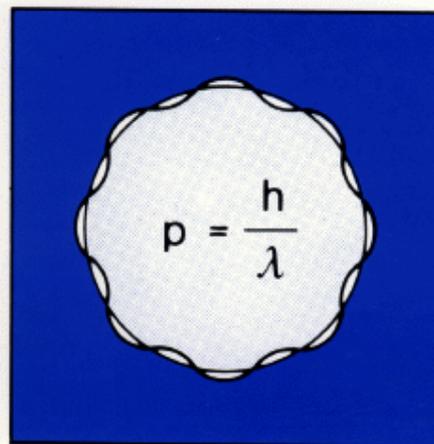


Sigfrido Boffi

# LE ONDE DI DE BROGLIE



QUADERNI DI FISICA TEORICA



Università degli Studi di Pavia  
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica



QUADERNI DI FISICA TEORICA  
Collana curata da Sigfrido Boffi

Comitato Scientifico

Bruno Bertotti  
Sigfrido Boffi  
Italo Guarneri  
Alberto Rimini  
Marco Roncadelli



Sigfrido Boffi

# **LE ONDE DI DE BROGLIE**

Università degli Studi di Pavia  
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

Prima edizione: maggio 1989  
Prima edizione web: marzo 2009

ISBN 88-85159-01-X

## INDICE

Premessa .....	7
§1. Introduzione .....	9
§2. Note biografiche .....	12
§3. Alcune note tecniche .....	16
Proposta di una teoria dei quanti di luce .....	21
La natura ondulatoria dell'elettrone .....	37



## PREMESSA

Questo fascicolo è il primo di una collana di “*Quaderni di Fisica Teorica*” che hanno lo scopo di far conoscere allo studente del Corso di Laurea in Fisica i grandi artefici delle teorie che va studiando nei suoi testi di lezione. Dopo un primo biennio, in cui ha rivisto con maggiori dettagli e approfondimenti lo sviluppo della fisica classica e ha imparato a destreggiarsi con il formalismo matematico del calcolo differenziale, lo studente è costretto ad affrontare un nuovo modo di descrivere la natura che ormai il ricercatore professionale ha fatto suo da oltre mezzo secolo, ma che tuttora risulta estraneo al cosiddetto senso comune. L’impatto è principalmente difficile nel corso di Istituzioni di Fisica Teorica, che è tradizionalmente dedicato all’esposizione dei metodi teorici della meccanica quantistica così come si sono sviluppati nella prima metà del nostro secolo.

Sembra perciò utile proporre un tema, o un autore, attraverso la lettura commentata di uno o più articoli originali. Qualche notizia storica può inoltre servire per ricreare l’atmosfera in cui i personaggi hanno lavorato e per sottolineare il fatto che ogni impresa scientifica, al di là delle istituzioni e delle strutture, è pur sempre frutto di uno sforzo di persone animate dal desiderio invincibile di capire. Lo studente si accorgerà allora che le teorie organicamente presentate nei suoi manuali, necessarie per la pratica scientifica attuale, sono piuttosto il risultato di un lungo travaglio di idee, tentativi, successi, difficoltà, e infine di scelte, che sono sempre presenti nell’avventura dell’uomo. Sarà dunque preparato, al termine dei suoi studi durante i quali si è impadronito in breve tempo dei risultati fondamentali ottenuti nell’arco di secoli, ad affrontare a sua volta, come giovane ricercatore, un cammino pieno di trabocchetti, ma anche ricco di soddisfazioni.

La collana esce sotto l'egida del Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica dell'Università di Pavia dove amici e colleghi con il loro consenso hanno incoraggiato l'idea. In particolare, la realizzazione è stata resa possibile dai consigli di Alberto Rimini e Franco Davide Pacati.

Questo primo quaderno presenta due testi di de Broglie, tradotti in italiano e pubblicati con l'autorizzazione della Fondation Louis de Broglie, rappresentata dal suo Direttore Georges Lochak, cui l'autore è grato anche per alcuni suggerimenti. L'autore inoltre ringrazia Giuseppe Giuliani, Italo Guarneri e Marco Radici per alcuni utili commenti sul testo preliminare del quaderno.

## § 1. Introduzione

Il 14 dicembre 1900 alla Società Tedesca di Fisica riunita in Berlino Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947) presenta i risultati della sua analisi dello spettro di emissione del corpo nero.<sup>1</sup> La formula da lui ottenuta per la distribuzione energetica della radiazione oggi appare fondata sul teorema di equipartizione dell'energia e su un'ipotesi originale: a ogni frequenza della radiazione viene associato un oscillatore armonico che vibra con la stessa frequenza, ma la cui energia può assumere solo valori discreti. I possibili valori sono multipli di una quantità elementare di energia, proporzionale alla frequenza della radiazione attraverso il fattore  $h$ , noto ora come costante di Planck.

La portata di questa ipotesi, sebbene non riconosciuta immediatamente, è tale da offrire agli storici della fisica la giustificazione per datare le origini della meccanica quantistica. Da allora, infatti, a causa delle nuove scoperte della fisica atomica e degli studi sulle interazioni tra radiazione e materia, diventa sempre più evidente la necessità di rinnovare radicalmente lo schema concettuale della fisica classica, che pure aveva ottenuto notevoli risultati nell'arco del secolo XIX.

Il tentativo di unificare su scala atomica la descrizione del movimento dei corpi secondo le leggi della meccanica e quelle dell'elettromagnetismo impone di accettare l'idea che l'energia di un sistema fisico assume solo valori discreti e che i processi di emissione e assorbimento di radiazione comportano scambi energetici per un ammontare pari al salto di energia che il sistema subisce. Le regole di quantizzazione, postulate nel 1913 da Niels Hendrik David Bohr (1885–1962) e generalizzate da Arnold Sommerfeld (1868–1951), si rivelano preziose per l'organizzazione sistematica di una ricca messe di dati spettroscopici, ma risultano anche artificiose e ingiustificate.

A poco a poco però emerge l'idea di moti periodici presenti in un sistema atomico, la cui descrizione richiede modifiche profonde all'approccio della meccanica classica. La nuova formulazione appare quasi improvvisamente

---

<sup>1</sup> M. Planck: *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum* [Teoria della legge di distribuzione energetica dello spettro normale], *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **2** (1900) 237–245. A questa relazione seguì l'articolo: *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum*, *Annalen der Physik* **4** (1901) 553–563.

nella seconda metà del 1925 e nei primi mesi del 1926 ad opera principalmente di Max Born (1882–1970), Werner Heisenberg (1901–1976), Pascual Jordan (1902–1980) da un lato e da Erwin Schrödinger (1887–1961) dall’altro. L’edificio teorico si completa con altri contributi anche di Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) e di Wolfgang Pauli (1900–1958); infine, il Congresso Internazionale dei Fisici, che si tiene a Como il 16 settembre 1927, e il Quinto Congresso Solvay di Fisica, che si tiene a Bruxelles dal 24 al 29 ottobre 1927, sanciscono la cosiddetta interpretazione di Copenhagen della meccanica quantistica, con la quale si dà significato alla nuova meccanica quantistica.<sup>2</sup>

Nell’arco di questi ventisette anni si compie una delle rivoluzioni più sconvolgenti della storia del pensiero scientifico, alla quale la maggior parte dell’umanità è tuttora estranea, anche se ne gode inconsapevolmente i frutti.<sup>3</sup>

Nell’accezione comune la conoscenza scientifica è tuttora vista come conoscenza di verità. Storicamente la scienza si è distinta dalla filosofia a partire dal ’500 fino a imporsi, come garanzia di certezza, grazie all’apparente capacità del metodo scientifico di afferrare l’immutabile all’interno del divenire dei fenomeni naturali. La descrizione matematica del moto dei corpi, introdotta da Galileo Galilei (1564–1642) e, ancor più, da Isaac Newton (1642–1727), assicura una descrizione oggettiva, indipendente dall’osservatore, che induce a credere nella realtà vera di quanto si sta descrivendo. Inoltre la perfezione formale raggiunta dalla meccanica analitica, grazie principalmente ai contributi di Giuseppe Luigi Lagrange (1736–1813), Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) e di William Rowan Hamilton (1805–1865), è paragonabile alla bellezza di certe espressioni artistiche come l’*Arte della fuga* di Johann Sebastian Bach (1685–1750) e la *Pietà* di San Pietro di Michelangelo Buonarroti (1475–1564).

Questa perfezione si ritrova anche in Albert Einstein (1879–1955) che all’inizio di questo secolo, nel riformulare la meccanica per conciliarla con l’elettrodinamica, pur sconvolgendo la visione classica di uno spazio e di un tempo assoluti, si muove ancora nello schema ottocentesco di una teoria in grado di produrre leggi fisiche indipendenti dall’osservatore. Ciò presuppone in un certo senso la fiducia che *ciò che è reale è razionale e ciò che è razionale è reale*<sup>4</sup> e facilmente prelude alla conclusione che *su ciò, di cui non si può parlare, si deve tacere*.<sup>5</sup>

---

<sup>2</sup> La denominazione di *meccanica quantistica* è stata introdotta per la prima volta da M. Born in un articolo ricevuto il 13 giugno 1924 dalla rivista tedesca *Zeitschrift für Physik*. M. Born: *Über Quantenmechanik*, *Zeitschrift für Physik* **26** (1924) 379–395.

<sup>3</sup> Per una presentazione storica della meccanica quantistica si vedano i testi di Max Jammer: *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw Hill, New York, 1966, e di Guido Tagliaferri: *Storia della Fisica Quantistica*, Franco Angeli, Milano, 1985.

<sup>4</sup> secondo l’affermazione di Georg Wilhelm Hegel (1770–1831) in *Rechtsphilosophie* [*Filosofia del diritto*, trad. Messineo, Bari, 1913].

<sup>5</sup> Così si conclude l’opera di Ludwig Wittgenstein (1889–1951): *Tractatus logico-philosophicus*, trad. A.G. Conte, Einaudi, Torino, 1964. Il *Tractatus* fu compiuto a Vienna nell’agosto 1918, édito nel 1921 sotto il titolo *Logisch-philosophische Abhandlung*, riédito,

D'altra parte, se il pensiero si esprime sensibilmente attraverso proposizioni e queste proposizioni possono solo dire *come* una cosa è e non *che cosa* essa sia, la scienza, come totalità delle proposizioni vere, è solo un'immagine della realtà. Perciò, paradossalmente, proprio attraverso questa esasperazione razionale si giunge alla rinuncia della possibilità di cogliere l'essenza del reale per limitarsi a dare una descrizione logica del suo comportamento.<sup>6</sup>

L'interpretazione di Copenhagen della meccanica quantistica, ancor più della rivoluzione copernicana e della teoria della relatività, ridimensiona il rapporto uomo-natura: essa si basa su un ruolo attivo dell'osservatore, che durante la misura entra in interazione col fenomeno e ne determina in certo qual modo anche il comportamento. Più che in ogni altro caso, la meccanica quantistica ha reso evidente la diversa prospettiva che una nuova teoria introduce nella prassi scientifica e quindi può apparire la prova migliore delle intuizioni di T.S.Kuhn su come mutano le idee della scienza.<sup>7</sup> Occorre però anche tenere presente che *non esiste nessun metodo logico per avere nuove idee e che ogni scoperta contiene un elemento irrazionale o un'intuizione creativa.*<sup>8</sup> E infatti *l'invenzione e lo sviluppo della teoria quantistica nel secolo ventesimo è una storia epica e richiede un racconto appropriato. Questa storia non può essere raccontata nella pienezza della sua gloria senza l'analisi dettagliata della moltitudine di problemi che si unirono nella costruzione della teoria quantistica. Molto di più della teoria della relatività, sia speciale che generale, che completò l'edificio della meccanica classica, la teoria quantistica è unica nella storia della scienza e nella storia intellettuale dell'uomo: con i suoi concetti ha prodotto una frattura completa col passato e ha modellato una nuova visione della struttura della materia e di molte delle forze fondamentali della natura.*<sup>9</sup>

Ripercorrere il cammino percorso non aiuta sempre a trovare la strada per nuove scoperte, ma certamente è utile per apprezzare i contributi portati dagli

---

con alcune varianti, nel 1922; esso rappresenta una delle espressioni fondamentali del neopositivismo logico sviluppatosi nel cosiddetto circolo di Vienna e nelle scuole logiche di Berlino e Varsavia, contemporaneamente alle ricerche che hanno portato alla costruzione della meccanica quantistica.

<sup>6</sup> Però nei *Pensieri diversi* (Adelphi, 1980), apparsi postumi, Wittgenstein afferma: *l'inesprimibile (ciò che mi appare pieno di mistero e che non sono in grado di esprimere) costituisce forse lo sfondo sul quale ciò che ho potuto esprimere acquista significato.* È quasi un suggerimento di una realtà superiore che il linguaggio umano non può tradurre. E ciò era ben chiaro anche ad Einstein.

<sup>7</sup> Thomas S. Kuhn: *The Structure of Scientific Revolutions*, The University of Chicago Press, Chicago, 1962 [*La struttura delle rivoluzioni scientifiche*, trad. A.Carugo, Einaudi, Torino, 1969].

<sup>8</sup> Karl R.Popper: *The Logic of Scientific Discovery*, 1964 [*La logica delle scoperte scientifiche*, trad. M.Trincherò, Einaudi, Torino, 1970].

<sup>9</sup> Così si esprime Jagdish Mehra nella sua prefazione a un'opera monumentale e preziosissima sulla storia della meccanica quantistica. Jagdish Mehra e Helmut Rechenberg: *The Historical Development of Quantum Theory*, Springer Verlag, New York, 1982.

scienziati alla costruzione di un edificio teorico che l'esperimento ha corroborato e che pertanto viene riproposto a chi si avvicina alla ricerca scientifica. In particolare, una rilettura dei passi originali permette di apprezzare aspetti che hanno avuto un ruolo importante per lo scienziato e che normalmente in un manuale finiscono in secondo piano.

Un esempio emblematico dell'arte creativa dell'uomo è offerto da Louis-Victor de Broglie (1892–1987), uno degli artefici principali di questo riorientamento di prospettiva nel modo di affrontare il reale fisico. La sua proposta di associare un'onda alle particelle per descriverne il moto su scala atomica ribalta e completa, nel 1923-1924, il punto di vista allora ormai accettato che assegnava un comportamento corpuscolare alla radiazione. Sembra fatale che, dopo lo sforzo umano richiesto per un'intuizione così ardita, la capacità creativa di de Broglie si sia affievolita e, nella pure lunga vita scientifica successiva, l'attività didattica abbia avuto un ruolo prevalente.

In questo quaderno, dopo alcune note biografiche su de Broglie, viene riproposto e commentato un suo articolo scritto verso la fine del 1923, contenente già tutte le idee fondamentali da lui sistematicamente esposte nella sua famosa tesi di dottorato. Viene anche tradotto il discorso da lui tenuto in occasione della cerimonia per il conferimento del premio Nobel, dal quale traspare tutta la soddisfazione di chi ha saputo prevedere comportamenti della natura che solo difficili esperimenti potevano confermare.

Viene invece rimandata a un prossimo quaderno l'interpretazione della meccanica quantistica che de Broglie tentò in termini di una doppia soluzione dell'equazione di Schrödinger, una statistica usuale e una oggettiva che descriverebbe realmente il moto di una particella.

## § 2. Note biografiche

Il principe Louis-Victor de Broglie nacque a Dieppe (Francia, Senna Inferiore) il 15 agosto 1892, ultimo figlio del duca Victor e di Pauline d'Armaillé. La famiglia, di origine piemontese, portava originariamente il nome Broglia, mutato in de Broglie quando nella seconda metà del '600 François Marie Broglia, conte di Revel, entrò nell'esercito francese e ricevette il titolo di duca.

Dopo aver compiuto studi letterari, Louis-Victor fu attirato dalle ricerche di fisica che il fratello Maurice, maggiore di lui di diciassette anni, compiva nel laboratorio ricavato nel palazzo di famiglia a Parigi in Rue Byron. Maurice, apprezzato studioso di raggi  $X$ , aveva assistito nel 1911 al primo Congresso Solvay e ne era stato uno dei segretari scientifici.<sup>10</sup> Louis-Victor, laureatosi

---

<sup>10</sup> Ernest Solvay (1838–1922) è noto per avere inventato il processo di produzione della soda, che brevettò nel 1861 e cominciò a produrre su scala industriale nella sua fabbrica di Schaerbeck (Belgio). Su suggerimento di Walter Hermann Nernst (1864–1941) nel 1911 convocò a Bruxelles una riunione dei fisici più impegnati nelle ricerche di fisica atomica e della radiazione allo scopo di fare il punto su una situazione che si stava delineando sempre

a sua volta in fisica nel 1913 e compiuto il servizio militare durante la prima guerra mondiale nella sezione di radiotelegrafia installata presso la torre Eiffel, si dedicò a studi teorici su problemi connessi con la nuova teoria dei quanti.

