differire da quella di v se non per una costante additiva, vediamo che le formule della guida e le

espressioni del potenziale quantistico date in precedenza sono insensibili alla sostituzione di ψ a v .

Un'altra osservazione è la seguente: $|C|$ deve essere molto superiore a 1. In effetti, consideriamo una grandezza associata alla particella di cui si conosca il valore g . La teoria attuale, che utilizza unicamente la funzione ψ , suppone che questa grandezza sia diffusa su tutta l'onda con una densità $|\psi|^2 d\tau$, in modo che sia $\int |\psi|^2 g d\tau = g$. Ma nella teoria della doppia soluzione, la grandezza g è certamente concentrata nella piccolissima regione occupata dalla particella e l'integrale di $a^2 g d\tau$ esteso all'onda v su tutto il volume V deve essere molto più piccolo di g , da cui segue

$$(34) \quad \int_V a^2 g d\tau \ll \int_V |\psi|^2 g d\tau,$$

e quindi, per la (33),

$$(35) \quad |C| \gg 1.$$

Si può interpretare questo risultato dicendo che la teoria statistica attuale considera come esteso a tutta l'onda senza singolarità ciò che in realtà è quasi interamente concentrato nella singolarità.

È perché l'interpretazione precedente mi aveva condotto a considerare simultaneamente due soluzioni distinte dell'equazione di propagazione legate per mezzo della (33), l'una v di carattere fisico e non normalizzata, l'altra ψ normalizzata e di carattere statistico, che sono stato portato a indicare questa reinterpretazione della meccanica ondulatoria sotto il nome di "teoria della doppia soluzione". Con la distinzione delle due onde v e ψ , il mistero del doppio carattere soggettivo e oggettivo dell'onda nella teoria causale sparisce e non si può più attribuire a una semplice rappresentazione di probabilità la strana proprietà di provocare dei fenomeni fisici osservabili.

Inoltre la distinzione tra onda v e onda ψ permette di affrontare sotto una forma nuova tutta una serie di problemi importanti quali l'interpretazione dei fenomeni di interferenza, la teoria della misurazione, le correlazioni a distanza, la definizione dei casi puri e dei casi miscela, la riduzione dei pacchetti di probabilità, ecc. I risultati che abbiamo ottenuti in questi ultimi anni su questi problemi, Andrade e Silva ed io, ci fanno pensare che questi risultati sono più chiari e senza dubbio più esatti di quelli delle teorie attualmente accettate. Non insisterò qui su questi aspetti e mi limiterò a notare che Andrade e Silva è stato portato recentemente nello studio dei casi puri e dei casi miscela a definire una funzione statistica $\psi = Cv$ che in certi casi può differire dalla funzione ψ usuale. ⁹¹

⁹¹ Per un'esposizione di possibili applicazioni della teoria della doppia soluzione ai problemi citati, con riferimento alla capacità di prevedere risultati diversi da quelli previsti dalla meccanica quantistica, si veda l'articolo di João Andrade e Silva (n. 1928): *Une formulation causale de la théorie quantique de la mesure [Una formulazione causale della teoria quantistica della misurazione]* in *Foundations of Quantum Mechanics*, ed. B. d'Espagnat, Academic Press, New York, 1971, pagg. 368–397.

8. – *La localizzazione della particella nell'onda e la legge della guida*

Finora ci siamo limitati a definire l'inserimento della particella nella sua onda dicendo che l'onda fisica reale deve includere una piccolissima regione di grandissima ampiezza che è la particella. Al di fuori di questa regione singolare, l'onda fisica si riduce all'onda v di ampiezza molto piccola che obbedisce alle equazioni lineari usuali. Abbiamo già detto che ci sembra prematuro cercare di descrivere la struttura interna della regione singolare, cioè della particella; d'altra parte è probabile che questa descrizione dovrebbe fare intervenire delle equazioni non lineari di tipo complicato.⁹²

Un problema che si può affrontare con maggior sicurezza è quello della giustificazione della legge della guida esaminando il modo in cui la regione singolare deve spostarsi con l'onda regolare che la racchiude. Alcuni anni fa ho esposto dei ragionamenti che permettono di giustificare così la legge della guida. † Essi riposano essenzialmente sullo studio del modo in cui si devono raccordare alla periferia della regione singolare le quantità che caratterizzano rispettivamente l'onda regolare v e l'onda u_0 interna alla particella; u_0 deve mettersi a crescere molto rapidamente quando si penetra nella regione singolare.

Questi ragionamenti presentano una grande analogia con quelli che Einstein e i suoi collaboratori avevano utilizzato in relatività generale per giustificare l'affermazione che una particella materiale ha un moto rappresentato da una geodetica dello spazio-tempo. Questo problema aveva preoccupato Einstein ed è stato trattato in modo approfondito da Darmais e Lichnerowicz. Il principio del loro metodo dimostrativo è quello di considerare il sottilissimo tubo d'universo che nello spazio-tempo rappresenta il movimento della particella e di scrivere che c'è un raccordo continuo al bordo del tubo di geodetiche del campo interno al tubo con le geodetiche del campo esterno.⁹³ Trasferito alla teoria della doppia soluzione, il metodo consiste nel descrivere la particella che si sposta nello spazio all'interno d'un tubo molto stretto, le cui pareti sono formate da un insieme di linee di corrente dell'onda v , definendo così un flusso idrodinamico. Dato che queste linee di corrente sono definite dalla velocità v della teoria della guida, la particella resta racchiusa dentro al tubo durante il

⁹² Queste equazioni non sono state mai scritte esplicitamente.

† Vedere la bibliografia [3a] capitolo IX, p. 101 e appendice p. 287.

⁹³ Per un'esposizione sistematica degli aspetti matematici della relatività generale riguardante anche questi problemi di raccordo, si veda il testo di A. Lichnerowicz: *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Relativité générale et théories unitaires*, Masson et C., Parigi, 1955, con prefazione di G. Darmais.

Georges Darmais (1888–1960), esperto di calcolo delle probabilità, fu Presidente della Società di Matematica francese e membro dell'Académie des Sciences dal 1955.

André Lichnerowicz (1915–1998), allievo di Darmais, ha dato importanti contributi alla geometria differenziale e ha presieduto la commissione che ha rinnovato l'insegnamento della matematica in Francia negli anni '60. Professore al Collège de France, fu membro dell'Académie des Sciences dal 1964.

suo moto e ne risulta la legge della guida della particella per mezzo dell'onda v . Sebbene la natura fisica del problema della relatività generale e della teoria della doppia soluzione siano diversi, il metodo di dimostrazione è analogo.

Ma esiste un altro modo più schematico di affrontare il problema. Esso consiste nel rappresentare la particella per mezzo di una singolarità, nel senso matematico della parola, in seno all'onda e cercare soluzioni a singolarità mobile delle equazioni d'onda. Avevo già schematizzato questo metodo nel mio articolo sul *Journal de Physique* del 1927 [2]. In effetti avevo mostrato che si possono trovare soluzioni dell'equazione di Klein–Gordon che hanno la fase di un'onda piana monocromatica e che possiedono una singolarità mobile. Ma era importante generalizzare questo risultato al di là del caso molto particolare che avevo studiato. Questo problema è stato affrontato da Francis Fer nella sua tesi di dottorato,⁹⁴ poi ripreso in modo più esteso da Thiounn in tutta una serie di lavori [4].⁹⁵ Thiounn ha dimostrato che anche nel caso dell'equazione di Klein–Gordon, applicabile alle particelle a spin 0, come nel caso dell'equazione di Dirac applicabile alle particelle a spin $\hbar/2$ (in particolare agli elettroni) e nel caso delle equazioni di Maxwell con termini di massa applicabili alle particelle di spin \hbar (in particolare ai fotoni), esistono soluzioni a singolarità puntuale che si spostano seguendo la legge della guida. Sicuramente la rappresentazione della particella per mezzo di una semplice singolarità mobile nell'onda non è una vera rappresentazione della struttura della particella e non ne costituisce che un'immagine molto schematica. Nondimeno, considero i lavori di Thiounn molto importanti, perché costituiscono una conferma notevole della teoria della guida.

