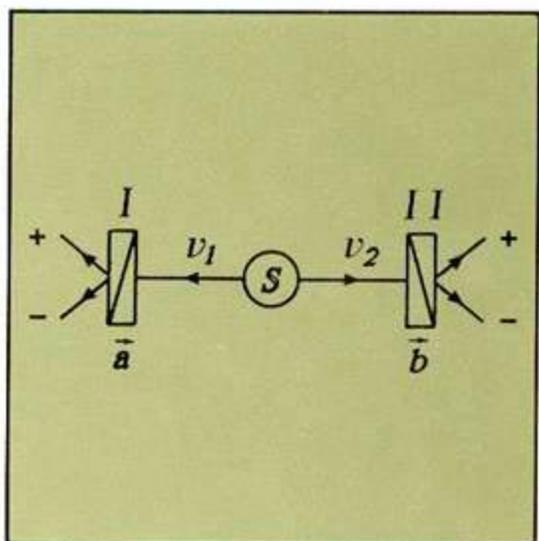


Oreste Nicosini

# PARADOSSO EPR e TEOREMA DI BELL



QUADERNI DI FISICA TEORICA



Università degli Studi di Pavia

Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

QUADERNI DI FISICA TEORICA  
Collana curata da Sigfrido Boffi

Comitato Scientifico

Bruno Bertotti  
Sigfrido Boffi  
Italo Guarneri  
Alberto Rimini  
Marco Roncadelli

Prima edizione: febbraio 1991

Edizione web: novembre 2002

ISBN 88-85159-05-2

## INDICE

Premessa .....	7
§1. Introduzione .....	9
§2. Non separabilità quantistica .....	11
— Può la descrizione quantomeccanica della realtà fisica essere considerata completa? .....	15
§3. Stati puri e miscele quantistiche .....	23
§4. Versione moderna del paradosso EPR .....	30
— Sul paradosso Einstein Podolsky Rosen .....	37
§5. Considerazioni generali sulle verifiche sperimentali delle disuguaglianze di Bell .....	47
— Verifiche sperimentali delle disuguaglianze di Bell in fisica atomica .....	51
§6. Teorema di Bell ed esperimenti .....	79
§7. Conclusioni .....	80

## PREMESSA

La peculiarità più importante e stupefacente della meccanica quantistica è il suo indeterminismo, cioè la sua incapacità di principio di dare previsioni certe per i risultati dei singoli esperimenti.

Nel presente Quaderno, attraverso l'esame dei lavori teorici originali di Einstein - Podolsky - Rosen e di Bell e di quelli sperimentali di Aspect e collaboratori, è presentato lo sviluppo storico del dibattito che ha portato alla conclusione che la visione del mondo realista, determinista e locale della scienza della fine del secolo scorso non può essere mantenuta alla luce delle conoscenze attuali.

L'autore è grato al Prof. S. Boffi per l'incoraggiamento ricevuto e per la lettura critica del manoscritto preliminare e al Prof. A. Rimini per le numerose e illuminanti discussioni sui fondamenti della meccanica quantistica. L'autore ringrazia inoltre sig. G. Bonaschi per aver curato la parte grafica.

## §1. Introduzione

Fin dalla sua nascita, la meccanica quantistica ha posto seri problemi di interpretazione che ancora oggi sono oggetto di dibattito. La sua caratteristica più appariscente consiste nel fatto che, in generale, essa non è in grado di fornire previsioni certe per i risultati dei singoli esperimenti: tutto quello che può fare è assegnare, per ciascun possibile risultato, un ben preciso valore alla probabilità che esso si verifichi. Inoltre questo suo "indeterminismo" sembra assolutamente ineliminabile e non legato alla nostra ignoranza sul sistema come in fisica classica.