Inizialmente Louis-Victor collaborò nell'interpretare i risultati che il fratello Maurice otteneva in esperimenti sull'effetto fotoelettrico e sugli spettri dei raggi  $X$ , pubblicando alcuni lavori con lui <sup>11</sup> e da solo. Le lunghe conversazioni col fratello, confessa Louis nel 1952, <sup>12</sup> *che ebbero peraltro il vantaggio di farmi riflettere profondamente sulla necessità di associare sempre il punto di vista ondulatorio a quello corpuscolare, ci condussero un po' più tardi, nel 1928, a scrivere un lavoro di rassegna generale sulla fisica delle radiazioni.* <sup>13</sup>

Queste ricerche sui raggi  $X$ , unite a una stima profonda per i lavori di Einstein sui quanti di luce e la dinamica relativistica, sono all'origine del crescente interesse di de Broglie per una teoria della radiazione che sintetizzasse gli aspetti ondulatori e corpuscolari. Inoltre un punto lo assillava particolarmente: le regole di quantizzazione per il moto degli elettroni negli atomi, secondo la

---

più controversa. Vi parteciparono:

da Berlino: W.H.Nernst, Max Planck, Heinrich Rubens (1865–1922), Emil Gabriel Warburg (1846–1931);

da Cambridge: James Hopwood Jeans (1877–1946);

da Copenhagen: Martin Hans Knudsen (1871–1949);

da Leyden: Heike Kamerlingh Onnes (1853–1926);

da Manchester: Ernest Rutherford of Nelson (1871–1937);

da Monaco: Arnold Sommerfeld (1868–1951);

da Parigi: Louis-Marcel Brillouin (1854–1948), Marie Sklodowska Curie (1867–1934), Paul Langevin (1872–1946), Jean Baptiste Perrin (1870–1942), Jules-Henri Poincaré (1854–1912);

da Praga: Albert Einstein (1879–1955);

da Vienna: Friedrich Hasenöhr (1874–1915);

da Würzburg: Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien (1864–1928).

Presidente del Congresso fu Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) da Leyden e segretari scientifici Maurice de Broglie (1875–1960) da Parigi, Richard Benedict Goldschmidt (1878–1958) da Bruxelles e Frederick Alexander Lindemann (1886–1957) da Berlino. I rendiconti furono pubblicati nel 1912 in francese (*La théorie du rayonnement et les quanta [La teoria della radiazione e dei quanti]*, a cura di P.Langevin e M. de Broglie) e nel 1914 in tedesco (*Die Theorie der Strahlung und der Quanten*, a cura di Arnold Eucken (1884–1950)).

Da allora i Congressi Solvay si svolsero regolarmente ogni due-tre anni, sempre presieduti da Lorentz fino al famoso Quinto Congresso del 1927. Per un resoconto su di essi, cfr. Jagdish Mehra: *The Solvay Conferences on Physics. Aspects of the development of physics since 1911*, D.Reidel Publ.Co., Dordrecht (Olanda), 1975.

<sup>11</sup> *Sur le modèle d'atome de Bohr et les spectres corpusculaires [Modello atomico di Bohr e spettri corpuscolari]*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **172** (1921) 746; *Sur le spectre corpusculaire des éléments [Spettro corpuscolare degli elementi]*, *ibid.* **173** (1921) 527; *Remarques sur les spectres corpusculaires et l'effet photoélectrique [Osservazioni sugli spettri corpuscolari e l'effetto fotoelettrico]*, *ibid.* **175** (1922) 1139.

<sup>12</sup> In occasione del suo sessantesimo anno fu pubblicato il libro: *Louis de Broglie, Physicien et Penseur*, a cura di André George (Éditions Albin Michel), in cui, accanto agli interventi celebrativi di molti fisici illustri, Louis stesso riassume brevemente e criticamente i suoi contributi scientifici.

<sup>13</sup> *Introduction à la Physique des rayons X e  $\gamma$* , Gauthiers-Villars, Parigi, 1928.

teoria dei quanti di Bohr-Sommerfeld, introduceva la necessità di ricorrere a numeri interi, similmente a quanto succede nell'interpretazione dei fenomeni di interferenza. Perciò de Broglie si dedicò allo studio dell'analogia formale tra la meccanica analitica e la teoria della propagazione ondulatoria.

Il 25 novembre 1924 sostenne, presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Parigi, la tesi di dottorato in fisica <sup>14</sup> davanti alla Commissione composta da J. Perrin (Presidente), E.Cartan, Ch.Mauguin, P.Langevin. <sup>15</sup> Nella tesi veniva esposta in modo completo la proposta di una nuova teoria sui quanti di luce che de Broglie aveva già sottoposto a discussione presso l'Académie des Sciences di Parigi in tre occasioni: nelle sedute del 10 e 24 settembre 1923 la presentazione era stata fatta da J.Perrin e in quella dell'8 ottobre 1923 da H.Deslandres. <sup>16</sup> Di queste relazioni rimane il testo pubblicato nei rendiconti dell'Accademia. <sup>17</sup> Contemporaneamente, per il tramite di R.H.Fowler, <sup>18</sup> de Broglie inviò un riassunto con le idee fondamentali della sua tesi alla rivista inglese *Philosophical Magazine*, che lo ricevette il primo di ottobre 1923 e lo

<sup>14</sup> La tesi, dal titolo *Recherches sur la théorie des quanta* [*Ricerche sulla teoria dei quanti*] fu successivamente pubblicata con lo stesso titolo in: *Annales de Physique* **3** (1925) 22–128.

<sup>15</sup> Jean Baptiste Perrin (1870–1942), professore alla Sorbona e autore di un non fortunato modello atomico, fu insignito del premio Nobel nel 1926 per i suoi studi sulla struttura discontinua della materia e in particolare per avere ottenuto nel 1908–1909 la prima sicura determinazione del numero di Avogadro dall'analisi del moto browniano secondo la teoria proposta da Einstein nel 1905.

Élie Cartan (1869–1951), professore di geometria alla Sorbona, seppe conciliare nell'ambito della geometria differenziale l'approccio alla geometria come studio delle proprietà invarianti rispetto alle trasformazioni di un gruppo e quello costruito sulla nozione di distanza alla Riemann. Gli spazi di Cartan svolgono un ruolo importante nelle teorie relativistiche.

Charles Mauguin, pur apprezzando la "rara eleganza formale e la grande forza di persuasione di de Broglie", confessa nel libro dedicato a lui nel 1952 (*loc. cit.*) che all'epoca della tesi non aveva alcuna fiducia nella realtà fisica delle onde associate ai grani di materia.

Paul Langevin (1872–1946), professore al Collège de France, è noto per l'equazione che porta il suo nome e che governa processi di diffusione stocastica. Divulgatore della teoria della relatività e amico di Einstein, si premurò di fargli avere una copia della tesi di de Broglie, che Einstein apprezzò entusiasticamente.

<sup>16</sup> Henri-Alexandre Deslandres (1853–1948), direttore dell'Osservatorio di Meudon, eseguì la prima misura spettroscopica precisa della velocità di rotazione di Giove e dimostrò il modo di rotazione retrograda di Urano; ma i suoi studi principali riguardano le protuberanze solari e la determinazione della velocità dei gas del sole mediante metodi fotografici.

<sup>17</sup> *Ondes et quanta* [*Onde e quanti*], *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* **177** (1923) 507–510; *Quanta de lumière, diffraction et interférences* [*Quanti di luce, diffrazione e interferenza*], *ibid.* **177** (1923) 548–550; *Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat* [*I quanti, la teoria cinetica dei gas e il principio di Fermat*], *ibid.* **177** (1923) 630–632.

<sup>18</sup> Ralph Howard Fowler (1889–1944), cognato di Rutherford, fu supervisore dell'attività di fisica teorica del giovane Dirac, giunto a Cambridge proprio in quell'anno. Da Fowler Dirac ricevette le bozze dell'articolo *Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen* [*Reinterpretazione di relazioni cinematiche e meccaniche in termini di teoria dei quanti*] (*Zeitschrift für Physik* **33** (1925) 879–893), di cui Werner Heisenberg aveva riferito alla fine di un seminario tenuto a Cambridge il 28 luglio 1925 e che lo convinse a tentarne degli sviluppi.

pubblicò nel numero del febbraio 1924.<sup>19</sup>

Alla base della teoria è l'ipotesi che la luce sia essenzialmente costituita di quanti di luce, tutti con la stessa massa, straordinariamente piccola. Combinando le trasformazioni di Lorentz della teoria della relatività di Einstein con le relazioni quantistiche della teoria dei quanti di Bohr-Sommerfeld, de Broglie riesce a far corrispondere al moto di un corpo la propagazione di un'onda, giungendo a dare un'interpretazione fisica alle condizioni di stabilità di Bohr. Precisamente, a ogni particella di massa  $m$  e velocità  $v$  de Broglie associa un'onda di lunghezza d'onda  $\lambda = h/mv$ , dove  $h$  è la costante di Planck.<sup>20</sup>

Il comportamento ondulatorio delle particelle fu confermato sperimentalmente nel 1927 con le osservazioni di Davisson e Germer<sup>21</sup> e di Thomson e Reid<sup>22</sup> sulla diffrazione degli elettroni da parte di cristalli.

Dopo aver ottenuto i geniali risultati della sua tesi, de Broglie si dedicò a ricerche sull'interpretazione fisica della meccanica ondulatoria, convinto che i quanti di luce abbiano un'esistenza reale come le particelle materiali. Questi studi lo portarono a formulare la cosiddetta teoria della doppia soluzione dell'equazione di Schrödinger, in cui veniva tentato un compromesso tra l'emergente interpretazione statistica della scuola di Copenhagen e il punto di vista classico deterministico.<sup>23</sup> Questa teoria fu duramente attaccata da

<sup>19</sup> *A Tentative Theory of Light Quanta [Proposta di una teoria dei quanti di luce]*, *Philosophical Magazine*, **47** (1924) 446–459. Il testo di questo lavoro è tradotto in questo quaderno.

<sup>20</sup> Durante la discussione della tesi di dottorato, a Perrin che gli chiedeva perplesso come mettere in evidenza l'onda associata alla particella de Broglie rispose proponendo un'esperienza di diffrazione di elettroni, senza peraltro averne chiari i dettagli sperimentali.

<sup>21</sup> C.J.Davisson e L.H.Germer: *Diffraction of electrons by a crystal of nickel [Diffrazione di elettroni da parte di un cristallo di nichel]*, *Physical Review* **30** (1927) 705–740.

La scoperta del comportamento ondulatorio degli elettroni è dovuta a un fortunato incidente verificatosi nel 1925 nel laboratorio di Clinton Joseph Davisson (1881–1958). Nel corso di studi sull'emissione secondaria di elettroni da parte di elettrodi metallici posti in un tubo a vuoto, per l'esplosione di una bottiglia di aria liquida si ruppe un tubo con elettrodo di nichel policristallino che, a contatto con l'aria, si ossidò. Il trattamento termico dell'elettrodo di nichel, resosi necessario per ripristinarne il grado di purezza originario, produsse una ricristallizzazione del metallo in grossi grani cristallini. La successiva esposizione dell'elettrodo al fascio di elettroni, fornì una distribuzione angolare degli elettroni secondari completamente diversa da prima dell'incidente. Le frange di diffrazione così prodotte furono capite e interpretate solo nel 1927 con il diffondersi delle idee teoriche sul possibile comportamento ondulatorio delle particelle.

<sup>22</sup> George Paget Thomson e Andrew Reid: *Diffraction of cathode rays by a thin film [Diffrazione di raggi catodici da parte di una pellicola sottile]*, *Nature* **119** (1927) 820.

È curioso notare che George Paget Thomson (1892–1975) ottenne il premio Nobel nel 1937 insieme con Clinton Joseph Davisson per avere dimostrato la natura ondulatoria dell'elettrone, quando il padre Joseph John Thomson (1856–1940) lo ebbe nel 1906 per averne dimostrato la natura corpuscolare.

<sup>23</sup> La teoria fu inizialmente proposta in: *La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement [La meccanica quantistica e la struttura atomica della materia e della radiazione]*, *Journal de physique* **5** (1927) 225–241. Un'esposizione riassuntiva, che verrà ripresa in un prossimo quaderno, è presentata nell'articolo di L. de Broglie: *L'interprétation de la mécanique ondulatoire par la théorie de la double solution*

Pauli al quinto Congresso Solvay del 1927, dove fu definitivamente sancita l'interpretazione di Copenhagen. Lo stesso de Broglie finì per abbandonare la sua teoria, dedicandosi alla quantizzazione del campo elettromagnetico e alla teoria delle particelle a spin  $\frac{1}{2}$  iniziata da Dirac.

Nel 1929 de Broglie fu insignito del premio Nobel per avere previsto la natura ondulatoria degli elettroni. Il discorso, qui riprodotto, fatto davanti all'Accademia delle Scienze di Svezia il 12 dicembre 1929 illustra l'itinerario delle sue ricerche e alcune implicazioni dei suoi risultati. Esso riassume il suo punto di vista, ancora strettamente legato a una visione deterministica della fisica e rimasto anche negli anni successivi eterodosso rispetto alla ormai affermata interpretazione probabilistica della meccanica ondulatoria di Max Born e della scuola di Copenhagen. Tuttavia ancora oggi appare suggestivo e ricco di spunti.

Membro dell'Académie des Sciences dal 1933 e suo segretario permanente per le scienze matematiche dal 1942, membro della U.S. National Academy of Sciences dal 1948 e della Royal Society di Londra dal 1953, de Broglie insegnò fisica teorica dapprima per due anni alla Sorbona, poi dal 1928 nel nuovo Institut Henri Poincaré di Parigi e quindi dal 1932 al 1962 nella Facoltà di Scienze dell'Università di Parigi.

Nel 1973, in occasione del cinquantenario della sua ipotesi ondulatoria, nel quadro della Fondation de la France è stata costituita la Fondation Louis de Broglie sotto la sua Presidenza onoraria allo scopo di continuare lo sviluppo della meccanica ondulatoria e della sua interpretazione. Il motto della Fondazione, *Pour l'Avénir*, è il motto della sua famiglia e rappresenta il messaggio di speranza che de Broglie ha sempre cercato di comunicare.<sup>24</sup>

Louis-Victor de Broglie è morto a Parigi il 19 marzo 1987.

### § 3. Alcune note tecniche

Per facilitare la lettura dei due lavori che seguono sono opportuni alcuni richiami tecnici.

Secondo la teoria della relatività speciale le leggi della fisica devono essere invarianti in forma per trasformazioni di Lorentz. Vale a dire, se il moto di un punto è descritto nel sistema di riferimento  $Oxyz$  mediante le tre coordinate spaziali  $xyz$  e il tempo  $t$ , nel sistema  $O'x'y'z't'$ , in moto per esempio lungo la direzione dell'asse  $x$  con velocità costante  $v$  rispetto a  $O$ , il punto è descritto dalle coordinate spaziali  $x'y'z'$  e dal tempo  $t'$  secondo la trasformazione di Lorentz:

---

[L'interpretazione della meccanica ondulatoria mediante la teoria della doppia soluzione], in *Foundations of Quantum Mechanics*, ed. B.d'Espagnat, Academic Press, New York, 1971, p. 346-367.

<sup>24</sup> cfr. lettera di L. de Broglie a Georges Lochak del 15 agosto 1976 riportata in *Annales de la Fondation Louis de Broglie* **12** (1987) no. 1.

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}},\end{aligned}$$

dove  $\beta = v/c$  e  $c$  è la velocità della luce. Di conseguenza, l'intervallo di tempo  $\tau'$  tra due eventi che si verificano in un punto solidale col sistema  $O'$  in moto appare più corto dell'intervallo  $\tau$  misurato dall'osservatore  $O$  fermo. Precisamente, si ottiene

$$\tau' = \tau \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Se quindi esiste un moto vibratorio con frequenza  $\nu' = 1/\tau'$  in un corpo in moto, la corrispondente frequenza  $\nu = 1/\tau$  rilevata dall'osservatore fermo risulta minore secondo il fattore  $\sqrt{1 - \beta^2}$ , cioè

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Un'altra conseguenza delle trasformazioni di Lorentz è che la massa  $m$  di un corpo dipende dalla velocità con cui questo corpo si muove rispetto al sistema di riferimento fermo. Indicata con  $m_0$  la cosiddetta massa a riposo per il corpo in quiete, si ha

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Corrispondentemente, il modulo dell'impulso, prodotto della massa e del modulo della velocità, risulta

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Inoltre l'energia di tale corpo vale

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

D'altra parte, uno dei risultati della teoria dei quanti di luce è che la radiazione viene emessa e assorbita per quanti di energia  $W = h\nu$ . Il loro comportamento corpuscolare indica che possiedono un impulso  $p = W/c = h\nu/c$ , cioè  $p = h/\lambda$  in quanto  $\lambda\nu = c$ .