9. – *La termodinamica nascosta delle particelle*

Presenterò ora le idee principali della termodinamica nascosta delle particelle che ho sviluppata dal 1960 come prolungamento della teoria della doppia soluzione [5].

L'idea di considerare una particella come un piccolo orologio porta a pensare in modo molto naturale che l'energia di una particella dovuta alla sua massa propria M_0c^2 possa essere considerata come un calore latente della particella. In effetti, un piccolo orologio contiene nel suo sistema proprio un'energia di agitazione periodica interna che non si accompagna ad alcuna quantità di moto d'insieme, energia che si può assimilare a quella di un corpo che contiene calore in uno stato di equilibrio interno.

Introdurremo allora la formula di trasformazione relativistica del calore seguendo i vecchi lavori di Planck e von Laue intorno al 1908. Se nel sistema

⁹⁴ Francis Fer (1918–1987) ha lavorato nel gruppo di de Broglie presso l'Institut Henri Poincaré di Parigi.

⁹⁵ Anche Mumm Thiounn ha lavorato con de Broglie, soprattutto in relazione al lavoro della sua tesi di dottorato, citata in [4].

proprio di un corpo in equilibrio interno omogeneo il calore contenuto nel corpo è Q_0 , nel sistema di riferimento in cui il corpo possiede la velocità d'insieme βc il calore Q in esso contenuto è

$$(36) \quad Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Sebbene questa formula, che da lungo tempo non veniva contestata, sia stata recentemente messa in dubbio, negli ultimi anni sono arrivato alla convinzione che essa sia esatta [†] e certamente applicabile a un corpo molto piccolo come una particella. ⁹⁶ Se dunque una particella contiene nel suo sistema proprio una quantità di calore $Q_0 = M_0 c^2$, la quantità di calore che trasporta nel sistema di riferimento in cui possiede velocità βc è

$$(37) \quad Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2} = M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} = h\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Così la particella ci appare contemporaneamente come un piccolo orologio di frequenza $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ e come un piccolo serbatoio di calore, di contenuto calorico $Q = Q_0 \sqrt{1 - \beta^2}$, in moto con velocità βc . È questa identità formale delle relazioni di trasformazione relativistiche per la frequenza di un orologio e per il calore che rende possibile questo duplice aspetto.

Quando la particella si sposta seguendo la legge della guida e l'onda non è un'onda piana monocromatica, la massa propria M_0 varia secondo la formula (9) quando se ne conosca la forma d'onda. Abbiamo visto che il moto della particella è allora regolato dalla dinamica relativistica di un corpo a massa propria variabile e siamo così portati a pensare che debba esistere un legame stretto tra la formula fondamentale della termodinamica relativistica e la formula della guida. Ciò è proprio quanto indica il ragionamento che segue.

[†] Vedere [5b] e [5d].

⁹⁶ Ci si aspetterebbe che il calore Q , essendo un'energia, si trasformasse relativisticamente secondo la relazione $Q = Q_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$. Invece, come de Broglie mostra nel lavoro [5b] (*La Thermodynamique relativiste e la Thermodynamique "cachée" des particules [La termodinamica relativistica e la termodinamica "nascosta" delle particelle]*), l'energia totale W di un corpo caldo in movimento con massa propria M_0 , data dalla relazione (29), può essere intesa come somma di due contributi: $W = Q + E_t$, dove $Q = M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$ è l'energia termica interna e $E_t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}$ è l'energia cinetica di traslazione. In tal modo W è legata a W_0 , energia totale nel sistema proprio, dalla giusta relazione relativistica $W = W_0 / \sqrt{1 - \beta^2}$, mentre il calore Q segue la trasformazione (36), in accordo con i risultati della termodinamica relativistica, esposti per esempio in M. Planck: *Zur Dynamik bewegten Systeme [Dinamica dei sistemi in movimento]*, Annalen der Physik **26** (1908) 1–34, e in M. von Laue: *Das Relativitätssprinzip*, F. Vieweg, Braunschweig, 1911. Per una derivazione della (36) secondo i principi della teoria della relatività applicati alla termodinamica, si veda il testo di W. Pauli: *Relativitätstheorie*, in Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, vol. 5, Teubner, Lipsia, 1921 [*Teoria della relatività*, trad. it. di P. Gulmanelli, Boringhieri, Torino, 1958, pagg. 201–202].

Ricordiamo dapprima che, se ϕ è la fase dell'onda scritta sotto la forma $a \exp(i\phi/\hbar)$ con a e ϕ reali, la teoria della guida ci dice che si ha

$$(38) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad -\mathbf{grad} \phi = \frac{M_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

D'altra parte, la formula (37) di Planck-von Laue può scriversi

$$(39) \quad Q = M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}.$$

Inserendo la (38) nella (39) otteniamo

$$(40) \quad M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \phi = \frac{d\phi}{dt}.$$

Ma così la particella è assimilabile a un orologio di frequenza propria $M_0 c^2/h$, la cui fase di vibrazione interna, scritta sotto la forma $a_i \exp(i\phi_i/\hbar)$ con a_i e ϕ_i reali, è

$$(41) \quad \phi_i = h\nu_i \sqrt{1 - \beta^2} t = M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} t$$

e si avrà

$$(42) \quad d(\phi_i - \phi) = 0,$$

che è in accordo con la nostra ipotesi fondamentale secondo la quale la particella si muove con la sua onda restando costantemente in fase con lei. Esiste dunque un legame stretto tra la teoria della guida e la termodinamica relativistica. Questo fatto è tanto più notevole in quanto la formula (36) risulta dai lavori di Planck e von Laue che sono precedenti alla comparsa della meccanica ondulatoria e della teoria della doppia soluzione.

10. – Relazione tra l'azione e l'entropia

Dopo tutto quanto è stato detto sembra naturale ragionare nel modo seguente. La dinamica relativistica ci insegna che la funzione di Lagrange di una particella libera di massa propria M_0 in moto con la velocità βc è $\mathcal{L} = -M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$ e che

$$(43) \quad \int \mathcal{L} dt = - \int M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt$$

è l'integrale d'azione, quantità invariante in quanto

$$M_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} dt = M_0 c^2 dt_0,$$

dove dt_0 è l'elemento di tempo proprio della particella. In accordo con un'idea già percepita da Eddington ⁹⁷ circa una cinquantina di anni orsono, si è tentati allora di stabilire una relazione tra i due grandi "invarianti" della Fisica che sono l'azione e l'entropia. Ma per poterlo fare occorre dare all'integrale d'azione (43) un valore ben definito, scegliendo convenientemente l'intervallo di integrazione. È allora naturale, secondo le nostre idee, scegliere come intervallo d'integrazione il periodo T_i della vibrazione interna della particella di massa propria m_0 nel sistema di riferimento in cui possiede la velocità βc . Siccome si ha

$$\frac{1}{T_i} = \frac{m_0 c^2}{h} \sqrt{1 - \beta^2},$$

si definisce così un integrale "ciclico" d'azione osservando che il periodo T_i è sempre piccolissimo, di modo che M_0 e β si possano considerare sensibilmente costanti nell'intervallo di integrazione e si possa definire l'azione A nel modo seguente:

$$(44) \quad \frac{A}{h} = - \int_0^{T_i} \frac{M_0 c^2}{h} \sqrt{1 - \beta^2} dt = - \frac{M_0 c^2}{m_0 c^2}.$$

Si è allora portati a definire l'entropia dello stato della particella secondo la formula:

$$(45) \quad \frac{S}{k} = \frac{A}{h},$$

dove k e h sono rispettivamente la costante di Boltzmann e quella di Planck. Siccome $\delta Q_0 = \delta M_0 c^2$, si ha allora la relazione

$$(46) \quad \delta S = -k \frac{\delta Q_0}{m_0 c^2}.$$

Siamo così giunti ad attribuire al moto della particella una certa entropia e perciò una certa probabilità P , data dalla formula di Boltzmann scritta sotto la forma $P = \exp[S/k]$. ⁹⁸

Dalle considerazioni precedenti ho potuto trarre un certo numero di risultati che si troveranno esposti nelle mie pubblicazioni sull'argomento [5]. I due risultati che mi sembrano più importanti sono i seguenti:

⁹⁷ L'astrofisico inglese Arthur Stanley Eddington (1882–1944) fu un grande divulgatore della teoria della relatività; nel 1919, in occasione di un'eclisse di sole, guidò la spedizione inglese all'isola Principe, nel golfo di Guinea, che riuscì a verificare le previsioni di Einstein sulla deviazione dei raggi luminosi provocata dal campo gravitazionale.

⁹⁸ L'entropia è un concetto statistico che acquista significato solo in presenza di un insieme di molte particelle. Attribuire alla particella una certa entropia è analogo all'uso della funzione d'onda ψ per descrivere una ben precisa particella.

1) Il principio di minima azione non è che un caso particolare del secondo principio della termodinamica.

2) Il privilegio, di cui Schrödinger aveva sottolineato il carattere paradossale, che la meccanica quantistica attuale attribuisce alle onde piane monocromatiche e agli stati stazionari dei sistemi quantizzati, si spiega con il fatto che corrispondono a dei massimi di entropia, mentre gli altri stati non sono inesistenti, ma hanno una probabilità molto minore.⁹⁹

11. – *Necessità di introdurre nella teoria della doppia soluzione un elemento aleatorio. Il termostato nascosto e il moto browniano della particella nell'onda.*

Finora abbiamo ragionato con l'ipotesi che il moto della particella nell'onda sia interamente determinato dalla legge della guida. Ora mostreremo perché questo punto di vista non possa essere interamente conservato.

Ragioneremo partendo dall'equazione di Schrödinger, che fornisce sempre una prima approssimazione per velocità piccole rispetto a c . Abbiamo visto al paragrafo 6 che l'equazione di continuità (C) porta a pensare che la probabilità di presenza della particella nell'elemento di volume $d\tau$ sia proporzionale a $a^2 d\tau$, dove a è l'ampiezza dell'onda v ; introducendo l'onda statistica, normalizzata secondo la relazione $\psi = Cv$, ciò porta a dire che la probabilità in questione è uguale in valore assoluto a $|\psi|^2$, risultato ben noto. D'altra parte secondo noi questa idea sembra portare a delle difficoltà. Lo si vede, per esempio, considerando un atomo di idrogeno in uno degli stati stazionari di tipo s . La formula della guida $\mathbf{v} = -\mathbf{grad} \phi/m$ ci dà $\mathbf{v} = 0$. L'elettrone sarebbe dunque fermo in un punto dell'atomo e non si vede come la relazione di continuità (C) potrebbe allora portarci a giustificare la probabilità nella forma $|\psi|^2 d\tau$.¹⁰⁰ Si può concludere che si deve completare questa relazione

⁹⁹ Nel lavoro [5b] de Broglie immagina che le traiettorie variare, lungo le quali si calcola l'integrale d'azione per soddisfare il principio variazionale, corrispondano a reali movimenti della particella la cui massa propria M_0 subisce fluttuazioni. Allora dimostra che l'entropia diminuisce in media nel passare dalla traiettoria effettivamente percorsa alle traiettorie variare: quindi il minimo dell'azione corrisponde al massimo di entropia e la traiettoria naturale diventa la più probabile.

¹⁰⁰ In uno stato s , a momento angolare nullo, la funzione d'onda di un elettrone in un atomo è isotropa spazialmente:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = f(r) \exp [i(\alpha - Et)/\hbar],$$

dove α è una costante di fase arbitraria e r è il raggio dal centro dell'atomo. La funzione di Jacobi risulta:

$$S = \alpha - Et$$

e quindi la velocità della particella è

$$\mathbf{v} = \nabla S = 0.$$

introducendo un elemento aleatorio.

Sembra che questa difficoltà sia del tutto analoga a quella che è ben nota in meccanica statistica classica dove il teorema di Liouville,¹⁰¹ che fornisce una relazione di continuità nello spazio delle fasi, non è sufficiente a stabilire che la probabilità del punto rappresentativo di una molecola di un gas di trovarsi in un elemento di volume del suo spazio delle fasi sia proporzionale a questo elemento di volume. Per giustificare questa affermazione occorre introdurre nel moto delle molecole un elemento aleatorio che perturba costantemente questo moto. Boltzmann, considerando questo elemento aleatorio come il risultato di urti continui di ogni molecola con le altre molecole del gas, l'aveva chiamato "il caos molecolare".¹⁰²

Analogamente, sembra che il fatto universalmente accettato che una particella abbia una probabilità $|\psi|^2 d\tau$ di manifestare la sua presenza in un elemento di volume $d\tau$ comporti necessariamente, quando si adottano le idee della teoria della doppia soluzione, l'intervento di un elemento aleatorio d'origine nascosta. Ora questo implica che il moto regolare della particella previsto dalla legge della guida debba subire continuamente delle perturbazioni aleatorie il cui effetto è quello di farla passare costantemente da una traiettoria della guida a un'altra. Allora, grazie all'introduzione di queste perturbazioni aleatorie, l'equazione di continuità $\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$, dove $\rho = a^2$ e \mathbf{v} è la velocità di guida, permetterà di giustificare la legge di probabilità di presenza con la relazione $|\psi|^2 = a^2$.

Si giunge così all'idea che il moto di una particella è la combinazione di un moto regolare definito dalla formula della guida e di un moto aleatorio che

Secondo Bohm, l'assenza di movimento è possibile in questo caso, perché la forza applicata, $-\nabla V(\mathbf{r})$, è bilanciata dalla forza quantistica $(\hbar^2/2m)\nabla(\nabla^2 R/R)$, prodotta dal campo di Schrödinger ψ che agisce sull'elettrone (cfr. §4 e equazione (4.8)). Tuttavia la posizione non è definita: esiste un insieme statistico di possibili posizioni dell'elettrone, con una densità di probabilità $(f(\mathbf{r}))^2$.

¹⁰¹ Joseph Liouville (1809–1882) è autore di oltre 400 memorie, di cui circa la metà dedicate alla teoria dei numeri. I matematici lo ricordano, tra l'altro, per la dimostrazione dell'esistenza dei numeri trascendenti. I fisici ne citano spesso i due teoremi relativi alla distribuzione dei punti che nello spazio delle fasi rappresentano i sistemi termodinamici in meccanica statistica: il primo teorema garantisce la conservazione della densità di distribuzione di tali punti e il secondo afferma che il flusso associato è a divergenza nulla, assimilando il moto dei punti rappresentativi nello spazio delle fasi a quello di un fluido incomprimibile.

¹⁰² De Broglie allude qui al moto browniano, cioè al moto casuale delle particelle in sospensione in un liquido, osservato per primo nel 1828 dal botanico inglese Robert Brown (1773–1858) nelle sue ricerche sui granelli di polline. Secondo quanto afferma Otto Wiener (1862–1927) nel ricordare il padre geometra (*Christian Wiener zum hundersten Geburtstag [Christian Wiener nel centenario della nascita]*, *Naturwissenschaften* **15** (1927) 81–84), la prima interpretazione microscopica del fenomeno in termini di moti molecolari è dovuta a C. Wiener (1826–1896): *Erklärung des atomistischen Wesens des tropfbar flüssigen Körperzustandes und Bestätigung desselben durch die sogenannten Molekülbewegungen [Spiegazione della natura atomistica delle gocce di un liquido e conferma della stessa mediante i cosiddetti moti molecolari]*, *Poggendorffschen Annalen der Physik und Chemie* **118** (1863).

ha il carattere di una agitazione browniana. Un confronto semplice farà meglio comprendere la possibilità di una tale sovrapposizione di moti. Consideriamo il flusso idrodinamico di un fluido. Un granellino posto sulla superficie del fluido sarà trascinato dal movimento del fluido. Se il granellino è abbastanza pesante per non subire sensibilmente l'azione degli urti individuali che riceve dalle molecole invisibili del fluido, esso descriverà una delle linee di corrente del flusso idrodinamico che potranno essere paragonate alle traiettorie di guida. Ma se il granellino è sufficientemente leggero, il suo moto sarà costantemente perturbato dagli urti individuali con le molecole del fluido. Esso sarà dunque animato, oltre che dal moto regolare generale del fluido, da un moto browniano che lo farà continuamente passare da una linea di corrente all'altra. Otteniamo così un'immagine della sovrapposizione di un moto aleatorio a un moto regolare, analogo a quello che stiamo proponendo per la particella.