De Broglie identifica  $W$  con  $E$ , imponendo che la velocità  $v$  di tali quanti di luce sia molto prossima a  $c$  e che quindi la loro massa  $m_0$  sia molto piccola. Ottiene così per l'osservatore fermo:

$$\nu = \frac{1}{h} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

mentre, per un osservatore rispetto al quale il quanto di luce appare in quiete, trova:

$$\nu' = \frac{1}{h} m_0 c^2.$$

Secondo questi risultati la relazione tra  $\nu$  e  $\nu'$  contiene il fattore  $\sqrt{1 - \beta^2}$  in modo diverso da quella precedente ricavata dalle trasformazioni di Lorentz.

De Broglie risolve l'enigma ricorrendo alla dimostrazione di un teorema, che chiama il teorema dell'armonia di fase, in base al quale il fenomeno ondulatorio solidale col corpo si mantiene in fase con l'onda che lo accompagna. Grazie a questo teorema la velocità del corpo in movimento viene identificata con la velocità di gruppo, che è associata alla propagazione dell'energia di un gruppo di onde che si propagano con velocità di fase molto prossime tra di loro.

Il moto del corpo è quindi collegato con il moto di propagazione ondulatoria riconoscendo che il principio di Fermat, per la determinazione del cammino ottico di un raggio luminoso nell'ottica geometrica, equivale al principio di minima azione di Maupertuis utilizzato in meccanica analitica per l'individuazione della traiettoria effettivamente descritta da una particella a energia costante. Questa equivalenza vale anche nel caso di una dinamica relativistica. Infatti, il principio di Fermat afferma che il tempo di percorrenza  $\tau = \int ds \, n/c$ , relativo al cammino ottico percorso da un raggio luminoso in un mezzo di indice di rifrazione  $n$  è un estremo (massimo o minimo). Perciò

$$\delta\tau = \delta \int ds \frac{n}{c} = \frac{1}{\nu} \delta \int \frac{ds}{\lambda} = 0.$$

D'altra parte il principio di Maupertuis determina la traiettoria effettivamente descritta dalla particella quando la sua hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, imponendo la condizione di stazionarietà:

$$\delta \int dt \, p\dot{q} = \delta \int p \, ds = 0,$$

dove  $p$  e  $q$  sono le coordinate canoniche della particella. Ma in termini di hamiltoniana  $H$  e lagrangiana  $L$  è  $p\dot{q} = H + L$ , che in meccanica non relativistica equivale al doppio dell'energia cinetica  $T$ . In dinamica relativistica, le equazioni del moto si possono ricavare, in presenza di un potenziale  $V$ , sia

a partire dalla lagrangiana  $L = T' - V$ , sia dalla hamiltoniana  $H = T'' + V$ , dove

$$T' = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - \beta^2}), \quad T'' = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right).$$

Perciò <sup>25</sup>

$$p\dot{q} = T' + T'',$$

e con pochi passaggi de Broglie riesce a mostrare che anche in dinamica relativistica il principio di Maupertuis può scriversi nella forma:

$$\delta \int p ds = 0.$$

Dal confronto con l'espressione del principio di Fermat riesce allora a stabilire la connessione tra impulso di una particella e lunghezza d'onda dell'onda associata:

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

In questo modo, nella descrizione relativistica di una particella, interviene il tetraettore energia-impulso  $J_i \equiv (p_x, p_y, p_z, E/c)$ , che si trasforma per trasformazioni di Lorentz come il tetraettore di componenti  $(x, y, z, t)$ . Al tetraettore  $J_i$  corrisponde nella descrizione ondulatoria il tetraettore  $O_i$  le cui componenti spaziali sono le componenti di un vettore diretto come la direzione di propagazione dell'onda e di modulo  $1/\lambda$  e la componente temporale è pari a  $\nu/c$ .

In definitiva, dalla teoria dei quanti di luce segue che l'onda luminosa, di lunghezza d'onda  $\lambda$ , ha associato il comportamento corpuscolare di una particella di impulso  $p = h/\lambda$ . Viceversa, de Broglie mostra che anche una particella di impulso  $p$  si muove con un'onda associata di lunghezza d'onda  $\lambda = h/p$ . La genialità di Broglie si rivela nell'attribuire all'onda un significato di realtà che accompagna il moto di propagazione di un elettrone.

---

<sup>25</sup> Si tenga presente che sia  $T''$  (energia cinetica relativistica), sia  $T'$  nel limite non relativistico si riducono all'energia cinetica non relativistica  $T$ , per cui  $T' + T''$  si riduce a  $2T$  e si ritrova l'espressione non relativistica del principio di Maupertuis.

## Proposta di una teoria dei quanti di luce <sup>†</sup>

### I. Il quanto di luce <sup>26</sup>

L'evidenza sperimentale accumulata negli anni recenti sembra far concludere decisamente in favore della reale esistenza dei quanti di luce. L'effetto fotoelettrico, che è il meccanismo principale di scambio energetico tra radiazione e materia, con sempre maggiore probabilità sembra essere governato dalla leggi proposte da Einstein. <sup>27</sup> Gli esperimenti sulle azioni fotografiche, cioè i recenti risultati di A.H.Compton sulla variazione di lunghezza d'onda dei raggi *X* diffusi, sarebbero molto difficili da spiegare senza la nozione di quanto di luce. <sup>28</sup> D'altra parte la teoria di Bohr, che trova supporto in così tanti riscontri sperimentali, è basata sul postulato che gli atomi possono

---

<sup>†</sup> di Louis de Broglie, *Philosophical Magazine* **47** (1924) 446–458.

<sup>26</sup> Il termine di *fonone* per indicare il quanto di luce fu introdotto da Gilbert Newton Lewis solo due anni più tardi e con un nome che per Lewis non era completamente appropriato *se si assume che passa solo una minuscola frazione della sua esistenza come portatore di energia raggianti, mentre per il resto del tempo rimane un importante elemento strutturale all'interno dell'atomo. Perciò* – prosegue Lewis – *per questo nuovo atomo ipotetico, che non è luce ma gioca un ruolo essenziale in ogni processo di radiazione ho preso la libertà di proporre il nome di fonone.* G.N.Lewis: *The conservation of photons*, *Nature* **118** (1926) 874–875.

<sup>27</sup> Un'accurata analisi dell'effetto fotoelettrico fu completata nel 1902 da Philipp Eduard Anton von Lenard (1862–1947): *Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolette Licht [Produzione di raggi catodici mediante luce ultravioletta]*, *Wiener Berichte* **108** (1899) 1649–1666; *Über die Lichtelektrische Wirkung [L'azione fotoelettrica]*, *Annalen der Physik* **8** (1902) 149–198. I risultati di Lenard, per i quali meritò il premio Nobel nel 1905, indicavano che l'energia degli elettroni emessi per effetto fotoelettrico dalla sostanza colpita dalla radiazione è indipendente dall'intensità della radiazione incidente, mentre il numero di elettroni emessi aumenta con tale intensità e l'energia del singolo elettrone aumenta col diminuire della lunghezza d'onda della radiazione. Questi risultati, incomprensibili secondo le leggi dell'elettromagnetismo classico, furono interpretati da A.Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt [Un punto di vista euristico riguardante la produzione e la trasformazione di luce]*, *Annalen der Physik* **17** (1905). L'idea di Einstein, premiata essa pure dal Nobel nel 1921, completava l'ipotesi di Planck sulla discretizzazione dell'energia di una radiazione introducendo esplicitamente il quanto di luce: l'energia del singolo elettrone emesso risulta dalla differenza tra il quanto elementare di luce  $h\nu$  che ne ha provocato l'espulsione e l'energia necessaria per estrarre l'elettrone stesso dal materiale.

<sup>28</sup> Arthur Holly Compton (1892–1962): *A quantum theory of scattering of X-rays by light elements [Teoria quantistica della diffusione di raggi X da parte di elementi leggeri]*, *Physical Review* **21** (1923) 483–502. Anche in questo caso la teoria classica della diffusione della radiazione come sviluppata da J.J.Thomson (*Conduction of electricity through gases*, Cambridge University Press, 1906) non era in grado di interpretare la variazione di lunghezza d'onda subita dai raggi X diffusi.

emettere o assorbire energia raggiante di frequenza  $\nu$  solo per un ammontare finito uguale a  $h\nu$ <sup>29</sup> e la teoria di Einstein sulle fluttuazioni energetiche della radiazione di corpo nero ci porta necessariamente alle stesse idee.<sup>30</sup>

In questo lavoro assumerò reale l'esistenza dei quanti di luce e cercherò di vedere come sia possibile conciliarla con la forte evidenza sperimentale su cui è basata la teoria ondulatoria della luce.

È molto naturale ammettere l'ipotesi semplificativa che tutti i quanti di luce siano identici e che solo le loro velocità siano diverse. Assumeremo poi che la "massa a riposo" di ogni quanto di luce abbia il valore  $m_0$ ; siccome hanno velocità molto prossime alla velocità limite  $c$  di Einstein, i quanti di luce devono avere una massa estremamente piccola (ma non infinitamente piccola in senso matematico). La frequenza della corrispondente radiazione deve essere legata all'energia complessiva di un quanto dalla relazione:<sup>31</sup>

La spiegazione di Compton, che trattava il quanto di luce come una particella di energia  $W = h\nu$  e impulso di modulo  $G = h\nu/c$ , gli valse la condivisione del premio Nobel del 1927 insieme con lo scozzese Charles Thomson Rees Wilson (1869–1959). Wilson aveva inventato nel 1912 una speciale camera a nebbia, in grado di visualizzare la traccia lasciata da particelle cariche nell'attraversare un gas soprassaturo, grazie ai nuclei di condensazione provocati dalla ionizzazione degli atomi del gas: *On an expansion apparatus for making visible the tracks of ionising particles in gases and some results obtained by its use [Un apparato di espansione che rende visibili le tracce di particelle ionizzanti nei gas e alcuni risultati ottenuti col suo uso]*, Proceedings of the Royal Society of London **A87** (1912) 277–292. Questo dispositivo rese possibile dimostrare la validità dell'interpretazione dell'effetto Compton, di cui qui de Broglie sembra già sicuro; A.H.Compton e A.W.Simon: *Directed quanta of scattered X-rays [Quanti direzionati di raggi X diffusi]*, Physical Review **26** (1925) 289–299.

<sup>29</sup> Niels Bohr era stato insignito del premio Nobel l'anno prima (1922) per le sue ricerche sulla struttura degli atomi e della radiazione da loro emessa, come si legge nella motivazione. Di fatto i suoi lavori del 1913 (*On the constitution of atoms and molecules [Sulla struttura degli atomi e delle molecole]*, Philosophical Magazine **26** (1913) 1–25, 476–502, 857–875) costituiscono la base della teoria dei quanti, che nell'arco di dieci anni riesce a dare ragione delle caratteristiche degli spettri atomici sulla base di postulati che vengono definitivamente sistemati nel lavoro di N.Bohr: *Über die Anwendung der Quantentheorie auf den Atombau. I. Die Grundpostulate der Quantentheorie [Applicazione della teoria dei quanti alla struttura atomica. I. I postulati fondamentali della teoria dei quanti]*, Zeitschrift für Physik **13** (1923) 117–165. È significativo che a questo lavoro, che doveva essere il primo di una serie con lo scopo dichiarato di un'esposizione sistematica dei risultati della teoria dei quanti, non seguì mai più la seconda parte, superata dagli eventi.

<sup>30</sup> A.Einstein: *Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung [Sviluppo dei nostri punti di vista sulla natura e la costituzione della radiazione]*, Physikalische Zeitschrift **10** (1909) 817–826. In questo lavoro Einstein mostrava che le fluttuazioni di energia associata alle frequenze della radiazione di corpo nero descritte secondo la formula di Planck sono il risultato della somma di due contributi, di cui uno può essere messo in relazione col comportamento corpuscolare e l'altro con quello ondulatorio. Il primo prevale alle basse temperature, dove la formula di Planck si riconduce a quella euristica di Wien; il secondo domina alle alte temperature, per le quali la formula di Planck ricade in quella di Rayleigh-Jeans che è fondata sulla natura ondulatoria della radiazione.

<sup>31</sup> La ben nota relazione dell'energia secondo la teoria della relatività,  $W = m_0c^2/\sqrt{1 - \beta^2}$ , valida per una particella di massa a riposo  $m_0$  in moto con velocità  $v$ , qui viene applicata al

$$h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right);$$

ma, siccome  $1 - \beta^2$  è molto piccolo, possiamo scrivere

$$\beta = \frac{v}{c} = 1 - \frac{1}{2} \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \nu^2}.$$

I quanti di luce avrebbero velocità poco diverse tra di loro, ma tali da non poter essere discriminate da  $c$  con alcun mezzo sperimentale. Sembra dunque che  $m_0$  debba essere al massimo dell'ordine di  $10^{-50}$  g.<sup>32</sup>

Naturalmente il quanto di luce deve possedere una simmetria interna binaria corrispondente alla simmetria di un'onda elettromagnetica e definita da un certo asse di polarizzazione. Ci riferiremo di nuovo a questa osservazione più avanti.

## II. La radiazione di corpo nero come gas di quanti di luce

Consideriamo un gas costituito dai quanti di luce descritti prima. A una data temperatura (non troppo vicina allo zero assoluto) quasi tutti questi atomi

---

quanto di luce, la cui energia risulta  $h\nu$  per quanto discusso più sopra.

<sup>32</sup> A questo proposito è interessante osservare che la predizione espressa da de Broglie è molto attuale. Limiti alla massa del fotone possono essere stabiliti con esperimenti di verifica della legge di Coulomb e con misure geomagnetiche.

Una verifica della legge di Coulomb e del teorema di Gauss, già proposta da Henry Cavendish (1731–1810) nel 1777, si basa sul fatto che una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza ( $1/r^2$ ) non può dare origine a campo elettrico all'interno di un conduttore. Ogni deviazione dalla legge di Coulomb, che implichi una dipendenza della forza dalla distanza del tipo  $1/r^{2+q}$ , è riconducibile a un termine di sorgente nella prima equazione di Maxwell, legato alla massa a riposo  $m_0$  del fotone:  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho - m_0^2\phi$ , dove  $\phi$  è il potenziale applicato. Un recente esperimento (E.R. Williams, J.E. Faller e H.A. Hill, *New experimental test of Coulomb's law: a laboratory upper limit on the photon mass* [Nuova verifica sperimentale della legge di Coulomb: un limite superiore di laboratorio per la massa a riposo del fotone], *Physical Review Letters* **26** (1971) 721–724) ha fornito il valore  $q = (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$ , che corrisponde a un limite per la massa a riposo del fotone pari a  $m_0 < 1.6 \times 10^{-47}$  g.

In presenza di un fotone massivo le equazioni di Maxwell per i potenziali elettromagnetici  $A_\mu$  si trasformano nelle equazioni di Proca:  $(\square + m_0^2)A_\mu = (4\pi/c)J_\mu$ . Un'analisi del campo magnetico terrestre, originariamente proposta da Erwin Schrödinger (*Proceedings of the Royal Irish Academy* **A49** (1943) 135), permetterebbe di evidenziare contributi legati alla presenza del termine  $m_0^2$ . Il limite raggiunto sperimentalmente combinando misure del campo magnetico sulla superficie terrestre e da satellite (Alfred S. Goldhaber e Michael Martin Nieto: *New geomagnetic limit on the mass of the photon* [Nuovo limite geomagnetico della massa del fotone], *Physical Review Letters* **21** (1968) 567–569) è  $m_0 < 4 \times 10^{-48}$  g, corrispondente al fatto che non si notano deviazioni dalla legge di Ampère fino a distanze dell'ordine di  $5 \times 10^{10}$  cm. Un'estensione di questo metodo al campo magnetico di Giove, rilevato dalla sonda Pioneer-10, ha prodotto il limite  $m_0 < 8 \times 10^{-49}$  g (Leverett Davis, Jr., Alfred S. Goldhaber e Michael Martin Nieto: *Limit on the photon mass deduced from Pioneer-10 observations of Jupiter's magnetic field* [Limite alla massa del fotone dedotto dalle osservazioni del campo magnetico di Giove fatte dalla sonda Pioneer-10], *Physical Review Letters* **35** (1975) 1402–1405).

di luce avranno velocità  $v = \beta c$  molto prossima a  $c$ . L'energia totale di uno di questi atomi è

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

e il suo impulso è

$$G = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

perciò approssimativamente abbiamo

$$G = \frac{W}{c}.$$

Si vede facilmente che la pressione di questo gas sulle pareti del recipiente è

$$p = \frac{n}{6} 2Gc = \frac{1}{3} nW,$$

se  $n$  è il numero di quanti di luce nell'elemento di volume. <sup>33</sup> Questa è la stessa espressione ottenuta dalla teoria elettromagnetica, mentre senza l'uso di formule della teoria della relatività avremmo dovuto trovare un risultato maggiore di un fattore due. <sup>34</sup>

Ora sorge la domanda: possiamo usare per il gas di quanti il teorema di equipartizione dell'energia di Maxwell? <sup>35</sup> Nella dinamica di Einstein, il teorema di Liouville, su cui si basa tutta la meccanica statistica, è ancora valido; come cella elementare dello spazio delle fasi possiamo allora usare un valore

<sup>33</sup> Analogamente al caso di un normale gas di atomi, la pressione è data dalla forza media che si esercita su una parete in virtù degli urti subiti dagli atomi sulla parete stessa e della loro conseguente variazione di impulso  $2G$ ; nell'unità di tempo lo stesso atomo urta la stessa parete  $c/2l$  volte, se  $l$  è la distanza tra le due pareti opposte del recipiente, supposto cubico per semplicità. Perciò la forza esercitata da un atomo sulla parete è  $2Gc/2l$ ; sommando su tutti gli atomi, in numero di  $nl^3$ , dividendo per la superficie  $l^2$  della parete e mediando sulle tre direzioni spaziali si ottiene il risultato proposto da de Broglie.