Nell'immagine idrodinamica che abbiamo esposta è l'insieme delle molecole invisibili del fluido che gioca il ruolo di termostato nascosto, termostato che, con la sua interazione costante con il granellino, gli impone un moto browniano secondo l'idea ben nota della termodinamica statistica. Ma nel caso di una particella che ci sembra sottratta a ogni azione perturbatrice come un elettrone nell'atomo di idrogeno, quale può essere l'origine di queste perturbazioni aleatorie la cui esistenza ci pare necessario ammettere? Posta così la questione, si è evidentemente portati a pensare che ogni particella, anche quando ci sembra isolata, sia costantemente in contatto energetico con un mezzo nascosto che costituirebbe una sorta di termostato. Questa ipotesi è stata formulata, circa una quindicina di anni orsono, da Bohm e Vigier [6] che hanno dato a questo termostato il nome di "mezzo subquantistico".¹⁰³ Pensiamo che ci sia, in effetti, la possibilità di ammettere che la particella scambi continuamente energia e quantità di moto con un tale termostato nascosto. Questi scambi avverrebbero regolarmente in modo ben definito se esistesse solo il moto di guida, ma esso si sovrappone agli scambi energetici aleatori che hanno carattere di fluttuazioni di un tipo ben noto in termodinamica statistica.

Avendo ammesso l'esistenza di un mezzo subquantistico nascosto, si è portati a domandarci qual'è la natura di questo mezzo. Certamente ha una natura assai complicata. In effetti, esso non deve innanzi tutto poter servire come mezzo di riferimento universale, che sarebbe in contrasto con la teoria della relatività. Inoltre, esso si comporta non come un unico termostato, ma piuttosto come un insieme di termostati, le cui temperature sarebbero legate alle energie proprie m_0c^2 dei diversi tipi di molecole. Sebbene siano già stati fatti tentativi interessanti per precisare la natura del mezzo subquantistico, mi sembra prematuro discutere qui il problema.

¹⁰³ Jean-Pierre Vigier (1920–2004), dopo aver lavorato con Bohm, ha avuto anche fecondi scambi d'idee con de Broglie su questi argomenti. Per l'interesse del lavoro citato in [6], si veda al §4.

12. – *Conclusion*

Questo è, esposto a grandi linee, lo stato attuale dell'interpretazione della meccanica ondulatoria per mezzo della teoria della doppia soluzione con i suoi prolungamenti termodinamici recenti. Io penso oggi che questa interpretazione, quando sarà approfondita, estesa e forse modificata in alcuni punti, ci permetterà di comprendere meglio la vera natura della coesistenza di onde e particelle, su cui il formalismo della meccanica quantistica attuale non ci fornisce che delle informazioni statistiche spesso esatte, ma a mio avviso incomplete.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI ¹⁰⁴

- [1] a) *Compt. Rend. Acad. Sciences Paris*, **177**, 506, 548, 630 (1923);
b) Thèse de Doctorat (Parigi, 1924) (seconda edizione, Masson, Parigi, 1963).
- [2] *Journ. de Phys.*, **5**, 225 (1927).
- [3] a) *Une interprétation causale et nonlinéaire de la mécanique ondula-
toire: la théorie de la double solution* (Gauthier-Villars, Parigi, 1956)
(traduzione inglese: Amsterdam, 1960);
b) *La théorie de la mesure en mécanique ondulatoire* (Gauthier-Villars,
Parigi, 1957);
c) *Étude critique des bases de l'interprétation usuelle de la mécanique
ondulatoire* (Gauthier-Villars, Parigi, 1963) (traduzione inglese: Amster-
dam, 1964);
d) *Ondes électromagnétiques et photons* (Gauthier-Villars, Parigi, 1968);
e) *Journ. de Phys.*, **20**, 963 (1959);
f) *Journ. de Phys.*, **28**, 481 (1967);
g) *Certitudes et incertitudes de la science* (Albin Michel, Parigi, 1966).
- [4] a) F. Fer: Thèse de Doctorat, Bureau de Documentation Minière (Parigi,
1957);
b) M. Thiounn: Thèse de Doctorat, Cahiers de Physique, No. 174 (1965);
Compt. Rend. Acad. Sciences Paris, B **262**, 657 (1966); *Portugaliae
Phys.*, **4**, 208 (1966).
- [5] a) *La thermodynamique de la particule isolée (ou thermodynamique ca-
chée des particules)* (Gauthier-Villars, Parigi, 1964);
b) *Int. Journ. Theor. Phys.*, **1**, 1 (1968);
c) *Ann. Inst. H.Poincaré*, **1**, 1 (1964);
d) *Ann. Inst. H.Poincaré*, **9**, 89 (1969).
- [6] D. Bohm e J. P. Vigier: *Phys. Rev.*, **96**, 208 (1954).
- [7] *La réinterprétation de la mécanique ondulatoire* (Gauthier-Villars, Parigi,
1971).

¹⁰⁴ L'elenco qui presentato segue l'edizione inglese apparsa sugli *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, volume 12, n. 4 (1987) p. 399–421.

§4. Determinismo e variabili nascoste

Scrive de Broglie: ¹⁰⁵ “Al Congresso Solvay le discussioni furono vivaci. In un bel discorso inaugurale, Lorentz aveva sostenuto e precisato il punto di vista della teoria classica. Born, Heisenberg e Bohr avevano affermato la necessità di concetti, in qualche modo rivoluzionari, che implicavano un’interpretazione puramente probabilistica della nuova meccanica. Schrödinger manteneva un orientamento di spirito molto classico e cercava di identificare le particelle con dei treni di onde, ipotesi che non mi sembrava soddisfacente. Einstein, profondamente ostile all’interpretazione puramente probabilistica, le opponeva obiezioni inquietanti che Bohr cercava di scartare con ragionamenti sottili ...”. ¹⁰⁶ In questa atmosfera Louis de Broglie espone la sua immagine del dualismo onda-corpuscolo nella forma attenuata da lui definita dell’*onda pilota*. L’ipotesi è che l’onda Ψ *pilota* per così dire il moto della particella, che ne viene in pratica trascinata durante la propagazione dell’onda. Questa visione fu criticata da Pauli con molta durezza, come era solito fare, portando l’esempio di una particella che urta un rotatore rigido: dopo l’urto le fluttuazioni violente dell’impulso, in dipendenza della posizione della particella in seno all’onda diffusa, non permetterebbero, secondo Pauli, di ricostruire uno stato finale stazionario corrispondente a una ben definita energia della particella e del rotatore, come invece si riscontra sempre in tutti i processi d’urto. Lo stesso de Broglie, di ritorno a Parigi, si accorge della inconsistenza del quadro di una particella guidata dal moto di un’onda continua, il cui significato si andava imponendo sempre più di natura probabilistica e tale da rappresentare unicamente lo stato della nostra conoscenza sul moto della particella, piuttosto che una vera realtà sperimentabile. Né de Broglie si sente di riprendere lo studio della doppia soluzione dell’equazione di Schrödinger ¹⁰⁷ che aveva proposto prima del Congresso Solvay, a causa

¹⁰⁵ *Vue d’ensemble sur mes travaux scientifiques [Visione d’insieme sui miei lavori scientifici]* (p. 468), contributo al libro pubblicato in onore dei sessanta anni compiuti da de Broglie, a cura di André George: *Louis de Broglie physicien et penseur*, Albin Michel, Parigi, 1953, p. 457–486.

¹⁰⁶ Il rapporto di Bohr al Quinto Congresso Solvay fu seguito da un ampio dibattito che si protrasse a lungo anche al di fuori delle sedute ufficiali e in ore serali. Secondo quanto riferisce Jagdish Mehra (*The Solvay Conferences on Physics, Aspects of the Development of Physics since 1911*, D.Reidel, Dordrecht, 1975, p. 152), durante una seduta Ehrenfest passò ad Einstein un bigliettino con la scritta: *Non ridere! c’è una sezione speciale in purgatorio per i professori della teoria quantistica, in cui sono obbligati ad ascoltare lezioni di fisica classica dieci ore al giorno*. Einstein rispose: *Rido solo della loro ingenuità. Chi sa chi riderà tra pochi anni?* Le discussioni tra Einstein e Bohr continuarono per altri vent’anni, senza che Einstein si rassegnasse alla rinuncia del determinismo in fisica. Un riassunto di questo dialogo a distanza di Bohr con Einstein si trova riportato da Mehra (*loc. cit.*, p. 153–179): *Discussion with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics*, riprodotto dal contributo di Bohr al libro pubblicato in onore dei settanta anni di Einstein: *Albert Einstein: Philosopher–Scientist*, The Library of Living Philosophers, Tudor Publishing Company, 1949; Harper & Row, New York, 1959.

¹⁰⁷ *La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement [La*

di difficoltà matematiche per lui allora insormontabili.

“Scoraggiato, abbandonai completamente i miei tentativi di interpretazione deterministica della meccanica ondulatoria e mi allineai interamente alla concezione di Bohr e Heisenberg. Durante l’autunno del 1928 fui incaricato di un insegnamento ufficiale alla Facoltà di Scienze di Parigi e consacrai il mio primo corso all’esposizione delle idee di Bohr e Heisenberg, mostrando i motivi di insufficienza della mia teoria dell’onda pilota . . .”.¹⁰⁸ E questa rimase la sua posizione fino al 1951, quando David Bohm, stimolato da discussioni avute con Einstein, riformula indipendentemente l’ipotesi di un’interpretazione causale della meccanica quantistica ricorrendo di nuovo all’idea che la natura probabilistica della Ψ sia dovuta al fatto che nella descrizione del sistema sfuggono dei parametri a livello più profondo, che restano nascosti.¹⁰⁹

Un così lungo intervallo di tempo fu necessario per riesumare un problema sepolto, più che dalle obiezioni di Pauli, dall’autorità di von Neumann. Questi, nel suo libro del 1932,¹¹⁰ aveva esaminato la possibilità di introdurre *variabili nascoste* per completare la teoria della meccanica quantistica ed eliminare dalla teoria stessa gli effetti del principio di indeterminazione.¹¹¹

Von Neumann pensò che si potesse costruire una teoria a variabili nascoste lasciando inalterati tutti gli assiomi della teoria quantistica, semplicemente aggiungendo un postulato supplementare: negli stati caratterizzati anche dalle variabili nascoste *tutte* le osservabili sono *simultaneamente* prive di dispersione, cioè il loro valore quadratico medio eguaglia il quadrato del loro valore medio. Ma questo postulato risultò in contrasto con gli altri assiomi.

L’impossibilità di realizzare stati privi di dispersione elimina dunque, per von Neumann, l’ipotesi dell’esistenza di variabili nascoste. Alla luce del

meccanica ondulatoria e la struttura atomica della materia e della radiazione], Journal de Physique et le radium **8** (1927) 225–241.

¹⁰⁸ dal contributo citato in *Louis de Broglie physicien et penseur*, p. 469. Nel libro *La physique quantique restera-t-elle indéterministe?* (Gauthier-Villars, Parigi, 1953) de Broglie riassume i motivi della sua insoddisfazione: se l’onda Ψ , da cui deriva il potenziale quantistico, è solo una rappresentazione di probabilità, il moto fisico definito dall’onda pilota verrebbe a dipendere anche da possibilità che non sono realizzate. Inoltre ogni misurazione di posizione riduce bruscamente l’estensione della Ψ e ne modifica la forma, modificando il potenziale quantistico in modo incontrollabile.

¹⁰⁹ D. Bohm: *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden” Variables. I & II* [Suggerimento di una interpretazione della teoria quantistica in termini di variabili “nascoste”. I & II], Physical Review **85** (1952) 166–179, 180–193.

¹¹⁰ *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, J. Springer, Berlino, 1932, pagg. 167–173.

¹¹¹ Si ricorda che il principio di indeterminazione riguarda una relazione tra gli scarti quadratici medi relativi a operatori che non commutano: se esistessero stati per i quali questi scarti quadratici medi fossero nulli, cioè il valore quadratico medio fosse uguale al quadrato del valore medio, allora la misurazione della quantità fisica associata a uno di questi operatori non introdurrebbe disturbi incontrollabili nel sistema, permettendo di misurare con estrema precisione anche le quantità fisiche associate agli altri operatori.

teorema di von Neumann la meccanica quantistica risulta una teoria coerente e completa, che impone la rinuncia al determinismo della fisica classica e l'adesione all'interpretazione statistica quale emersa dal Quinto Congresso Solvay e dalla scuola di Copenhagen.¹¹²

Solo se si crede in una realtà fisica oggettiva, si può lo stesso essere insoddisfatti, come lo fu, ancora una volta, Albert Einstein.¹¹³

Per sistemi compositi, le cui parti siano state in interazione nel passato, la meccanica quantistica prevede che una misurazione fatta su una parte fornisca informazioni anche sull'altra, quando entrambe queste parti siano spazialmente ben separate e non più interagenti. Questa correlazione di tipo quantistico, può divenire paradossale se si vogliono attribuire proprietà oggettive al particolare sistema fisico. Posto che allora nella descrizione ondulatoria di *una* particella non è possibile conoscerne con estrema precisione simultaneamente la posizione e l'impulso, l'idea di Einstein, Podolsky e Rosen è di dedurre la conoscenza dalle misure di posizione e impulso su un'altra particella. Si supponga infatti che le due particelle interagiscano tra di loro inizialmente e quindi si allontanino senza più interagire né tra di loro né con il resto dell'universo. Secondo le regole della meccanica quantistica si possono misurare con precisione impulso totale e distanza relativa delle due particelle interagenti; misurando a un istante successivo l'impulso di una particella, si può determinare l'impulso dell'altra dalla conservazione dell'impulso totale. Si può anche misurare la posizione della stessa particella di cui si è misurato l'impulso: così facendo se ne altera l'impulso, ma non si altera l'impulso dell'altra particella lontana, della quale ora si può invece conoscere anche la posizione, a partire dal suo impulso e dalla separazione iniziale delle due particelle. In questo modo sembrerebbe possibile conoscere posizione e impulso di una particella violando il principio di indeterminazione. Oppure si deve ammettere un'azione istantanea a distanza che determina i parametri della seconda particella in conseguenza delle misurazioni fatte sulla prima: "ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica . . . Se, senza in alcun modo disturbare il sistema, possiamo predire con certezza (cioè con probabilità uguale

¹¹² In realtà von Neumann avrebbe dovuto concludere che veniva escluso solo quel suo tipo di variabili nascoste, non per questo risultando impossibile qualche altro tipo di completamento della meccanica quantistica. Ma per raggiungere questa consapevolezza critica occorre aspettare il lavoro di Bohm, che viene illustrato più avanti, e soprattutto quello successivo di J. S. Bell: *On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics*, *Reviews of Modern Physics* **38** (1966) 447–452.

Per una rassegna delle teorie a variabili nascoste e un esame critico della loro classificazione, si veda il testo di Frederik Jozef Belinfante: *A Survey of Hidden-Variables Theories*, Pergamon Press, Oxford, 1973. Secondo la classificazione di Belinfante, quella di von Neumann rientra nelle teorie a variabili nascoste di tipo "zero", cioè quelle teorie che risultano impossibili alla luce dei loro postulati.