<sup>34</sup> Nel calcolo classico la velocità degli atomi è  $v$  e non  $c$ ; inoltre è  $G = m_0 v$ ; perciò la relazione diventa  $p = nm_0 v^2/3 = 2nW/3$ , dove  $W$  è l'energia cinetica  $\frac{1}{2}m_0 v^2$ . Invece la pressione della radiazione è pari a un terzo della densità di energia del campo elettromagnetico: con l'ipotesi dei quanti di luce questa densità è proprio  $nW$ .

<sup>35</sup> Il teorema di equipartizione dell'energia attribuisce l'energia  $\frac{1}{2}kT$  ad ogni grado di libertà di un sistema in equilibrio termico alla temperatura  $T$  (con  $k$  costante di Boltzmann). La prima dimostrazione del teorema si trova in James Clerk Maxwell (1831–1879): *Illustrations of the dynamical theory of gases [Illustrazione della teoria dinamica dei gas]*, Philosophical Magazine **20** (1860) 21–37. La sua generalizzazione a particelle dotate di gradi di libertà interni è dovuta a Ludwig Eduard Boltzmann (1844–1906): *Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten [Studi sull'equipartizione della forza viva tra punti materiali in movimento]*, Wiener Berichte **58** (1868) 517–560. L'applicazione del teorema alla radiazione non è una novità: è nuova l'idea di considerare la radiazione come un gas di quanti.

proporzionale a  $dx dy dz dp dq dr$ , se  $x, y, z$  sono le coordinate cartesiane ortogonali e  $p, q, r$ , le corrispondenti componenti dell'impulso. Come conseguenza della legge di distribuzione canonica, il numero di atomi, i cui punti rappresentativi si trovano nell'elemento  $dx dy dz dp dq dr$ , deve essere proporzionale a

$$e^{-W/kT} dx dy dz dp dq dr = e^{-W/kT} 4\pi G^2 dG dv,$$

se  $dv$  è l'elemento di volume e  $G$  l'impulso. Ma, siccome  $G = W/c$ , questo numero è anche dato da

$$C \times e^{-W/kT} W^2 dW dv.$$

Ogni quanto ha energia totale  $h\nu$ ; allora tutta l'energia contenuta nel volume  $dv$  e portata dai quanti di luce di energia  $h\nu$  è <sup>36</sup>

$$C \times e^{-h\nu/kT} \nu^3 dv dv.$$

Questa è ovviamente la forma limite della legge della radiazione di Wien. <sup>37</sup> Usando l'ipotesi formulata da Planck che l'estensione del volume elementare dello spazio delle fasi sia  $(1/h^3) dx dy dz dp dq dr$ , due anni orsono <sup>†</sup> <sup>38</sup> ho mostrato che è possibile trovare per la densità di energia raggianti il valore

$$u_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-h\nu/kT} d\nu.$$

Questo risultato era incoraggiante, ma non ancora completo. L'ipotesi di elementi di estensione finita nello spazio delle fasi sembrava alquanto arbitraria e di carattere misterioso. Inoltre, la legge di Wien è solo una forma limite della vera legge della radiazione e io ero obbligato a fare l'ipotesi di aggregati di quanti per spiegare gli altri termini della serie.

<sup>36</sup> inglobando nella costante  $C$  anche il fattore  $h^4$ .

<sup>37</sup> L'analogia formale tra la distribuzione energetica dello spettro di radiazione del corpo nero e la legge di distribuzione delle velocità delle particelle di un gas ottenuta da Maxwell sulla base del teorema di equipartizione dell'energia era già stata riscontrata da W. Wien: *Über die Energieverteilung im Emissionsspektrum eines schwarzen Körpers* [Distribuzione energetica dello spettro di emissione di un corpo nero], *Annalen der Physik und Chemie* **58** (1896) 662–669. Einstein lo riconosce nel riprendere l'argomento e stabilire la relazione tra coefficiente di emissione e coefficiente di assorbimento della radiazione: *Zur Quantentheorie der Strahlung* [Teoria quantistica della radiazione], *Physikalische Zeitschrift* **18** (1917) 121–128.

<sup>†</sup> v. *Journal de Physique*, novembre 1922.

<sup>38</sup> La citazione completa è: *Rayonnement noir et quanta de lumière* [Radiazione di corpo nero e quanti di luce], *Journal de physique et le radium* **3** (1922) 422–428.

Ora sembra che queste difficoltà siano state rimosse, ma prima di tutto spiegheremo molte altre idee, tornando più tardi al “gas della radiazione di corpo nero”.<sup>39</sup>

### III. Un importante teorema sul moto dei corpi

Consideriamo un corpo con “massa a riposo”  $m_0$  in moto rispetto a un dato osservatore con velocità  $v = \beta c$  ( $\beta < 1$ ). Per il principio d’inerzia dell’energia, esso deve avere energia interna pari a  $m_0 c^2$ . Inoltre la relazione quantistica suggerisce di ascrivere questa energia interna a un fenomeno periodico di frequenza  $\nu_0 = (1/h)m_0 c^2$ . Per l’osservatore fermo l’energia complessiva è  $m_0 c^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$  e la corrispondente frequenza è  $\nu = (1/h)m_0 c^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$ .

Ma se l’osservatore fermo osserva il fenomeno periodico interno, ne vedrà una frequenza più bassa e pari a  $\nu_1 = \nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ , cioè questo fenomeno gli sembrerà variare nel tempo secondo la legge  $\sin 2\pi\nu_1 t$ . La frequenza  $\nu_1$  è molto diversa dalla frequenza  $\nu$ ; ma le due frequenze sono collegate da un importante teorema che ci dà l’interpretazione fisica di  $\nu$ .<sup>40</sup>

Supponiamo che all’istante 0 la posizione del corpo in movimento coincida nello spazio con un’onda la cui frequenza abbia il valore  $\nu$  dato sopra e che si propaghi con velocità  $c/\beta = c^2/v$ . Però quest’onda, secondo le idee di Einstein, non può trasportare energia.<sup>41</sup> Il nostro teorema è il seguente: *Se inizialmente il fenomeno interno del corpo in moto è in fase con l’onda, questa armonia di fase persisterà sempre.*<sup>42</sup> In realtà all’istante  $t$  il corpo in moto è alla distanza  $x = vt$  dall’origine e il suo fenomeno interno è proporzionale a  $\sin 2\pi\nu_1 x/v$ ; nello stesso posto l’onda è descritta da

$$\sin 2\pi\nu \left( t - \frac{\beta x}{c} \right) = \sin 2\pi\nu x \left( \frac{1}{v} - \frac{\beta}{c} \right).$$

Le due funzioni seno avranno lo stesso valore e quindi l’armonia di fase si verificherà se si realizza la condizione

<sup>39</sup> Al paragrafo VIII viene ritrovata la legge di distribuzione di Maxwell anche per il gas di quanti di luce.

<sup>40</sup> Nella sua tesi de Broglie, riprendendo questo punto dice: *... le due frequenze  $\nu_1$  e  $\nu$  sono fondamentalmente diverse, perché contengono il fattore  $\sqrt{1 - \beta^2}$  in forme differenti. Qui  $c$ ’è una difficoltà che mi ha tenuto occupato a lungo; sono riuscito a eliminarla dimostrando il seguente teorema, che chiamerò il teorema dell’armonia di fase...*

<sup>41</sup> La velocità di propagazione di un’onda di frequenza  $\nu$  e lunghezza d’onda  $\lambda$  è  $V = \nu\lambda$  e viene chiamata *velocità di fase*. Nel caso in esame l’onda è del tipo  $\sin 2\pi\nu(t - \beta x/c)$  con  $\lambda = c/\nu\beta$ , per cui  $V = c/\beta = c^2/v > c$ . Ma secondo la teoria della relatività  $c$  è la velocità limite per la propagazione con trasporto di energia.

<sup>42</sup> L’enunciato nella tesi è più dettagliato: *... Il fenomeno periodico, solidale con la particella in moto e con frequenza  $\nu_1 = (1/h)m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2}$ , rispetto a un osservatore in quiete gli appare sempre in fase con un’onda di frequenza  $\nu = (1/h)m_0 c^2 / \sqrt{1 - \beta^2}$ , che si propaga nella direzione lungo la quale la particella si muove con velocità  $V = c/\beta$ ...*

$$\nu_1 = \nu(1 - \beta^2),$$

una condizione chiaramente soddisfatta in base alle definizioni di  $\nu$  e  $\nu_1$ .

Questo risultato importante è contenuto implicitamente nella trasformazione di Lorentz. Se  $\tau$  è il tempo locale di un osservatore in moto con il corpo, questo osservatore definirà il fenomeno interno con la funzione  $\sin 2\pi\nu_0\tau$ . Secondo la trasformazione di Lorentz, l'osservatore fermo deve descrivere lo stesso fenomeno con la funzione

$$\sin 2\pi\nu_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( t - \frac{\beta x}{c} \right),$$

che può essere interpretata come rappresentazione di un'onda di frequenza  $\nu_0/\sqrt{1 - \beta^2}$  che si propaga lungo l'asse  $x$  con velocità  $c/\beta$ .

Siamo dunque indotti ad ammettere che ogni corpo in movimento può essere accompagnato da un'onda e che è impossibile disgiungere moto di un corpo e propagazione di un'onda.

Questa idea può essere espressa anche in un altro modo. Un gruppo di onde con frequenze molto vicine tra di loro ha una "velocità di gruppo"  $U$  che è stata studiata da Lord Rayleigh<sup>43</sup> e che nell'usuale teoria ondulatoria è la velocità di "propagazione dell'energia". Questa velocità di gruppo è collegata alla "velocità di fase"  $V$  dalla relazione

$$\frac{1}{U} = \frac{d(\nu/V)}{d\nu}.$$

Se  $\nu$  è uguale a  $(1/h)m_0c^2/\sqrt{1 - \beta^2}$  e  $V$  è uguale a  $c/\beta$ , troviamo  $U = \beta c$ , cioè: *la velocità del corpo in movimento è pari alla velocità di propagazione dell'energia di un gruppo di onde che hanno frequenza*

$$\nu = (1/h)m_0c^2/\sqrt{1 - \beta^2}$$

*e velocità [di fase]  $c/\beta$  con valori di  $\beta$  molto poco diversi tra di loro.*<sup>44</sup>

---

<sup>43</sup> John William Strutt (1842–1919), divenuto Lord Rayleigh nel 1873 e insignito del premio Nobel nel 1904 per le sue ricerche sulla densità dei gas e per la scoperta dell'argo, è autore di un trattato (*The Theory of Sound*, Macmillan, Londra, 1877; II ed. rist. Dover Publ., New York, 1945) tuttora importante nella fisica delle vibrazioni.

<sup>44</sup> Forse oggi preferiamo definire la velocità di gruppo mediante la relazione equivalente:

$$U = \frac{\partial \omega}{\partial k},$$

dove  $k = 2\pi/\lambda$  è il numero d'onda e  $\omega = 2\pi\nu$  è legato a  $k$  dalla relazione di dispersione  $\omega = ck/n$  che definisce l'indice di rifrazione  $n$ . Nella descrizione ondulatoria della luce, nel vuoto è  $n = 1$  e  $V = U$ , perché tutte le onde si propagano con la stessa velocità di fase  $V = c$ ; invece in un mezzo l'indice di rifrazione dipende da  $\omega$  e risulta  $n > 1$ , per cui

#### IV. Dinamica e Ottica Geometrica

Cercare di estendere le idee precedenti al caso di velocità variabili è un problema abbastanza difficile ma molto suggestivo. Se un corpo in movimento in un mezzo descrive un cammino curvilineo diciamo che c'è un campo di forze; in ogni punto si può calcolare l'energia potenziale  $e$ , quando viene a trovarsi in quel punto, il corpo ha una velocità determinata dal valore costante della sua energia totale. Ora, sembra naturale supporre che l'onda di fase debba avere in ogni punto una velocità e una frequenza determinate dal valore *che  $\beta$  avrebbe se il corpo si trovasse in quel punto*. Durante la sua propagazione l'onda di fase ha una frequenza  $\nu$  e una velocità  $V$  continuamente variabili.

Forse un nuovo elettromagnetismo ci fornirà le leggi di questa complicata propagazione, ma ci sembra di conoscere in anticipo il risultato finale: “i raggi dell'onda di fase sono identici ai cammini dinamicamente possibili”. Di fatto, i cammini dei raggi possono essere calcolati come in un mezzo a dispersione variabile mediante il principio di Fermat,<sup>45</sup> che può essere scritto qui nella forma seguente (con  $\lambda$  lunghezza d'onda e  $ds$  elemento di cammino percorso):

$$\delta \int \frac{ds}{\lambda} = \delta \int \frac{\nu ds}{V} = \delta \int \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} ds = 0.$$

Il principio di minima azione nella sua forma di Maupertuis<sup>46</sup> fornisce i

$V \neq U$  e  $V < c$ , contrariamente a quanto avviene alle onde che de Broglie considera, per le quali  $n = \beta < 1$  e  $V > c$ . Questa differenza è imputabile alla “piccola massa” ipotizzata dei quanti di luce.

<sup>45</sup> A Pierre de Fermat (1601–1665), uno dei matematici più geniali del suo tempo, si deve il principio variazionale per la determinazione del cammino ottico percorso da un raggio luminoso: il principio impone la stazionarietà del tempo di percorrenza  $\tau = \int ds n/c$ , relativo a un cammino in un mezzo con indice di rifrazione  $n$ . Perciò

$$\delta \tau = \delta \int ds \frac{n}{c} = \frac{1}{\nu} \delta \int \frac{ds}{\lambda} = 0.$$

<sup>46</sup> Questo metodo fu proposto da Pierre-Louis de Maupertuis (1698–1759) nel 1744 e successivamente ripreso da Leonhard Euler (1707–1783) e da Giuseppe Luigi Lagrange (1736–1813). Il principio di minima azione classico, dovuto a William Rowan Hamilton (1805–1865), è applicato all'integrale d'azione per variazioni sincrone che rispettano le configurazioni estreme. Invece il principio di Maupertuis riguarda variazioni asincrone a fissata energia. Mentre il principio di Hamilton determina le equazioni di moto, quello di Maupertuis individua la traiettoria effettivamente descritta quando la hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo. Per una particella con impulso  $p$ , esso può porsi nella forma seguente:

$$\delta \int p ds = 0.$$

Per un'esposizione critica dei metodi variazionali, si veda: Kornel (Cornelius) Lanczos (1893–1974), *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press, Toronto,

cammini dinamici mediante l'equazione

$$\begin{aligned} \delta \int m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sqrt{1-\beta^2} \right) dt \\ = \delta \int \frac{m_0 \beta^2 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} dt = \delta \int \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} ds = 0, \end{aligned}$$

un risultato che giustifica l'affermazione precedente.<sup>47</sup>

È ora così semplice mostrare che il teorema dell'armonia di fase è sempre valido che non sembra necessario svilupparne la dimostrazione.

Questa teoria suggerisce un'interessante spiegazione delle condizioni di stabilità di Bohr. All'istante 0 l'elettrone è in un punto  $A$  della sua traiettoria. L'onda di fase che parte in questo istante da  $A$  descriverà tutto il cammino e incontrerà di nuovo l'elettrone in  $A'$ . Sembra del tutto necessario che l'onda di fase trovi l'elettrone in fase con se stessa. Ciò equivale a dire che "il moto può essere stabile solo se l'onda di fase è sintonizzata alla lunghezza del cammino". La condizione di sintonia è dunque:

$$\int \frac{ds}{\lambda} = \int_0^T \frac{m_0 \beta^2 c^2}{h \sqrt{1-\beta^2}} dt = n$$

( $n$  numero intero;  $T$  periodo di rivoluzione).

Ora possiamo scrivere la condizione di stabilità della teoria dei quanti in una forma generale data da Einstein, che confluisce nelle condizioni di Sommerfeld per i casi quasi-periodici come conseguenza del numero infinito di pseudo-periodi.<sup>48</sup> Chiamando  $p_x, p_y, p_z$  le componenti dell'impulso, la condizione generale di Einstein è

1949.

<sup>47</sup> È interessante osservare che nel semestre invernale 1923/24 a Göttingen Max Born tiene un corso di lezioni sulla meccanica atomica, in cui tratta in modo sistematico lo sviluppo della teoria dei quanti a partire dalle equazioni di Hamilton-Jacobi. Pur accennando all'espressione relativistica del principio di Maupertuis, Born è però preoccupato dei moti periodici negli atomi e delle condizioni di stabilità. Nella prefazione al testo che raccoglie le lezioni (*Vorlesungen über Atommechanik*, Springer, Berlino, 1924), scritta nel novembre 1924, Born promette un secondo volume, che forse rimarrà ancora non scritto per alcuni anni, con la trattazione finale delle proprietà atomiche ricondotte alle leggi della meccanica classica.

<sup>48</sup> Quello che ora de Broglie sta per chiamare relazione generale di Einstein fu rivisitata da Einstein col lavoro: *Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein [La condizione di quantizzazione di Sommerfeld e Epstein]*, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **19** (1917) 82-92; ma è oggi nota come regola di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld, in quanto rientra nella generalizzazione delle condizioni di Bohr operata da Arnold Sommerfeld (1868-1951): *Zur Quantentheorie der Spektrallinien [Teoria quantistica delle righe spettrali]*, *Annalen der Physik* **51** (1916) 1-94, 125-167.

$$\int (p_x dx + p_y dy + p_z dz) = nh \quad (n \text{ numero intero}),$$

o anche

$$\int_0^T \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dt = \int_0^T \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \beta^2 c^2 dt = nh,$$

che è proprio il risultato trovato sopra.

#### V. La propagazione dei quanti di luce e il problema della coerenza

Ora faremo uso dei nostri risultati per studiare la propagazione dei quanti di luce liberi, le cui velocità sono sempre leggermente inferiori a  $c$ . Possiamo dire: “l’atomo di luce, la cui energia complessiva è uguale a  $h\nu$ , è sede di un fenomeno periodico interno che, per un osservatore fermo, ha in ogni punto dello spazio la stessa fase di un’onda che si propaga nella stessa direzione con velocità molto prossima a  $c$  (di pochissimo più grande)”. Il quanto di luce è in un certo modo una parte dell’onda, ma per spiegare le interferenze e gli altri fenomeni dell’ottica ondulatoria è necessario vedere come più quanti di luce possano essere parte della *stessa* onda. Questo è il problema della coerenza.

Nella teoria dei quanti di luce sembra necessario formulare l’ipotesi seguente: “quando un’onda di fase incontra un atomo eccitato, questo atomo ha una certa probabilità di emettere un quanto di luce, determinata in ogni istante dall’intensità dell’onda”. Forse questa ipotesi può apparire arbitraria, ma io penso che ogni teoria della coerenza deve adottare qualche postulato di questo genere.

È noto che i processi di emissione dei raggi  $\gamma$  da parte delle sostanze radioattive sono atti del tutto indipendenti uno dall’altro, ma ciò non può essere considerato come un’obiezione al nostro punto di vista, perché la “vita media” di ogni atomo radioattivo noto è sempre molto maggiore del periodo dei raggi  $\gamma$ .

Perciò quando un atomo emette un quanto di luce, viene contemporaneamente emessa un’onda di fase sferica che, passando attraverso gli atomi vicini alla sorgente puntiforme, ecciterà altre emissioni. L’onda di fase immateriale porterà con sé moltissime goccioline di energia i cui fenomeni interni risultano così coerenti.

#### VI. Diffrazione da parte del bordo di uno schermo e il principio d’inerzia

La teoria corpuscolare della luce incontra qui una grossa difficoltà. È noto dai tempi di Newton che i raggi luminosi che passano a piccola distanza dal bordo di uno schermo non si propagano più in linea retta, ma alcuni di

loro penetrano nella regione dell'ombra geometrica. Newton imputò questa deviazione all'azione di qualche forza che lo schermo esercita sul corpuscolo di luce. A me sembra che questo fenomeno sia piuttosto degno di una spiegazione più generale. Siccome sembra esistere un'intima connessione tra il moto dei corpi e la propagazione delle onde, e siccome i raggi dell'onda di fase possono ora essere considerati come le traiettorie (le possibili traiettorie) dei quanti di energia, siamo inclini ad abbandonare il principio d'inerzia e a dire: "un corpo in movimento deve sempre seguire lo stesso raggio della sua onda di fase". Nella propagazione continua dell'onda, la forma delle superfici di uguale fase continuerà a cambiare e il corpo seguirà sempre la direzione della perpendicolare comune a due superfici infinitamente vicine.

Quando il principio di Fermat non è più valido per calcolare il cammino di un raggio luminoso, il principio di minima azione non è più valido per calcolare la traiettoria descritta dal corpo. Io penso che questa idea possa essere considerata come una sintesi dell'ottica e della dinamica.

Dobbiamo ancora specificare alcuni punti. Il raggio luminoso, che ora nella nostra idea acquista un importante significato fisico, può essere definito, come detto sopra, dal *continuo* propagarsi di una piccola parte dell'onda di fase: non può essere definito in ogni punto dalla somma geometrica su tutte le onde del vettore, che nella teoria elettromagnetica viene chiamato "radiante o vettore di Poynting".<sup>49</sup> Consideriamo una sorta di esperimento di Wiener. Un treno di onde è inviato in direzione normale su uno specchio piano infinitamente riflettente; si instaurano delle onde stazionarie; lo specchio riflettente è un piano nodale per il vettore elettrico, il piano a distanza di  $\frac{1}{4}\lambda$  dallo specchio è un piano nodale per il vettore magnetico, il piano a distanza  $\frac{1}{2}\lambda$  dallo specchio è di nuovo un piano nodale per il vettore elettrico, e così via. In ogni piano nodale il vettore radiante è nullo. Possiamo dire che questi piani non sono attraversati da flusso di energia? Evidentemente no, possiamo solo dire che gli stati di interferenza in questi piani sono sempre gli stessi. In ogni caso di interferenza dovremmo ritrovare le stesse complicazioni. Nella teoria ondulatoria, la propagazione di energia ha un carattere in certo qual modo fittizio, ma in cambio il calcolo esatto delle frange di interferenza è fatto facilmente; nel prossimo paragrafo tenteremo di vedere perché ciò avviene.

## VII. Una nuova spiegazione delle frange di interferenza

Si consideri come si rivela la presenza di luce in un punto dello spazio – per diretta percezione della luce diffusa, mediante rilevamento fotografico,

---

<sup>49</sup> Qui de Broglie ha in mente il principio di Huyghens per la costruzione del fronte d'onda come inviluppo di singole onde, a ciascuna delle quali è associato un vettore di Poynting che ne caratterizza l'intensità e il cui flusso attraverso una superficie rappresenta l'energia associata all'onda che attraversa quella superficie nell'unità di tempo. John Henry Poynting (1852–1914): *On the transfer of energy in the electromagnetic field [Trasporto di energia nel campo elettromagnetico]*, Philosophical Transactions of the Royal Society (1884) 343–361.

per effetto termico, e forse mediante altre tecniche. Apparentemente tutti questi modi si possono, di fatto, ricondurre all'azione fotoelettrica e alla diffusione. Ora, quando incontra un atomo, un quanto di luce ha una certa probabilità di venire assorbito o diffuso, in dipendenza di agenti esterni. Se dunque riesce a determinare queste probabilità senza tener conto del moto effettivo di propagazione dell'energia, una teoria dovrebbe essere in grado di prevedere correttamente la reazione media tra radiazione e materia in ogni punto. Seguendo la teoria elettromagnetica (e il principio di corrispondenza di Bohr è coerente con questo punto di vista), sono stato indotto a ipotizzare che, per un atomo materiale, la probabilità di assorbimento o di diffusione di un quanto di luce è determinata dalla somma geometrica di uno dei vettori che definiscono le onde di fase che lo incontrano. Quest'ultima ipotesi è, in realtà, molto simile a quella ammessa dalla teoria elettromagnetica quando si collega l'intensità della luce diffusa con l'intensità del vettore radiante che ne risulta. Perciò nell'esperimento di Wiener l'azione fotografica si verifica solo nei piani nodali del vettore elettrico; in accordo con la teoria elettromagnetica, l'energia magnetica della luce non si propaga.

Consideriamo ora l'esperimento di interferenza di Young.<sup>50</sup> Alcuni atomi di luce attraversano le fenditure e vengono diffratti lungo la direzione del raggio della porzione vicina delle loro onde di fase. Nello spazio dietro allo schermo, la loro capacità di azione fotoelettrica varierà da punto a punto secondo lo stato di interferenza delle due onde di fase che hanno attraversato le due fenditure. Allora si vedranno frange di interferenza, per quanto piccolo possa essere il numero di quanti diffratti e debole possa essere l'intensità della luce incidente. I quanti di luce attraversano davvero tutte le frange scure e chiare: è solo la loro capacità di agire sulla materia che cambia continuamente. Questa spiegazione, che sembra rimuovere contemporaneamente le obiezioni contro i quanti di luce e la propagazione di energia attraverso le frange scure, può essere estesa a tutti i fenomeni di interferenza e di diffrazione.

### VIII. I quanti e la teoria dinamica dei gas

Allo scopo di calcolare le costanti dell'entropia e le cosiddette "costanti chimiche", Planck e Nernst sono stati obbligati a introdurre l'idea di quanto nella teoria dei gas.<sup>51</sup> Come spiegato sopra, Planck sceglie l'estensione di

---

<sup>50</sup> Thomas Young (1773–1829): *On the theory of light and colour [Teoria della luce e dei colori]*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **92** (1802) 12–24. In questo lavoro viene descritto il famoso esperimento di diffrazione e interferenza della luce che attraversa uno schermo con due piccole fenditure.

<sup>51</sup> Nell'approccio statistico alla termodinamica secondo Josiah Willard Gibbs (1839–1903), da lui sviluppato in *Elementary principles in statistical mechanics: Development with special reference to the rational foundations of thermodynamics* (Yale University Press, New Haven, 1902), restava indeterminata una costante  $C^N$  nella definizione dell'entropia di un sistema di  $N$  particelle. Qui de Broglie assume, con Planck,  $C^N = h^{3N}$ , che è un'ipotesi accettabile

un volume elementare dello spazio dello fasi pari a <sup>52</sup>

$$\frac{1}{h^3} dx dy dz dp dq dr \quad \text{oppure} \quad \frac{4\pi}{h^3} m_0^{3/2} \sqrt{2w} dw dx dy dz.$$

Ora cercheremo di giustificare questa ipotesi.

Ogni atomo con velocità  $\beta c$  può essere considerato collegato con un gruppo di onde con velocità di fase  $V = c/\beta$ , frequenza  $(1/h)m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2}$  e velocità di gruppo  $U = \beta c$ . Lo stato del gas può essere stabile solo se le onde corrispondenti a tutti gli atomi formano un sistema di onde stazionarie. Utilizzando un metodo ben noto fornito da Jeans, per il numero di onde per unità di volume con frequenze comprese nell'intervallo  $(\nu, \nu + d\nu)$  troviamo: <sup>† 53</sup>

$$n_\nu d\nu = \frac{4\pi}{UV^2} \nu^2 d\nu = \frac{4\pi}{c^3} \beta \nu^2 d\nu.$$

Se  $w$  è l'energia cinetica di un atomo e  $\nu$  la corrispondente frequenza, allora:

$$h\nu = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = w + m_0c^2 = m_0c^2(1 + \alpha),$$

dove  $\alpha = w/m_0c^2$ .

Ora è molto facile trovare che  $n_\nu d\nu$  è dato dall'equazione seguente: <sup>54</sup>

$$n_\nu d\nu = \frac{4\pi}{h^3} m_0^2 c (1 + \alpha) \sqrt{\alpha(2 + \alpha)} dw.$$

Ogni onda di fase può trasportare con sè uno, due o più atomi, così che, secondo le leggi canoniche, il numero di atomi con energia  $h\nu$  sarà proporzionale a:

$$\frac{4\pi}{h^3} m_0^2 c (1 + \alpha) \sqrt{\alpha(2 + \alpha)} dw dx dy dz \sum_1^\infty e^{-nh\nu/kT}.$$

se le particelle sono tra di loro distinguibili come si suppone in meccanica classica, mentre per particelle quantistiche (indistinguibili) risulta  $C^N = N!h^{3N}$ . Però ai fini di de Broglie è importante solo il riconoscimento, valido anche e soprattutto in meccanica quantistica, che la cella elementare dello spazio delle fasi ha un volume pari a  $h^3$ .

<sup>52</sup> Con  $w$  viene ora indicata l'energia cinetica di un atomo.

<sup>†</sup> Léon Brillouin, *Théorie des Quanta*, p. 38. Paris: A.Blanchard.

<sup>53</sup> Il titolo completo è: *La Théorie des Quanta et l'Atome de Bohr*. L'opera raccoglie il testo di alcune conferenze tenute da Léon Nicolas Brillouin (1889–1979), figlio di Louis Marcel. Nicolas era grande amico di de Broglie fin dai tempi del loro servizio militare. Il conteggio di Jeans, unito all'applicazione classica del teorema di equipartizione dell'energia, porta alla formula di Rayleigh-Jeans che rende conto della parte a bassa frequenza dello spettro di corpo nero. Lord Rayleigh: *Remarks upon the law of complete radiation [Osservazioni sulla legge di radiazione del corpo nero]*, *Philosophical Magazine* **49** (1900) 539–540. J.H.Jeans: *On the partition of energy between matter and ether [Ripartizione di energia tra materia ed etere]*, *Philosophical Magazine* **10** (1905) 91–98.

<sup>54</sup> Dalla relazione precedente risulta  $\beta = \sqrt{\alpha(2 + \alpha)}/(1 + \alpha)$  e  $h d\nu = m_0c^2 d\alpha = dw$ .

Consideriamo dapprima un gas di materia i cui atomi abbiano una massa relativamente grande e velocità relativamente piccole. Allora possiamo trascurare tutti i termini della serie eccetto il primo, e possiamo anche porre  $1 + \alpha = 1$ . Trascurando un fattore costante, il numero di atomi con energia cinetica pari a  $w$  sarà:

$$\frac{4\pi}{h^3} m_0^{3/2} \sqrt{2w} dw dx dy dz e^{-w/kT},$$

un risultato che giustifica il metodo di Planck e che porta alla forma usuale della legge di Maxwell.

Nel caso del gas di quanti di luce  $\alpha$  è sempre grande e, inoltre, dobbiamo usare tutti i termini della serie. Per la simmetria interna binaria del quanto di luce, dobbiamo introdurre un fattore 2 trovando che la densità di energia raggiante è proporzionale a:

$$\frac{8\pi}{h^3 c^3} w^3 \sum_1^{\infty} e^{-nh\nu/kT} dw = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu.$$

Un metodo sviluppato nel numero del 22 novembre del *Journal de Physique* mostra che il fattore di proporzionalità è uno, per cui otteniamo la vera legge della radiazione.<sup>55</sup>

### IX. Questioni aperte

Se verranno accettati, i concetti esposti in questo lavoro necessitano di un'ampia modifica della teoria elettromagnetica. Le cosiddette "energie elettrica e magnetica" devono essere solo una specie di valore medio, mentre tutta l'energia reale dei campi ha probabilmente una struttura corpuscolare a grana fine. La costruzione di un nuovo elettromagnetismo sembra un compito molto difficile, ma abbiamo una linea direttrice: secondo il principio di corrispondenza e le affermazioni fatte sopra, i vettori di definizione della vecchia teoria elettromagnetica dovrebbero dare la probabilità della reazione tra materia e questa energia a grana fine.