¹¹³ Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? [Può considerarsi completa la descrizione della realtà fisica fatta dalla meccanica quantistica?]*, *Physical Review* **47** (1935) 777–780.

a uno) il valore di una quantità fisica, deve esistere un elemento di realtà fisica corrispondente a questa quantità fisica”. Dunque “partendo dall’ipotesi che la funzione d’onda dia una descrizione completa della realtà fisica, siamo arrivati alla conclusione che due quantità fisiche, rappresentate da operatori che non commutano, possono avere realtà simultaneamente”.¹¹⁴

Alla base delle idee di Einstein, Podolsky e Rosen nell’affermare l’incompletezza della meccanica quantistica si trovano tre ipotesi che sono state messe in luce dai sostenitori delle cosiddette teorie realistiche locali:¹¹⁵

- 1) Realismo: la regolarità dei fenomeni osservati è provocata da qualche realtà fisica la cui esistenza è indipendente dall’osservatore umano.
- 2) Induzione: l’inferenza induttiva è un tipo di ragionamento valido, applicabile liberamente in modo da trarre conclusioni legittime da osservazioni coerenti.
- 3) Separabilità (o località): le proprietà di un sistema non possono essere influenzate da una misurazione eseguita su un altro sistema non interagente con esso.

Nel 1964 John Stewart Bell (1928–1990), riprendendo l’esempio del paradosso EPR nella variante proposta da Bohm e Aharonov,¹¹⁶ riesce a stabilire che le teorie realistiche locali a variabili nascoste pongono in generale un limite alla possibilità di correlare eventi distanti spazialmente, mentre la

¹¹⁴ Bohr replicò immediatamente a questo lavoro, confutando il criterio di realtà fisica proposto, con un articolo dallo stesso titolo (*Physical Review* **48** (1935) 696–702). Gli aspetti paradossali del lavoro di Einstein, Podolsky e Rosen, noti appunto come paradosso EPR, nascono dalla pretesa di considerare la Ψ come una proprietà fisica del sistema; essi furono ulteriormente evidenziati da W. H. Furry (*Note on the Quantum-Mechanical Theory of Measurement [Nota sulla teoria quantistica della misurazione]*, *Physical Review* **49** (1936) 393–399, 476) e da Schrödinger (*Discussion of probability relations between separated systems [Discussione delle relazioni di probabilità tra sistemi separati]*, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **31** (1935) 555–563; *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik [La situazione attuale della meccanica quantistica]*, *Naturwissenschaften* **23** (1935) 807–812, 823–828, 844–849), riaprendo una discussione che, per certi aspetti, è tuttora attuale (cfr. Gian Carlo Ghirardi, Alberto Rimini e Tullio Weber: *The Puzzling Entanglement of Schrödinger’s Wave Function [L’intreccio problematico della funzione d’onda di Schrödinger]*, *Foundations of Physics* **18** (1988) 1–27).

¹¹⁵ Per una rassegna divulgativa delle teorie realistiche locali, si veda l’articolo di Bernard d’Espagnat (n. 1921): *La teoria dei quanti e la realtà*, *Le Scienze* **24** n. 137 (1980) p. 52–68. Nella classificazione di Belinfante (*loc. cit.*) le teorie realistiche locali sono teorie a variabili nascoste di “secondo” tipo, cioè teorie originate dal desiderio di descrivere in modo causale sistemi che hanno interagito nel passato; tali teorie prevedono situazioni fisiche che possono essere in conflitto con le predizioni della meccanica quantistica.

¹¹⁶ D. Bohm e Y. Aharonov: *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky [Discussione della prova sperimentale per il paradosso di Einstein, Rosen e Podolsky]*, *Physical Review* **108** (1957) 1070–1076. Anziché misurazioni di posizione e impulso per un sistema di due particelle a spin $\frac{1}{2}$, Bohm e Aharonov suggeriscono la misurazione della componente di spin di una delle due particelle secondo diverse direzioni ortogonali tra di loro, imponendo che inizialmente le due particelle si trovino in uno stato di singoletto (a spin totale nullo). In questo modo sarebbe possibile conoscere la componente di spin dell’altra particella secondo diverse direzioni ortogonali tra di loro, in contrasto con la meccanica quantistica.

meccanica quantistica prevede al contrario che questo limite si possa superare in certe circostanze.¹¹⁷

Il teorema di Bell si presta a possibile verifica sperimentale. Ma i complessi e raffinati esperimenti finora ultimati hanno sempre dato risultati in accordo con l'interpretazione tradizionale della meccanica quantistica.¹¹⁸

Va anche ricordato il tentativo fatto da Leggett di negare l'esistenza di variabili nascoste non locali mediante la violazione di opportune disuguaglianze da parte della meccanica quantistica.¹¹⁹

Bohm invece ammette che la tradizionale interpretazione della meccanica quantistica sia coerente; però i motivi di coerenza non escludono la possibilità di interpretazioni ugualmente coerenti, che coinvolgono elementi addizionali in grado di recuperare in linea di principio una descrizione causale di tutti i processi. Dal punto di vista dell'interpretazione usuale questi elementi addizionali sono le variabili nascoste.¹²⁰

¹¹⁷ J. S. Bell: *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox [Il paradosso di Einstein Podolsky Rosen]*, *Physics* **1** (1964) 195–200. Per una riformulazione delle disuguaglianze di Bell, si veda l'articolo di Eugene Paul Wigner (1902–1995): *On Hidden Variables and Quantum Mechanical Probabilities [Variabili nascoste e probabilità in meccanica quantistica]*, *American Journal of Physics* **38** (1970) 1005–1009.

¹¹⁸ Per una rassegna del panorama sperimentale fino al 1978, si veda l'articolo di John F. Clauser e Abner Shimony: *Bell's theorem: experimental tests and implications [Il teorema di Bell: verifiche sperimentali e loro implicazioni]*, *Reports on Progress in Physics* **41** (1978) 1881–1927. Una recente rassegna sperimentale di carattere divulgativo si trova nell'articolo di Abner Shimony: *La realtà del mondo dei quanti*, *Le Scienze* **40**, n. 235 (1988) p. 38–45. I risultati più recenti di questa indagine sperimentale sono di Alain Aspect, Jean Dalibard e Gérard Roger: *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem [Verifiche sperimentali delle teorie realistiche locali per mezzo del teorema di Bell]*, *Physical Review* **47** (1981) 460–463; *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities [Realizzazione sperimentale dell'esperimento ideale di Einstein-Podolsky-Rosen: una nuova violazione delle disuguaglianze di Bell]*, *Physical Review* **49** (1982) 91–94; *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers [Verifica sperimentale delle disuguaglianze di Bell utilizzando analizzatori a tempo variabile]*, *Physical Review* **49** (1982) 1804–1807. Per queste considerazioni si veda anche il Quaderno in questa collana dal titolo "Paradosso EPR e teorema di Bell", a cura di Oreste Nicosini.

¹¹⁹ A. J. Leggett: *Nonlocal Hidden-Variable Theories and Quantum Mechanics: An Incompatibility Theorem [Teorie a variabili nascoste non locali e meccanica quantistica: un teorema di incompatibilità]*, *Foundations of Physics* **33** (2003) 1469–1493.

Anthony James Leggett (n. 1938), Premio Nobel per la Fisica del 2003 insieme con Alexei A. Abrikosov (n. 1928) e Vitaly L. Ginzburg (n. 1916), per i suoi contributi pionieristici alla teoria dei superconduttori e dei superfluidi, si era già occupato nel 1976 di variabili nascoste non locali formulando alcune disuguaglianze in gradi di discriminare l'esistenza di una particolare classe di variabili nascoste, ma completò il suo studio solo nel 2003 col citato articolo. Le argomentazioni di Leggett sono state riprese recentemente e i test sperimentali mostrano ancora la validità della meccanica quantistica senza dover ricorrere a variabili nascoste.