---

<sup>55</sup> Qualche mese più tardi, nel giugno 1924, Einstein riceve un manoscritto proveniente da Dacca e firmato da Satyendra Nath Bose (1894–1974), un fisico indiano praticamente sconosciuto, che, riprendendo il lavoro citato di Einstein del 1917 sui coefficienti di assorbimento e di emissione della radiazione, con argomenti simili a quelli di de Broglie deduce la legge di Planck. La richiesta ad Einstein è di provvedere a far tradurre in tedesco il lavoro e di sottoporlo a pubblicazione, se ritenuto interessante. L'entusiasmo di Einstein è tale da indurlo a fare personalmente la traduzione, preannunciando in una nota del traduttore alla fine dell'articolo l'estensione dei risultati al caso del gas perfetto monoatomico in quella che oggi è nota come statistica di Bose-Einstein. N.S. Bose: *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese [Legge di Planck e ipotesi dei quanti di luce]*, *Zeitschrift für Physik* **26** (1924) 178–181. A. Einstein: *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases [Teoria quantistica del gas perfetto monoatomico]*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* **22** (1924) 261–267 (presentato alla seduta del 10 luglio 1924), **23** (1925) 3–14, 18–25.

Il nuovo elettromagnetismo darà la soluzione a molti problemi. Le leggi della propagazione delle onde date dalla teoria di Maxwell saranno probabilmente valide per le onde di fase della luce, prive di energia, e la diffusione dell'energia raggianti sarà spiegata dalla risultante curvatura dei raggi (o traiettorie dei quanti di luce). Sembra che ci sia una forte analogia tra diffusione della radiazione e diffusione di particelle; la diminuzione della velocità delle particelle nell'attraversare uno schermo può anche essere assimilata alla diminuzione della frequenza dei raggi  $X$  per diffusione, che recentemente è stata calcolata e dimostrata sperimentalmente da A.H.Compton.

La spiegazione della dispersione ottica sarà molto più difficile. Le teorie classiche (inclusa la teoria dell'elettrone) danno solo un punto di vista medio di questo fenomeno, che è prodotto da reazioni elementari complesse tra radiazione e atomi; certamente qui saremo obbligati anche a distinguere accuratamente il moto reale dell'energia dalla propagazione dello stato di interferenza risultante. Il tipo di "risonanza" mostrato dalla variazione dell'indice di rifrazione non sembra più conciliabile con la discontinuità della luce.

Molte altre questioni restano aperte: qual è il meccanismo dell'assorbimento di Bragg? Che cosa succede quando un atomo passa da uno stato stabile a un altro e in che modo emette un quanto singolo? Come si può introdurre la struttura granulare dell'energia nella nostra concezione delle onde elastiche e nella teoria di Debye dei calori specifici?

Infine, dobbiamo rilevare che la relazione quantistica rimane ancora una specie di postulato che definisce la costante  $h$ , il cui reale significato non è affatto chiarito; ma sembra che l'enigma quantistico sia ora ridotto a questo unico punto.

#### *Riassunto*

In questo lavoro è stata fatta l'ipotesi che la luce sia costituita essenzialmente di quanti di luce, tutti con la stessa massa straordinariamente piccola. Si è dimostrato matematicamente che la trasformazione di Lorentz-Einstein unita alla relazione quantistica porta necessariamente ad associare il moto di un corpo alla propagazione di un'onda, e che questa idea fornisce un'interpretazione fisica delle condizioni analitiche di stabilità di Bohr. La diffrazione sembra essere in accordo con un'estensione della dinamica Newtoniana. È allora possibile salvare il carattere sia corpuscolare che ondulatorio della luce e, per mezzo dell'ipotesi suggerita dalla teoria elettromagnetica e dal principio di corrispondenza, dare una spiegazione plausibile della coerenza e delle frange di interferenza. Infine, è stato mostrato perché i quanti devono prendere parte alla teoria dinamica dei gas e come la legge di Planck sia la forma limite della legge di Maxwell per il gas di quanti di luce.

Molte di queste idee possono essere criticate e forse riformulate, ma sembra che ci siano pochi dubbi sulla reale esistenza dei quanti di luce. Inoltre, se la nostra opinione sarà accolta, dato che è fondata sulla relatività del tempo,

tutta l'enorme evidenza sperimentale del "quantum" si volgerà a favore della teoria di Einstein.

*Nota* – Dopo aver scritto questo lavoro sono riuscito a dare ai risultati contenuti nella quarta sezione una forma un po' diversa, ma molto più generale.

Il principio di minima azione per un punto materiale può essere espresso con notazione spazio-temporale mediante l'equazione:

$$\delta \int \sum_1^4 J_i dx^i = 0,$$

dove  $J_i$  sono le componenti covarianti di un tetravettore la cui componente temporale è l'energia del punto materiale divisa per  $c$  e le componenti spaziali sono le componenti del suo impulso.

In modo simile nello studio della propagazione ondulatoria dobbiamo scrivere:

$$\delta \int \sum_1^4 O_i dx^i = 0,$$

dove  $O_i$  sono le componenti covarianti di un tetravettore la cui componente temporale è la frequenza divisa per  $c$  e le cui componenti spaziali sono le componenti di un vettore diretto come il raggio e di modulo  $\nu/V = 1/\lambda$  ( $V$  velocità di fase). Ora la relazione quantistica dice che è  $J_4 = hO_4$ . Più in generale, io suggerisco di porre  $\mathbf{J} = h\mathbf{O}$ .<sup>56</sup> Da questa affermazione segue immediatamente l'identità dei due principi di Fermat e di Maupertuis ed è possibile dedurre rigorosamente la velocità dell'onda di fase per un campo elettromagnetico qualunque.

---

<sup>56</sup> La condizione  $\mathbf{J} = h\mathbf{O}$  implica  $p = h/\lambda$ .

### La natura ondulatoria dell'elettrone † 57

Quando nel 1920 ripresi i miei studi di fisica teorica che erano stati interrotti da lungo tempo a causa di circostanze indipendenti dalla mia volontà, ero ben lontano dall'idea che i miei studi mi avrebbero portato molti anni dopo a ricevere il premio così alto e invidiato che l'Accademia delle Scienze di Svezia conferisce ogni anno a uno scienziato: il premio Nobel per la Fisica. Ciò che a quell'epoca mi attirò verso la fisica teorica non era la speranza che il mio lavoro venisse coronato da un segno di così alta distinzione: io fui attratto alla fisica teorica dal mistero che avvolgeva sempre di più la struttura della materia e la struttura delle radiazioni, un mistero che si approfondì allorché lo strano concetto di quanto, introdotto nel 1900 da Planck nelle sue ricerche sulla radiazione di corpo nero, prese a insinuarsi in tutto il dominio della fisica.

Per aiutarvi a capire lo sviluppo delle mie ricerche, devo prima fare un quadro della crisi che la fisica stava attraversando da circa vent'anni.

Per lungo tempo i fisici si erano chiesti se la luce fosse composta da piccole particelle in rapido movimento. Questa idea fu avanzata dai filosofi dell'antichità e sostenuta da Newton nel '700.<sup>58</sup> Dopo la scoperta di Thomas Young riguardante i fenomeni di interferenza e in seguito all'ammirevole opera di Augustin Fresnel,<sup>59</sup> l'ipotesi di una struttura granulare della luce fu messa totalmente da parte e fu adottata all'unanimità la teoria ondulatoria.<sup>60</sup> Perciò i fisici del secolo scorso abbandonarono completamente l'idea di una

---

† Louis de Broglie: *La nature ondulatoire de l'électron*, conferenza pronunciata a Stoccolma il 12 dicembre 1929 in occasione del conferimento del premio Nobel.

<sup>57</sup> Il testo originale che viene qui utilizzato per la traduzione è riportato nel libro di de Broglie: *Matière et Lumière*, Éditions Albin Michel, Parigi, 1937, p. 181–197. Ne esiste anche una traduzione in inglese curata dalla Fondazione Nobel (*The wave nature of the electron*, Nobel Lecture, December 12, 1929, Elsevier Publ. Co., Amsterdam, 1965, p. 244–256), pubblicata in un volume che raccoglie il testo dei discorsi pronunciati dai laureati col premio Nobel dal 1922 al 1941.

<sup>58</sup> Isaac Newton: *Opticks, or a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colour of light*, S. Smith, London, 1704.

<sup>59</sup> Augustin-Jean Fresnel (1788–1827) nelle sue *Mémoires sur la diffusion de la lumière* del 1818, ma pubblicate solo nel 1826 in *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Paris, vol. 5, divulgò i risultati degli esperimenti di interferenza di Young.

<sup>60</sup> Occorre però ricordare che l'ipotesi ondulatoria della luce risale a Christiaan Huyghens (1629–1695): *Traité de la lumière*, P. van der Aa, Leiden, 1690. Inoltre l'affermarsi della teoria ondulatoria è dovuto essenzialmente al fatto che la misura della velocità della luce nel vuoto e in un mezzo ha smentito la teoria corpuscolare di Newton. Ciò avvenne principalmente per merito di Armand-Hippolyte-Louis Fizeau (1819–1896): *Sur une expérience relative à la vitesse de propagation de la lumière* [Un'esperienza relativa alla velocità

struttura atomica della luce. Sebbene bandite dall'ottica, le teorie atomiche cominciarono a riportare grandi successi non solo in chimica, dove hanno fornito un'interpretazione semplice delle leggi sulle proporzioni definite,<sup>61</sup> ma anche in fisica della materia dove hanno permesso di interpretare un gran numero di proprietà dei solidi, dei liquidi e dei gas. In particolare, esse furono un utile strumento nell'elaborazione di quella meravigliosa teoria cinetica dei gas che, generalizzata sotto il nome di meccanica statistica, permette di dare un chiaro significato ai concetti astratti della termodinamica.<sup>62</sup> Anche gli esperimenti hanno portato prove decisive in favore della costituzione atomica dell'elettricità; il concetto di corpuscolo di elettricità deve la sua comparsa a Sir J.J. Thomson<sup>63</sup> e voi sapete tutto ciò che ne ha tratto H.A. Lorentz nella sua teoria dell'elettrone.<sup>64</sup>

Circa trenta anni fa quindi la fisica era divisa in due: da una parte la fisica della materia basata sul concetto di particelle e atomi, che si supponeva obbedissero alle leggi classiche della meccanica di Newton, e dall'altra la

*di propagazione della luce*], Comptes Rendus **29** (1849) 90–92, e di Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868): *Méthode générale pour mesurer la vitesse de la lumière dans l'air et les milieux transparents* [Metodo generale per misurare la velocità della luce nell'aria e nei mezzi trasparenti], Comptes Rendus **30** (1850) 551–560.

- <sup>61</sup> De Broglie si sta riferendo alla legge di Proust dal nome del chimico francese Joseph-Louis Proust (1754–1826) che la propose durante i suoi studi tra il 1799 e il 1808 e che fu enunciata definitivamente in termini di rapporti di combinazione costanti da parte di John Dalton (1766–1844): *New system of chemical philosophy* (S.Russel for R.Bicherstaff, London, 1808). L'ipotesi atomistica viene ulteriormente rafforzata dai risultati sull'ugual numero di molecole contenute dai gas in condizioni identiche di temperatura e pressione, ottenuti da Amedeo Avogadro (1776–1856): *Essai d'une manière de déterminer les masses relatives des molécules élémentaires des corps, et les proportions selon lesquelles elles entrent dans les combinaisons* [Saggio sul modo di determinare le masse relative delle molecole elementari dei corpi e le proporzioni secondo cui esse entrano nelle combinazioni], Journal de physique théorique et appliquée (Paris) **73** (1811) 58–76.
- <sup>62</sup> Qui il riferimento è senza dubbio ai lavori di Maxwell e di Boltzmann. L'impostazione matematica di Boltzmann però era fortemente osteggiata dalla scuola inglese – cfr. per esempio Peter Gutrie Tait (1831–1901): *On the foundations of the kinetic theory of gases* [Sui fondamenti della teoria cinetica dei gas], Transactions of the Royal Society of Edinburgh **33** (1886) 65–95, 251–277. In particolare, ancora agli inizi del '900 William Thomson Kelvin (1824–1907) segnalava l'etere cosmico e l'equipartizione dell'energia quali principali problemi irrisolti, a causa delle difficoltà che si incontravano nel tentare di conciliare la meccanica con l'elettromagnetismo e nell'interpretazione statistica dei fenomeni termodinamici; W.T.Kelvin: *Nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light* [Nubi del diciannovesimo secolo sulla teoria dinamica del calore e della luce], Philosophical Magazine **2** (1901) 1–40.
- <sup>63</sup> La misura del rapporto tra massa e carica dell'elettrone è descritta in J.J.Thomson: *Cathode-rays* [Raggi catodici], Philosophical Magazine **44** (1897) 293–316. Il nome *elettrone* in realtà è dovuto a George Johnstone Stoney: *Of the "electron", or atom of electricity* [L'elettrone, o atomo di elettricità], Philosophical Magazine **38** (1894) 418–420.
- <sup>64</sup> H.A.Lorentz: *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants* [La teoria elettromagnetica di Maxwell e sua applicazione ai corpi in movimento], Archive Néerlandaise **25** (1892) 363–551; *The theory of electrons and its application to the phenomena of light and radiant heat* [La teoria degli elettroni e sua applicazione ai fenomeni di luce e calore raggianti] (B.G.Teubner, Leipzig, 1909).

fisica della radiazione basata sul concetto di propagazione ondulatoria in un ipotetico mezzo continuo, cioè l'etere luminoso e elettromagnetico. Ma queste due fisiche non potevano rimanere estranee una all'altra: dovevano trovare una loro fusione nel tentativo di inventare una teoria in grado di spiegare gli scambi energetici tra radiazione e materia – ed è qui che sorgevano le difficoltà. Mentre si cercava di collegare queste due fisiche, si giunse di fatto a conclusioni imprecise e perfino inammissibili nel considerare l'equilibrio energetico tra materia e radiazione in un sistema isolato termicamente: la materia, si arrivò a dire, dovrebbe cedere tutta la sua energia alla radiazione e quindi tende spontaneamente verso la temperatura dello zero assoluto! Questa conclusione assurda doveva essere evitata ad ogni costo. Con un'intuizione geniale, Planck trovò il modo di evitarla: invece di ammettere, secondo la teoria classica delle onde, che la sorgente di luce emette la sua radiazione in modo continuo, bisognava invece fare l'ipotesi che essa la emette per quantità uguali e finite, per quanti. L'energia di ogni quanto, inoltre, ha un valore proporzionale alla frequenza  $\nu$  della radiazione. Essa è uguale a  $h\nu$ , dove  $h$  è una costante universale che da allora è stata chiamata costante di Planck.

Il successo dell'idea di Planck ha comportato serie conseguenze. Se la luce viene emessa per quanti, non dovrebbe, una volta emessa, avere una struttura granulare? L'esistenza dei quanti di radiazione perciò riporta alla concezione corpuscolare della luce. D'altra parte, come mostrato da Jeans e H.Poincaré,<sup>65</sup> si può dimostrare che, se il moto delle particelle materiali nelle sorgenti di luce obbedisce alle leggi della meccanica classica, è impossibile derivare l'esatta legge della radiazione di corpo nero, cioè la legge di Planck. Perciò occorre fare l'ipotesi che la tradizionale dinamica, anche se modificata secondo la teoria della relatività di Einstein, non è capace di rendere conto del movimento su scala molto piccola.

L'esistenza della struttura granulare della luce e delle altre radiazioni è stata confermata dalla scoperta dell'effetto fotoelettrico. Se un fascio di luce o di raggi  $X$  incide su della materia, questa emette elettroni che si muovono con elevata velocità. L'energia cinetica di questi elettroni cresce linearmente con la frequenza della radiazione incidente ed è indipendente dalla sua intensità. Questo fenomeno si può spiegare semplicemente con l'ipotesi che la radiazione sia composta di quanti  $h\nu$  capaci di trasferire tutta la loro energia a un elettrone del corpo irraggiato: si è così portati alla teoria dei quanti di luce proposta da Einstein nel 1905 e che è, dopo tutto, un ritorno all'ipotesi corpuscolare di Newton, completata con la relazione di proporzionalità tra l'energia delle

---

<sup>65</sup> Il rapporto di Jeans alla prima Conferenza Solvay aveva invogliato Henri Poincaré ad occuparsi della teoria dei quanti. Nel ritrovare la formula di Planck con argomenti di meccanica statistica aveva dovuto necessariamente introdurre una funzione discontinua per la densità di probabilità con cui descriveva gli oscillatori associati al campo di radiazione. Questa discontinuità, totalmente inconciliabile con la meccanica classica, convinse anche Jeans della necessità di una nuova meccanica. H.Poincaré: *Sur la théorie des quanta [Sulla teoria dei quanti]*, Journal de physique théorique et appliquée **2** (1912) 5–34.

particelle e la frequenza. Una serie di argomenti furono prodotti da Einstein a supporto di questo punto di vista, che fu confermato nel 1922 dalla scoperta, da parte di A.H.Compton, del fenomeno della diffusione dei raggi  $X$  che ne porta il nome. Tuttavia, era ancora necessario adottare la teoria ondulatoria per spiegare i fenomeni di interferenza e di diffrazione e non si riusciva a intravedere in alcun modo una via per conciliare la teoria ondulatoria con l'esistenza dei corpuscoli di luce.

Come detto, le ricerche [di Planck] avevano posto dubbi sulla validità della meccanica su scala molto piccola. Consideriamo un punto materiale che descrive una piccola traiettoria chiusa o avvolta su se stessa. Secondo la dinamica classica, in dipendenza dalle condizioni iniziali sono possibili infiniti moti di questo tipo e i possibili valori di energia del corpo in movimento formano una sequenza continua. Invece Planck è stato indotto a fare l'ipotesi che solo certi moti privilegiati, i moti *quantizzati*, sono possibili o almeno stabili, in quanto l'energia può assumere solo valori che formano una sequenza discreta. Questa idea inizialmente sembrò molto strana, ma si dovette riconoscerne la validità perché era questa l'idea che portò Planck alla corretta legge della radiazione di corpo nero e che si dimostrò in seguito feconda in molti altri campi. Infine, è sull'idea di quantizzazione dei moti atomici che Bohr ha fondato la sua celebre teoria dell'atomo; essa è così conosciuta agli scienziati che non ritengo necessario riassumerla qui.

La necessità di ammettere per la luce due teorie in contraddizione tra di loro, quella delle onde e quella delle particelle, e l'impossibilità di capire perché, tra gli infiniti moti che un elettrone dovrebbe poter compiere nell'atomo secondo i concetti classici, solo alcuni sono possibili: questi erano gli enigmi che si ponevano ai fisici all'epoca in cui io ripresi i miei studi di fisica teorica.

Quando cominciai a riflettere su queste difficoltà, due cose mi colpirono soprattutto. Da un lato, la teoria quantistica della luce non può essere considerata soddisfacente in quanto definisce l'energia di un corpuscolo di luce con la relazione  $W = h\nu$  che contiene una frequenza  $\nu$ . Ora, una teoria puramente corpuscolare non contiene alcun elemento che permetta di definire una frequenza. Questa ragione da sola rende necessario, nel caso della luce, introdurre simultaneamente l'idea di corpuscolo e l'idea di periodicità.

D'altra parte, la determinazione dei moti stabili degli elettroni nell'atomo fa intervenire numeri interi, e fino ad allora gli unici fenomeni che coinvolgessero numeri interi in fisica erano quelli di interferenza e di vibrazioni proprie. Ciò mi suggerì l'idea che neppure gli elettroni potessero essere rappresentati come semplici corpuscoli, ma che si dovesse attribuire anche a loro una qualche periodicità.

Così arrivai alla seguente idea generale che ha indirizzato le mie ricerche: sia per la materia che per le radiazioni, in particolare la luce, è necessario introdurre la nozione di corpuscolo e la nozione di onda allo stesso tempo.

In altri termini, si deve ammettere in entrambi i casi l'esistenza di corpuscoli accompagnati da onde. Ma siccome corpuscoli e onde non possono essere indipendenti perché, secondo l'espressione di Bohr, costituiscono due aspetti complementari della realtà, deve essere possibile stabilire un certo parallelismo tra moto di una particella e propagazione dell'onda associata. Il primo obiettivo da raggiungere, perciò, era quello di stabilire questa corrispondenza.

A tal fine cominciai a considerare il caso più semplice: quello di una particella isolata, cioè una particella sottratta a ogni azione esterna. Desideriamo associarle un'onda. Consideriamo prima di tutto un sistema di riferimento  $Ox_0y_0z_0$  in cui la particella sia immobile: questo è il sistema di riferimento "proprio" della particella nel senso della teoria della relatività. In questo sistema l'onda sarà stazionaria perché la particella è immobile: la sua fase sarà la stessa in ogni punto; essa sarà rappresentata da un'espressione della forma  $\sin 2\pi\nu_0(t_0 - \tau_0)$ , dove  $t_0$  è il tempo proprio della particella e  $\tau_0$  una costante.

Secondo il principio di inerzia, in ogni sistema di riferimento galileiano la particella eseguirà un moto rettilineo ed uniforme. Consideriamo un tale sistema galileiano e sia  $v = \beta c$  la velocità della particella in questo sistema di riferimento; senza perdere di generalità prenderemo la direzione del moto come asse  $x$ . In accordo con le trasformazioni di Lorentz, il tempo  $t$  utilizzato da un osservatore solidale con questo nuovo sistema di riferimento è associato al tempo proprio  $t_0$  dalla relazione:

$$t_0 = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

e quindi per questo osservatore la fase dell'onda sarà data da

$$\sin 2\pi \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( t - \frac{\beta x}{c} - \tau_0 \right).$$

Per lui l'onda avrà così una frequenza:

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

e si propagerà in direzione dell'asse  $x$  con una velocità di fase

$$V = \frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}.$$

Eliminando  $\beta$  dalle due relazioni precedenti si deriva facilmente la seguente relazione che definisce l'indice di rifrazione del vuoto  $n$  per le onde considerate: <sup>66</sup>

---

<sup>66</sup> L'indice di rifrazione  $n$  è definito dal rapporto tra la velocità  $c$  e la velocità di fase  $V$ , per cui in questo caso è  $n = \beta < 1$ .

$$n = \sqrt{1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}}.$$

A questa “legge di dispersione” corrisponde una “velocità di gruppo”. Sapete che la velocità di gruppo è la velocità dell’ampiezza risultante di un gruppo di onde di frequenza molto vicina. Lord Rayleigh ha mostrato che questa velocità  $U$  verifica l’equazione:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{c} \frac{\partial(n\nu)}{\partial\nu}.$$

Qui  $U = v$ , cioè la velocità di gruppo delle onde nel sistema  $xyzt$  è uguale alla velocità della particella in questo sistema di riferimento. Questa relazione è di grande importanza per lo sviluppo della teoria.

La particella è quindi definita nel sistema  $xyzt$  dalla frequenza  $\nu$  e dalla velocità di fase  $V$  della sua onda associata. Per stabilire il parallelismo di cui parlavo prima, dobbiamo cercare un legame tra queste grandezze e le grandezze meccaniche, energia e quantità di moto. Siccome la proporzionalità tra energia e frequenza è una delle relazioni più caratteristiche della teoria dei quanti e siccome, inoltre, la frequenza e l’energia si trasformano nello stesso modo quando si cambia il sistema di riferimento galileiano, è naturale porre

$$\text{energia} = h \times \text{frequenza}, \quad \text{oppure} \quad W = h\nu,$$

dove  $h$  è la costante di Planck. Questa relazione deve valere in tutti i sistemi di riferimento galileiani; nel sistema proprio della particella, quando l’energia della particella, in accordo con Einstein, si riduce alla sua energia interna  $m_0c^2$  ( $m_0$  essendo la massa a riposo), si ha

$$h\nu_0 = m_0c^2.$$

Questa relazione definisce la frequenza  $\nu_0$  in funzione della massa propria  $m_0$  e viceversa.

La quantità di moto è un vettore  $\mathbf{p}$  uguale a  $m_0\mathbf{v}/\sqrt{1-\beta^2}$  e si ha:

$$|p| = \frac{m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{Wv}{c^2} = \frac{h\nu}{V} = \frac{h}{\lambda}.$$

La quantità  $\lambda$  è la distanza tra due creste consecutive dell’onda, cioè è la “lunghezza d’onda”. Perciò:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Questa è una relazione fondamentale della teoria. <sup>67</sup>

Tutto ciò che precede si riferisce al caso molto semplice in cui non c'è alcun campo di forze agente sulla particella. Indicherò molto brevemente come generalizzare la teoria al caso di una particella che si muove in un campo di forze indipendente dal tempo e derivabile da una funzione potenziale  $F(xyz)$ . Con ragionamenti sui quali sorvolo, si è indotti allora a fare l'ipotesi che la propagazione dell'onda corrisponde a un indice di rifrazione variabile da punto a punto nello spazio secondo la formula seguente: <sup>68</sup>

$$n(xyz) = \sqrt{\left[1 - \frac{F(xyz)}{h\nu}\right]^2 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}}$$

oppure in prima approssimazione, se si possono trascurare le correzioni introdotte dalla teoria della relatività,

$$n(xyz) = \sqrt{\frac{2(E - F)}{m_0c^2}},$$

con  $E = W - m_0c^2$ . <sup>69</sup> L'energia costante  $W$  della particella è ancora associata alla frequenza costante  $\nu$  dell'onda dalla relazione

$$W = h\nu,$$

mentre la lunghezza d'onda, che varia da punto a punto del campo di forze, è legata alla quantità di moto  $p$  ugualmente variabile mediante la relazione seguente

$$\lambda(xyz) = \frac{h}{p(xyz)}.$$

<sup>67</sup> Questa relazione permette di reinterpretare l'espressione per l'indice di rifrazione data prima. Ricordando che è  $h\nu_0 = m_0c^2$ ,  $W = h\nu = m_0c^2/\sqrt{1 - \beta^2}$ , si ha infatti:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}} = \frac{\sqrt{W^2 - (m_0c^2)^2}}{W} = \frac{cp}{W},$$

che equivale alla nota relazione dell'ottica:  $n = ck/\omega$ .

<sup>68</sup> De Broglie spinge l'analogia da lui rilevata tra principio di Fermat in ottica e principio di Maupertuis in meccanica fino alla corrispondenza tra indice di rifrazione e funzione potenziale. La formula che segue è una estensione della precedente legge di dispersione al caso in cui l'energia del quanto di luce debba comprendere un termine di potenziale  $F$ . Partendo dalla relazione  $n = cp/W$  e tenendo presente che in presenza di un potenziale  $F$  si ha  $W = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} + F$ , si trova  $cp = (W - F)^2 - (m_0c^2)^2$ ; infine si ottiene la relazione proposta per  $n(xyz)$  ponendo  $W = h\nu$  e  $m_0c^2 = h\nu_0$ .

<sup>69</sup> Se  $E = W - m_0c^2$ , nel limite non relativistico è  $E \simeq \frac{1}{2}m_0c^2\beta^2 + F$  e quindi si trova l'espressione proposta per l'indice di rifrazione ponendo  $n = \beta$ .

Qui ancora si dimostra che la velocità di gruppo delle onde è uguale alla velocità della particella. Il parallelismo così stabilito tra la particella e la sua onda permette di identificare il principio di Fermat per le onde e il principio di minima azione per le particelle (con campi costanti nel tempo). Il principio di Fermat afferma che il raggio nel senso dell'ottica che va dal punto  $A$  al punto  $B$  in un mezzo con indice di rifrazione  $n(xyz)$  variabile da punto a punto, ma costante nel tempo, è tale che l'integrale  $\int_A^B n dl$  preso lungo il cammino di questo raggio sia estremo. D'altra parte il principio di Maupertuis di minima azione ci insegna quanto segue: la traiettoria di una particella che va da  $A$  a  $B$  nello spazio è tale che l'integrale  $\int_A^B p dl$  preso lungo la traiettoria sia estremo, purché naturalmente si considerino solo i moti corrispondenti ad un dato valore di energia.

Secondo le relazioni stabilite prima tra grandezze meccaniche e grandezze ondulatorie, si ha:

$$n = \frac{c}{V} = \frac{c}{\nu \lambda} = \frac{c}{h\nu} \frac{h}{\lambda} = \frac{c}{W} p = \text{costante} \cdot p,$$

in quanto  $W$  è costante in un campo indipendente dal tempo. Ne risulta che il principio di Fermat e il principio di Maupertuis sono l'uno la traduzione dell'altro: le possibili traiettorie della particella sono identiche ai possibili cammini del raggio della sua onda.<sup>70</sup>

Questi concetti conducono a una interpretazione delle condizioni di stabilità introdotte dalla teoria dei quanti. In realtà, se si considera una traiettoria chiusa  $C$  in un campo indipendente dal tempo, è molto naturale fare l'ipotesi che la fase dell'onda associata debba essere una funzione monodroma lungo questa traiettoria. Ciò porta a scrivere:

$$\int_C \frac{dl}{\lambda} = \int_C \frac{1}{h} p dl = \text{numero intero.}$$

Questa è proprio la condizione di stabilità di Planck per i moti atomici periodici. Le condizioni di stabilità quantiche quindi emergono in analogia con i fenomeni di risonanza e la comparsa di numeri interi diventa qui naturale come nella teoria delle corde e delle membrane vibranti.

Le formule generali che stabiliscono il parallelismo tra onde e particelle possono essere applicate a particelle di luce a condizione di supporre che qui la massa a riposo  $m_0$  sia infinitamente piccola. In realtà, se per ogni valore assegnato di energia  $W$ ,  $m_0$  si fa tendere a zero, si trova che  $v$  e  $V$  tendono entrambi a  $c$  e nel limite si ottengono le due formule fondamentali su cui Einstein ha stabilito la sua teoria dei quanti di luce:

---

<sup>70</sup> Come la variazione di indice di rifrazione modifica la lunghezza d'onda  $\lambda$ , così la variazione spaziale del potenziale genera la forza che modifica l'impulso  $p$ .

$$W = h\nu, \quad p = \frac{h\nu}{c}.$$

Tali sono le idee principali sviluppate nei miei primi lavori. Esse mostravano chiaramente la possibilità di stabilire una corrispondenza tra onde e particelle tale che le leggi della meccanica corrispondessero alle leggi dell'ottica geometrica.<sup>71</sup> Nella teoria ondulatoria, però, come si sa, l'ottica geometrica è solo un'approssimazione: questa approssimazione ha i suoi limiti di validità e, particolarmente quando entrano in gioco fenomeni di interferenza e diffrazione, è totalmente insoddisfacente. Ciò induce a pensare che anche la meccanica classica sia solo un'approssimazione di una più vasta meccanica di carattere ondulatorio. È ciò che affermai quasi dall'inizio dei miei lavori, dicendo: "Va sviluppata una nuova meccanica che stia alla meccanica classica come l'ottica ondulatoria sta all'ottica geometrica". Questa nuova meccanica è stata da allora sviluppata, grazie principalmente ai bei lavori fatti da Schrödinger.<sup>72</sup> È basata su equazioni di propagazione d'onda e determina rigorosamente l'evoluzione temporale dell'onda associata alla particella. In particolare riesce a dare una forma nuova e più soddisfacente alle condizioni di quantizzazione del moto intra-atomico in quanto le condizioni classiche di quantizzazione sono giustificate, come abbiamo visto, da un'applicazione dell'ottica geometrica alle onde associate con le particelle intra-atomiche, e questa applicazione non è giustificata in modo rigoroso.

Non posso tentare neppure brevemente di riassumere qui lo sviluppo della nuova meccanica. Desidero semplicemente dire che un esame accurato ha rivelato che è identica alla meccanica sviluppata indipendentemente prima da Heisenberg, poi da Born, Jordan, Pauli, Dirac, ecc.: la meccanica quantistica. Dal punto di vista matematico, le due meccaniche, ondulatoria e quantistica, sono forme equivalenti.<sup>73</sup>

---

<sup>71</sup> Occorre osservare che quando Hamilton presenta la sua formulazione della meccanica ha in realtà ben presente questa corrispondenza tra meccanica analitica e ottica geometrica; ma la storia della fisica fino a de Broglie apparentemente aveva completamente dimenticato questo aspetto del lavoro di W.R.Hamilton: *On a general method of expressing the path of light, and of planets, by the coefficients of a characteristic function* [Un metodo generale per descrivere il cammino percorso dalla luce, e dai pianeti, per mezzo dei coefficienti di una funzione caratteristica], Dublin University Review (1833) 795–1826.

<sup>72</sup> Erwin Schrödinger, nato a Vienna nel 1887, era professore a Zurigo quando, tra il gennaio e il giugno 1926, produsse una serie di quattro lavori tutti con lo stesso titolo: *Quantisierung als Eigenwertproblem* [Quantizzazione come problema agli autovalori], *Annalen der Physik* **79** (1926) 361–376, 489–527; **80** (1926) 437–490; **81** (1927) 109–139. In essi è contenuta una parte abbondante del programma odierno di un corso universitario di meccanica quantistica. Nel 1933, dopo aver ricevuto il premio Nobel insieme con Dirac e avere abbandonato per le sue idee antinaziste la cattedra di fisica teorica a Berlino, che aveva coperto in sostituzione di Planck, si rifugiò prima in Inghilterra e quindi a Dublino fino al 1957, quando accettò la chiamata dell'Università di Vienna. Schrödinger morì a Vienna nel 1961.