C. Branciard, N. Brunner, N. Gisin, Ch. Kurtsiefer, A. Lamas-Linares, A. Ling, V. Scarani: *Testing quantum correlations versus single-particle properties with Leggett's model and beyond*, arXiv:0801.2241 [quant-ph].

¹²⁰ Sempre nella classificazione di Belinfante, la teoria di Bohm, così come quella di de Broglie,

Partendo dall'equazione di Schrödinger (2.33), dove la Ψ è una funzione complessa, esprimibile nella forma

$$\Psi = R \exp(iS/\hbar), \quad (4.1)$$

con R e S reali, Bohm ottiene le due equazioni

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m} [R \nabla^2 S + 2 \nabla R \cdot \nabla S], \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right], \quad (4.3)$$

simili alle (C) e (J) di de Broglie.

Introducendo la densità di probabilità $P(\mathbf{r}) = R^2(\mathbf{r})$, queste si possono riscrivere

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left(P \frac{\nabla S}{m} \right) = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla P)^2}{P^2} \right] = 0. \quad (4.5)$$

La (4.4) è un'equazione di continuità:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P \mathbf{v}) = 0, \quad (4.6)$$

dove $\mathbf{v} = \nabla S(\mathbf{r})/m$ può essere interpretata, secondo quanto faceva anche de Broglie, come la velocità di una particella di massa m che si muove lungo la traiettoria normale alla superficie ad azione S costante. La funzione S soddisfa all'equazione di Hamilton–Jacobi classica, se si è autorizzati a trascurare nella (4.5) il termine in \hbar^2 : questo termine

$$U(\mathbf{r}) \equiv -\frac{\hbar^2}{4m} \left[\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla P)^2}{P^2} \right] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}, \quad (4.7)$$

ha il ruolo di un *potenziale quantistico*. Sarebbe perciò in linea di principio possibile scrivere l'equazione del moto classica:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \left[V(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right]. \quad (4.8)$$

rientra nel gruppo di teorie a variabili nascoste di “primo” tipo, impossibili da falsificare sperimentalmente in un confronto con la meccanica quantistica, perché forniscono identiche previsioni. Queste teorie nascono dall'esigenza di salvaguardare il determinismo, senza contraddire i successi della meccanica quantistica; essendo essenzialmente nonlocali, esse non sono escluse dai risultati sperimentali relativi alle teorie realistiche locali.

La (4.8) è l'equazione di evoluzione temporale per le variabili nascoste di posizione della particella: in essa, oltre alla forza dovuta al potenziale esterno classico, compare una forza quantistica determinata dalle variazioni spaziali della funzione d'onda. Perciò in questa proposta la funzione d'onda Ψ può essere coerentemente considerata responsabile sia di una densità di probabilità, sia di una forza quantistica che agisce sulla particella.

Per non compromettere l'interpretazione usuale, alla soluzione della (4.8) Bohm impone condizioni al contorno in accordo con quelle relative all'equazione di Schrödinger: perciò occorre che sia

$$\mathbf{p} = \nabla S(\mathbf{r}). \quad (4.9)$$

L'usuale interpretazione della meccanica quantistica è salvaguardata dunque accettando le seguenti tre ipotesi, tra loro coerenti:

1. il campo Ψ soddisfa all'equazione di Schrödinger;
2. l'impulso della particella è determinato dalla condizione $\mathbf{p} = \nabla S$;
3. la precisa posizione della particella non è nota; piuttosto si ha l'insieme statistico caratterizzato dalla densità di probabilità $P(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2$.

Non essendo nota con precisione la posizione, neppure è noto l'impulso, che va calcolato con la (4.9): perciò sia la posizione, sia l'impulso possono essere considerati a questo livello delle variabili nascoste.¹²¹

In una misurazione di posizione o di impulso o di ogni altra variabile dinamica, l'interazione tra il sistema studiato e lo strumento modifica la quantità coniugata a quella che si misura in una maniera che sfugge al nostro controllo e limita di conseguenza la possibilità di definire questa quantità nelle condizioni della misurazione disposta. Questa limitazione è inevitabile, perché risulta dal funzionamento stesso dell'apparato di misura e dal fatto che l'interazione tra apparato e sistema è sottoposta alle leggi quantistiche.

Ciò è alla base dell'idea di complementarità di Bohr, che incontra difficoltà di accettazione se ci si pone dal punto di vista classico di fenomeni regolati da leggi deterministiche e causali. Come a più riprese fa notare Léon Rosenfeld (1904–1974), “se si cerca di analizzare le cause di questa resistenza si vedrà che sono riconducibili a una matrice comune: la cattiva conoscenza del movimento dialettico del pensiero scientifico.”¹²² Definito il *fenomeno* come quel

¹²¹ Con le ipotesi fatte, Bohm è anche in grado di confutare le obiezioni di Pauli a de Broglie, in quanto recupera totalmente la descrizione quantistica usuale. Inoltre, applicando la (4.8) ad ognuna delle due particelle del paradosso EPR, è possibile riscontrare un esplicito meccanismo causale che agisce a distanza tramite il potenziale quantistico costruito con la funzione d'onda di entrambe le particelle. Come fa notare Bell (1966, *loc. cit.*), il paradosso “è risolto nel modo che meno sarebbe piaciuto ad Einstein”.

¹²² L. Rosenfeld: *L'évidence de la complémentarité [L'evidenza della complementarità]*, in *Louis de Broglie, Physicien et Penseur*, Albin Michel, Parigi, 1953, p. 43–65. Rosenfeld, membro del gruppo che lavorava intorno a Bohr a Copenhagen, ha svolto un ruolo importante nella divulgazione delle nuove idee introdotte dalla meccanica quantistica nella discussione dei problemi epistemologici.

tutto indivisibile formato dal sistema e dagli strumenti d'osservazione, per Bohr e Rosenfeld la complementarità si presenta come una relazione tra i fenomeni, d'un tipo sconosciuto in fisica classica: essa si presenta allorché la realizzazione di uno dei fenomeni a una data approssimazione non permette la realizzazione del fenomeno complementare, se non con un'ampiezza proporzionatamente più grande. Accettare la complementarità e rinunciare a una descrizione causale richiede un riorientamento di prospettiva paragonabile a quello imposto dalla rinuncia al concetto di simultaneità in teoria della relatività.

Invece per Bohm il ricorso all'interpretazione statistica non è più necessario: è solo la conseguenza della difficoltà di conoscere le condizioni iniziali da inserire nelle (4.8) e (4.9).

In accordo con Bohr, anche Bohm sottolinea il ruolo fondamentale dell'apparato di misura come parte inseparabile del *fenomeno* osservato. Ma in contrasto con Bohr, propone un metodo in cui il ruolo dell'apparato può essere analizzato in linea di principio in modo preciso mediante una hamiltoniana di interazione tra sistema e strumento di misura. Nell'interazione, la funzione Ψ subisce un'evoluzione complicata, durante la quale le funzioni R e S subiscono violente oscillazioni in funzione sia delle coordinate spaziali che del tempo. Di conseguenza anche il potenziale quantistico fluttua violentemente, inducendo fluttuazioni estremamente complicate nell'impulso $\mathbf{p} = \nabla S$ della particella. In tal modo il principio di indeterminazione non è più una limitazione di principio, ma piuttosto una limitazione pratica introdotta dal disturbo incontrollabile e impreveduto provocato dallo strumento di misura.