<sup>73</sup> E.Schrödinger: *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik*

Ci accontenteremo qui di riflettere sul significato generale dei risultati ottenuti. Per riassumere il significato della meccanica ondulatoria si può affermare che: “a ogni particella si deve associare un’onda e solo lo studio della propagazione ondulatoria ci può fornire informazioni sulle posizioni successive della particella nello spazio”. Nei fenomeni meccanici usuali su grande scala le posizioni previste giacciono su una curva che è la traiettoria nel significato classico della parola. Ma che cosa succede se l’onda non si propaga secondo le leggi dell’ottica geometrica, se, per esempio, ci sono interferenze e diffrazione? Allora non è più possibile attribuire alla particella un moto conforme alla dinamica classica, questo è certo. È ancora possibile supporre che in ogni istante la particella occupa una posizione ben definita nell’onda e che l’onda nel suo propagarsi porta la particella con sé allo stesso modo con cui un’onda trascinerrebbe un tappo di sughero? Queste sono domande difficili, la cui discussione ci porterebbe troppo lontano, finanche ai confini della filosofia. Tutto ciò che dirò qui è che oggi la tendenza generale è quella di ammettere che non è sempre possibile assegnare alla particella una posizione ben definita nell’onda: <sup>74</sup> quando si fa un’osservazione che permette di localizzare la particella, si è sempre indotti ad attribuirle una posizione all’interno dell’onda e la probabilità che essa sia in un punto particolare  $M$  dell’onda è proporzionale al quadrato dell’ampiezza, cioè l’intensità, in  $M$ .

Ciò si può esprimere nel modo seguente. Se consideriamo una nuvola di particelle associate con la stessa onda, l’intensità dell’onda in ogni punto è proporzionale alla densità della nuvola in quel punto (cioè al numero di particelle per unità di volume intorno a quel punto). Questa ipotesi è necessaria per spiegare come, nel caso dell’interferenza di luce, l’energia luminosa sia concentrata nei punti in cui l’intensità dell’onda è massima: se infatti si ammette che l’energia luminosa è trasportata dalle particelle di luce, i fotoni, allora la densità dei fotoni nell’onda deve essere proporzionale all’intensità.

Questa regola da sola ci permette di comprendere come fu possibile verificare sperimentalmente la teoria ondulatoria dell’elettrone.

Immaginiamo infatti una nuvola indefinita di elettroni, tutti in moto con la stessa velocità nella stessa direzione. Conformemente alle idee fondamentali della meccanica ondulatoria dobbiamo associare a questa nuvola un’onda piana infinitamente estesa della forma

$$a \sin 2\pi \left[ \frac{W}{h}t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\lambda} \right],$$

dove  $\alpha\beta\gamma$  sono i coseni direttori della direzione di propagazione e la lunghezza

---

zu der meinen [Relazione della meccanica quantistica di Heisenberg-Born-Jordan con la mia], Annalen der Physik **79** (1926) 734–756. Questo lavoro si inserisce tra la seconda e la terza comunicazione della serie di quattro in cui Schrödinger sviluppa la sua meccanica.

<sup>74</sup> Si sente qui l’onestà dello scienziato che riferisce l’opinione generale prevalente, ma che intimamente non riesce a condividerla: per lui l’onda è una realtà, non un artificio di calcolo.

d'onda  $\lambda$  è uguale a  $h/p$ . Con elettroni di velocità non estremamente elevata si può porre

$$p = m_0 v$$

e quindi

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v},$$

dove  $m_0$  è la massa propria dell'elettrone.

Sapete che in pratica, per ottenere elettroni tutti con la stessa velocità, li si sottopone a una stessa differenza di potenziale  $P$  e quindi si ha

$$\frac{1}{2} m_0 v^2 = eP.$$

Perciò

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eP}}.$$

Numericamente ciò fornisce

$$\lambda = \frac{12.24}{\sqrt{P}} \times 10^{-8} \text{ cm} \quad (P \text{ in Volt}).$$

Siccome non è quasi mai possibile utilizzare altro che elettroni che hanno subito una differenza di potenziale di almeno una decina di Volt, vedete che la lunghezza d'onda prevista dalla teoria è al massimo dell'ordine di  $10^{-8}$  cm, cioè dell'ordine di un Ångström, che è anche l'ordine di grandezza delle lunghezze d'onda dei raggi  $X$ .

Siccome la lunghezza d'onda dell'onda degli elettroni è dell'ordine di quella dei raggi  $X$ , ci si deve aspettare che i cristalli possano causare diffrazione di queste onde in modo completamente analogo al fenomeno di Laue.<sup>75</sup> Permettetemi di ricordarvi in che cosa consiste il fenomeno di Laue. Un cristallo naturale, come per esempio il salgemma, contiene nodi costituiti dagli atomi delle sostanze che formano il cristallo e che sono disposti in modo regolare a distanze dell'ordine di un Ångström. Questi nodi agiscono come centri diffusori per le onde e se il cristallo è illuminato da onde, la cui lunghezza d'onda è pure dell'ordine di un Ångström, le onde diffuse dai vari nodi sono in concordanza di fase in certe direzioni ben definite e in queste direzioni l'intensità totale diffusa mostra un massimo pronunciato. La disposizione di questi massimi di diffusione è data dalla teoria matematica, oggi ben nota e

---

<sup>75</sup> Max Theodor Felix von Laue (1879–1960), premio Nobel per la fisica nel 1914 per gli studi di diffrazione dei raggi  $X$  da parte di cristalli.

sviluppata da von Laue e Bragg,<sup>76</sup> che definisce la posizione dei massimi in funzione della spaziatura dei nodi nel cristallo e della lunghezza d'onda dell'onda incidente.<sup>77</sup> Per i raggi  $X$  questa teoria è stata magnificamente confermata da von Laue, Friedrich e Knipping<sup>78</sup> e da allora la diffrazione dei raggi  $X$  nei cristalli è diventata un'esperienza banale.<sup>79</sup> La misura accurata delle lunghezze d'onda dei raggi  $X$  è basata sulla diffrazione: c'è forse bisogno di ricordarlo nel paese in cui Siegbahn e collaboratori continuano il loro bel lavoro?<sup>80</sup>

Per i raggi  $X$  il fenomeno della diffrazione da parte di cristalli era una naturale conseguenza dell'idea che i raggi  $X$  sono onde analoghe alla luce e ne differiscono solo per una lunghezza d'onda più piccola. Per gli elettroni nulla di simile poteva essere previsto fino a che l'elettrone veniva considerato come una semplice particella. Ma se si ammette che l'elettrone sia associato a un'onda e che la densità di una nuvola di elettroni sia misurata dall'intensità dell'onda associata, allora si deve prevedere per gli elettroni un fenomeno analogo a quello di Laue. L'onda dell'elettrone sarà in realtà diffusa intensamente nelle direzioni che possono essere calcolate per mezzo della teoria di Laue-Bragg a partire dalla lunghezza d'onda  $\lambda = h/mv$ , che corrisponde alla velocità  $v$  nota dell'elettrone che incide sul cristallo. Siccome, secondo il nostro principio generale, l'intensità dell'onda diffusa è una misura della densità della nuvola di elettroni diffusi, ci dobbiamo aspettare di trovare moltissimi elettroni diffusi nella direzione dei massimi. Se il fenomeno esiste davvero, dovrebbe fornire una prova sperimentale decisiva in favore dell'esistenza di un'onda associata con l'elettrone di lunghezza d'onda  $h/mv$  e quindi l'idea fondamentale della

---

<sup>76</sup> De Broglie usa il termine diffusione per indicare quello che in realtà è il fenomeno della diffrazione da parte di un cristallo: esso d'altra parte risulta dalla ricostruzione di un fronte d'onda coerente mediante sovrapposizione di tutte le onde diffuse dai vari nodi. Le leggi di tale diffrazione sono state definite dai Bragg. In seguito al lavoro di Laue, William Henry Bragg (1862–1942), col figlio William Lawrence (1890–1971), si dedicò allo studio della struttura cristallina mediante i raggi  $X$ . W.H.Bragg e W.L.Bragg: *The structure of diamond [La struttura del diamante]*, Nature **91** (1913) 557. Entrambi i Bragg ricevettero il premio Nobel nel 1915.

<sup>77</sup> L' $n$ -esimo massimo per una radiazione di lunghezza d'onda  $\lambda$  è dato dalla relazione:

$$2d \sin \theta = n\lambda,$$

dove  $d$  è la spaziatura dei piani cristallini responsabili della diffrazione e  $\theta$  è l'angolo che il fascio primario e il fascio diffratto formano con detti piani.

<sup>78</sup> Walter Friedrich, Paul Knipping e Max von Laue: *Interferenzerscheinungen bei Röntgenstrahlen [Fenomeni di interferenza con i raggi Röntgen]*, Sitzberichte der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften (München) (1912) pp. 303–322.

<sup>79</sup> Il comportamento ondulatorio delle particelle è alla base di moderne tecniche di indagine sulla struttura della materia. Basta ricordare il microscopio elettronico, la diffrazione di neutroni e gli studi sulle particelle elementari compiuti con gli acceleratori di particelle.

<sup>80</sup> Manne Karl Siegbahn (1886–1978) fu insignito nel 1925 del premio Nobel per la fisica del 1924 per i suoi studi sui raggi  $X$  e da allora fino al 1964 fu direttore del Nobel Institute of Physics.

meccanica ondulatoria riposerà su basi sperimentali solide.

Ora, l'esperimento, che è il giudice sovrano delle teorie, ha mostrato che il fenomeno della diffrazione elettronica da parte di cristalli esiste davvero e obbedisce esattamente e quantitativamente alle leggi della meccanica ondulatoria. A Davisson e a Germer, che lavorano ai Laboratori Bell a New York, spetta l'onore di avere osservato per primi il fenomeno con un metodo analogo a quello di von Laue per i raggi  $X$ . Rifacendo lo stesso esperimento, ma sostituendo il cristallo singolo con polvere cristallina secondo il metodo inaugurato per i raggi  $X$  da Debye e Scherrer,<sup>81</sup> il professor G.P.Thomson di Aberdeen, figlio del famoso fisico di Cambridge Sir J.J.Thomson, trovò gli stessi fenomeni. Poi Rupp in Germania, Kikuchi in Giappone, Ponte in Francia e altri ancora li riprodussero variando le condizioni sperimentali. Oggi, l'esistenza del fenomeno è fuori ogni dubbio e le piccole difficoltà di interpretazione sollevate dai primi esperimenti di Davisson e Germer sembrano risolte in modo soddisfacente.

Rupp<sup>82</sup> è perfino riuscito a mettere in evidenza la diffrazione degli elettroni in una forma particolarmente impressionante. Conoscete quelli che vengono indicati come reticoli in ottica: si tratta di superfici di vetro o di metallo, piane o leggermente curve, su cui sono stati tracciati meccanicamente dei tratti equidistanti, la cui spaziatura è confrontabile con l'ordine di grandezza delle lunghezze d'onda delle onde luminose. Le onde diffratte da questi tratti interferiscono e l'interferenza dà origine a massimi di luce diffratta in certe direzioni che dipendono dalla spaziatura dei tratti, dalla direzione di incidenza della luce sul reticolo e dalla lunghezza d'onda di questa luce. Per lungo tempo fu impossibile ottenere simili fenomeni con questo tipo di reticoli di diffrazione costruiti per mano dell'uomo utilizzando raggi  $X$  al posto della luce. La ragione stava nel fatto che la lunghezza d'onda dei raggi  $X$  è molto più piccola di quella della luce e nessuno strumento è in grado di tracciare su una superficie tratti con spaziatura dell'ordine di grandezza delle lunghezze d'onda dei raggi  $X$ . Alcuni fisici d'ingegno (Compton, J.Thibaud) hanno saputo trovare il modo per superare la difficoltà. Prendiamo un reticolo di diffrazione ottica ordinario e osserviamolo quasi tangenzialmente alla sua superficie. I tratti del reticolo ci appariranno molto più vicini tra di loro di quanto lo siano in realtà. Per raggi  $X$  che incidano quasi sfiorando il reticolo l'effetto sarà quello di tratti disposti molto vicini e si potrà verificare un fenomeno di diffrazione analogo a quello della luce. Ciò è quanto i succitati fisici hanno verificato. Ma allora, siccome le lunghezze d'onda degli elettroni sono dell'ordine di quelle dei raggi  $X$ , deve

---

<sup>81</sup> Petrus Josephus Debye (1884–1966) e Paul Scherrer (1890–1969): *Interferenzen an regellos orientierten Teilchen im Röntgenlicht [Interferenze di luce Röntgen prodotte da particelle casualmente orientate]*, Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1916) pp. 1-15, 16–26.

<sup>82</sup> Emil Rupp: *Über Elektronenbeugung an einem geritzten Gitter [Diffrazione di elettroni da parte di un reticolo a incisione]*, Zeitschrift für Physik **52** (1928) 8–15.

essere anche possibile ottenere fenomeni di diffrazione dirigendo un fascio di elettroni su un reticolo di diffrazione ottico ad un angolo molto basso. Rupp riuscì in questo scopo e fu così in grado di misurare la lunghezza d'onda delle onde elettroniche confrontandola direttamente con la spaziatura dei tratti incisi meccanicamente sul reticolo.<sup>83</sup>

Perciò per descrivere le proprietà della materia come quelle della luce, ci si deve riferire a onde e particelle allo stesso tempo. L'elettrone non può più essere concepito come un semplice granellino di elettricità; esso deve essere associato a un'onda e quest'onda non è un mito; se ne può misurare la lunghezza d'onda e se ne possono prevedere le interferenze. È stato così possibile prevedere un'intera classe di fenomeni prima di averli effettivamente scoperti. Ed è su questa idea della dualità di onde e particelle in Natura, espressa in una forma più o meno astratta, che si è fondato l'intero sviluppo recente della fisica teorica e su cui sembra si debba fondare lo sviluppo futuro di questa scienza.

---

<sup>83</sup> Misurando l'angolo  $\theta$  tra la direzione degli elettroni incidenti e il piano del reticolo e l'angolo di diffrazione  $\alpha$ , la relazione  $n\lambda = \frac{1}{2}d(\alpha + 2\theta)$  permette di conoscere la lunghezza d'onda  $\lambda$  degli elettroni diffratti all'ordine  $n$  se si conosce la distanza  $d$  tra le linee incise del reticolo. Rupp ottenne errori compresi tra 2% e 3% nella misura di  $\lambda = 1 \text{ \AA}$  per elettroni da 150 eV.

QUADERNI DI FISICA TEORICA  
Collana curata da Sigfrido Boffi

1. Le onde di de Broglie
2. Onde di materia e onde di probabilità
3. Il principio di indeterminazione
4. La meccanica delle onde
5. Paradosso EPR e teorema di Bell
6. I cammini di Feynman
7. L'interpretazione statistica della meccanica quantistica
8. L'origine delle statistiche quantistiche
9. Le radici della quantizzazione
10. La fase di Berry



## QUADERNI DI FISICA TEORICA

Collana curata da Sigfrido Boffi

Dopo un primo biennio, in cui ha rivisto con maggiori dettagli e approfondimenti lo sviluppo della fisica classica e ha imparato a destreggiarsi con alcuni aspetti del formalismo matematico necessario, lo studente del Corso di Laurea in Fisica è costretto ad affrontare un nuovo modo di descrivere la natura che ormai il ricercatore professionale ha fatto suo da oltre mezzo secolo, ma che tuttora risulta estraneo al cosiddetto senso comune. L'impatto è principalmente difficile nel corso di Istituzioni di Fisica Teorica, che è tradizionalmente dedicato all'esposizione dei metodi teorici della meccanica quantistica così come si sono sviluppati nella prima metà del nostro secolo. Sembra perciò utile proporre, con questa collana di "*Quaderni di Fisica Teorica*," un tema, o un autore, attraverso la lettura commentata di uno o più articoli originali. Lo studente si accorgerà allora che le teorie organicamente presentate nei suoi manuali, necessarie per la pratica scientifica attuale, sono piuttosto il risultato di un lungo travaglio di idee, tentativi, successi, difficoltà, e infine di scelte, che sono sempre presenti nell'avventura dell'uomo animato dal desiderio invincibile di capire. Sarà dunque preparato, al termine dei suoi studi durante i quali si è impadronito in breve tempo dei risultati fondamentali ottenuti nell'arco di secoli, ad affrontare a sua volta, come giovane ricercatore, un cammino pieno di trabocchetti, ma anche ricco di soddisfazioni.

## LE ONDE DI DE BROGLIE

L'ipotesi di de Broglie sulla natura ondulatoria degli elettroni ha rappresentato una svolta nel pensiero scientifico indirizzandolo a introdurre, sia per la materia che per le radiazioni, le nozioni di corpuscolo e di onda allo stesso tempo. De Broglie ha saputo corroborare la sua ipotesi mediante un approfondimento delle analogie esistenti tra la descrizione classica del moto di una particella e quella della propagazione ondulatoria. In questo quaderno vengono presentati in lingua italiana e commentati un suo lavoro che riassume e anticipa le idee esposte nella celebre tesi del 1924 e il discorso da lui tenuto in occasione del ricevimento del premio Nobel per la Fisica del 1929.