Tra gli infiniti modi possibili di modificare l'equazione di Schrödinger per tenere conto delle variabili nascoste, Bohm suggerisce di aggiungere un termine alla (2.33) o alla (4.8), che sia diverso da zero solo quando non è soddisfatta la (4.9): in tal modo in linea di principio sarebbe possibile trovare situazioni in cui $|\Psi|^2$ non rappresenta più la densità di probabilità di presenza della particella. Occorre però aggiungere che Bohm ritiene che, anche partendo da una arbitraria densità di probabilità diversa da $|\Psi|^2$, si ottenga rapidamente la densità $|\Psi|^2$ grazie a meccanismi di fluttuazioni caotiche, simili a quelli del moto browniano classico già invocato da de Broglie.¹²³

Allora la Ψ descrive il sistema in modo incompleto, come i parametri macroscopici di pressione e temperatura descrivono solo in modo globale un sistema termodinamico, il cui microstato dinamico viene specificato solo se si assegnano posizione e velocità di tutte le particelle che lo costituiscono. In meccanica statistica, al particolare sistema fisico in esame si associa un insieme di sistemi tutti uguali, ma con microstati dinamici diversi, e si studia l'evoluzione

¹²³ Si veda a questo proposito l'articolo, già citato da de Broglie come [6], di D. Bohm e J. P. Vigiier: *Model of the Causal Interpretation of Quantum Theory in Terms of a Fluid with Irregular Fluctuations [Modello di interpretazione causale della teoria quantistica in termini di un fluido con fluttuazioni irregolari]*, Physical Review **96** (1954) 208–217.

media dell'insieme per conoscere i valori dei parametri macroscopici di quel sistema. In modo simile, si può parlare di "microstato quantistico", definito specificando, oltre che la Ψ , anche un insieme opportuno di variabili nascoste. Però, a differenza di quanto succede in meccanica statistica, la Ψ non è solo un "parametro macroscopico" che descrive lo stato quantistico dell'insieme cui appartengono tutti i microstati quantistici. Essa è necessaria, accanto alle variabili nascoste, per individuare il particolare microstato e tutti i microstati (che corrispondono agli stati fisici dei sistemi dell'insieme) sono caratterizzati dalla stessa Ψ : nella teoria di Bohm la Ψ interviene nell'equazione di evoluzione temporale per le variabili nascoste (cfr. (4.8)).

Il fatto che il parametro d'insieme Ψ sia usato anche come parametro microscopico costituisce un problema, perché lo stesso microstato può appartenere a più di un insieme. Ma se il risultato di una misurazione fa precipitare il sistema in una diversa Ψ , corrispondente a un altro insieme, non si capisce come si possa descrivere il processo di misurazione in termini di microstati.

"Pertanto, ¹²⁴ tutta questa costruzione seducente non è che un inganno. A Bohm piace dare alle sue *variabili nascoste* il nome di coordinate e di impulso; ma siamo ben distanti da ciò. Per assicurarci che un certo parametro rappresenti davvero fisicamente la posizione di una particella occorre metterlo in relazione con il sistema di riferimento spaziale di un osservatore, occorre effettuare una *misurazione* di posizione. Ma allora, proprio come ci si aspetta, e come d'altra parte Bohm lo mostra coscienziosamente, ci si accorge che l'identificazione dei parametri con i concetti fisici corrispondenti non è giustificata che nei limiti delle relazioni di indeterminazione. Così, questo sottile e laborioso giro in fin dei conti ci riporta anche lui alla complementarità

"Probabilità non vuol dire *caso* senza regola, ma proprio l'opposto: c'è una regola al caso. Una legge statistica è prima di tutto una *legge*, l'espressione di una regolarità, uno strumento di previsione".

Con l'avvento della meccanica quantistica per la prima volta nella storia della fisica si è costretti ad abbandonare la distinzione così comoda tra l'osservatore e l'oggetto dell'osservazione. Ma l'oggettività della descrizione è garantita dall'invarianza delle equazioni che legano tra di loro gli operatori per trasformazioni canoniche: queste equazioni rappresentano il contenuto oggettivo della teoria e sono le espressioni oggettive delle leggi naturali. La libertà dell'osservatore si riduce a definire col suo intervento il fenomeno che vuole studiare, inibendosi allo stesso tempo il fenomeno complementare in quel particolare sistema fisico in esame.

¹²⁴ Prosegue Rosenfeld, *loc. cit.*

Università degli Studi di Pavia
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica
QUADERNI DI FISICA TEORICA
Collana di monografie curata da Sigfrido Boffi

1. Le onde di de Broglie, a cura di Sigfrido Boffi
2. Onde di materia e onde di probabilità, a cura di Sigfrido Boffi
3. Il principio di indeterminazione, a cura di Sigfrido Boffi
4. La meccanica delle onde, a cura di Sigfrido Boffi
5. Paradosso EPR e teorema di Bell, a cura di Oreste Nicosini
6. I cammini di Feynman, a cura di Marco Roncadelli e Antonio Defendi
7. L'interpretazione statistica della meccanica quantistica, a cura di Sigfrido Boffi
8. L'origine delle statistiche quantistiche, a cura di Fulvio Piccinini
9. Le radici della quantizzazione, a cura di Sandro Graffi
10. La fase di Berry, a cura di Franco Salmistraro
11. Il postulato dei quanti e il significato della funzione d'onda, a cura di Sigfrido Boffi
12. Indice di rifrazione adronico, a cura di Francesco Cannata
13. La formulazione delle storie della meccanica quantistica, a cura di Irene Giardina
14. La regola d'oro di Fermi, di Paolo Facchi e Saverio Pascazio
15. Le radici del dualismo onda-corpuscolo, a cura di Sigfrido Boffi e Michele D'Anna
16. Teoria delle caratteristiche ed equazioni ondulatorie quantiche, a cura di Paola Orsi
17. La nascita del concetto di quanto, di Francesco La Teana
18. Da Heisenberg a Landau. Introduzione alla fisica dei sistemi a molte particelle,
di Sigfrido Boffi
19. Aspetti astrofisici della materia oscura, di Marco Roncadelli
20. La nascita dello spin, di Francesco La Teana
21. Le forme di Dirac, di Sigfrido Boffi

QUADERNI DI FISICA TEORICA

Collana curata da Sigfrido Boffi

Dopo un primo biennio, in cui ha rivisto con maggiori dettagli e approfondimenti lo sviluppo della fisica classica e ha imparato a destreggiarsi con alcuni aspetti del formalismo matematico necessario, lo studente del Corso di Laurea in Fisica è costretto ad affrontare un nuovo modo di descrivere la natura che ormai il ricercatore professionale ha fatto suo da oltre mezzo secolo, ma che tuttora risulta estraneo al cosiddetto senso comune. L'impatto è principalmente difficile nel corso di Istituzioni di Fisica Teorica, che è tradizionalmente dedicato all'esposizione dei metodi teorici della meccanica quantistica così come si sono sviluppati nella prima metà del nostro secolo. Sembra perciò utile proporre, con questa collana di "*Quaderni di Fisica Teorica*," un tema, o un autore, attraverso la lettura commentata di uno o più articoli originali. Lo studente si accorgerà allora che le teorie organicamente presentate nei suoi manuali, necessarie per la pratica scientifica attuale, sono piuttosto il risultato di un lungo travaglio di idee, tentativi, successi, difficoltà, e infine di scelte, che sono sempre presenti nell'avventura dell'uomo animato dal desiderio invincibile di capire. Sarà dunque preparato, al termine dei suoi studi durante i quali si è impadronito in breve tempo dei risultati fondamentali ottenuti nell'arco di secoli, ad affrontare a sua volta, come giovane ricercatore, un cammino pieno di trabocchetti, ma anche ricco di soddisfazioni.

ONDE DI MATERIA E ONDE DI PROBABILITÀ

Il riconoscimento dell'analogia formale tra ottica geometrica e meccanica del punto materiale ha permesso a de Broglie di associare la propagazione di un'onda al moto di una particella e a Schrödinger di formulare l'equazione fondamentale della meccanica ondulatoria. Ma la corretta interpretazione della funzione d'onda che risolve l'equazione di Schrödinger è frutto di un faticoso lavoro, non sempre indirizzato nella giusta direzione. Accanto alla personale visione di Schrödinger, illustrata con grande vivezza esplicativa nel discorso da lui pronunciato in occasione del ricevimento del premio Nobel per la Fisica del 1933, in questo Quaderno viene anche discussa la proposta, fatta da de Broglie già nel 1927 e ripresa nel lavoro qui presentato del 1970, di una doppia soluzione, una col significato statistico-probabilistico oggi ormai tradizionale e una col carattere di reale onda che pilota il moto della particella.