Di fronte al nuovo quadro teorico, i fisici hanno fornito varie spiegazioni che, a grandi linee, si possono raggruppare in due correnti di pensiero. La prima corrente, cui appartiene la maggior parte dei fisici, fa capo alla scuola di Copenhagen. Secondo questa corrente l'obiettivo di una teoria fisica non è la descrizione di una realtà oggettiva indipendente dall'osservatore, ma la previsione dei risultati degli esperimenti. La seconda corrente privilegia invece l'aspetto descrittivo di una teoria rispetto a quello predittivo. In altri termini i fisici appartenenti a tale corrente richiedono che una teoria, oltre che fornire previsioni sul comportamento dei sistemi fisici, sia anche in grado di dare un'immagine di ciò che accade. In particolare i sostenitori di questo punto di vista per molto tempo hanno pensato che l'indeterminismo quantistico fosse il segnale dell'incompletezza della meccanica quantistica, rifiutando l'idea che la realtà fosse intrinsecamente non deterministica. Essi sostenevano che dovesse esistere un livello più profondo di quello descritto dalla meccanica quantistica, dove il mondo tornasse ad essere deterministico. L'indeterminismo nascerebbe, secondo loro, dal fatto che la meccanica quantistica non tiene conto di gradi di libertà addizionali, le cosiddette variabili nascoste, noti i quali la descrizione sarebbe completamente deterministica. L'inconoscibilità di principio delle variabili nascoste assicurerebbe da una parte il comportamento stocastico rilevato per i micro oggetti, dall'altra l'esistenza di una sottostruttura deterministica.

È in questo contesto che si inserisce il famoso lavoro di Einstein, Podolsky e Rosen del 1935. Einstein e collaboratori possono senz'altro essere inquadrati nella seconda delle correnti di pensiero su citate. Ebbene, in quel lavoro gli autori dimostrano

che assumendo due principi, che indichiamo come principio di realtà e principio di località (vedremo in dettaglio la loro formulazione), il formalismo della meccanica quantistica porta a una contraddizione, a meno che non si ammetta l'esistenza delle variabili nascoste. Ad Einstein e colleghi i due principi appaiono così naturali da non essere assolutamente discutibili. In realtà il dibattito degli anni seguenti ha mostrato che probabilmente quei due principi non sono così naturali come sembrerebbe a prima vista.

Per diversi anni la discussione sull'interpretazione della meccanica quantistica è proseguita senza sostanziali novità fino a quando, nel 1964, Bell ha pubblicato un lavoro di fondamentale importanza, ancora oggi oggetto di studio e sperimentazione. Bell dimostra che se esiste una teoria più fondamentale della meccanica quantistica che sia realistica e deterministica e soddisfi a un requisito di località molto debole, allora devono esistere, in certe condizioni, dei limiti particolari alle correlazioni tra sistemi microscopici separati spazialmente. Nelle condizioni prescritte dal teorema di Bell la meccanica quantistica viola tali limiti. Si può di conseguenza concludere che le teorie a variabili nascoste locali non possono essere equivalenti alla meccanica quantistica e tantomeno costituire il suo completamento deterministico.

Il lavoro di Bell mostra in sostanza che meccanica quantistica e teorie a variabili nascoste locali sono due quadri teorici antitetici. Restava a quel punto da stabilire quale delle due descrizioni fosse corretta. Va infatti osservato che il grande numero di conferme sperimentali della meccanica quantistica non è in grado di discriminare tra questa e un'eventuale teoria a variabili nascoste, perché la differenza tra le due può essere evidenziata solo in condizioni estreme. Allo scopo di verificare, o falsificare, le disuguaglianze di Bell sono quindi stati progettati ed eseguiti numerosi esperimenti, i più recenti e completi dei quali sono quelli di Aspect e collaboratori. Gli esperimenti mostrano che, in quelle regioni critiche, le correlazioni violano i limiti imposti dal teorema di Bell, e precisamente come previsto dalla meccanica quantistica.

Questi risultati sperimentali, insieme alle disuguaglianze di Bell, possono essere interpretati come la falsificazione sperimentale di quella visione del mondo realista, determinista e locale cui era abituato lo scienziato degli inizi del nostro secolo, e portano

ad un complicato spettro di possibilità interpretative che in parte esamineremo alla fine del presente lavoro.

## §2. Non separabilità quantistica

Il problema della non separabilità quantistica<sup>1</sup> nasce dal fatto che l'equazione di Schrödinger

$$\hat{H} |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \quad (2.1)$$

è un'equazione lineare. Questo comporta che se  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  sono soluzioni, allora anche  $a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle$  è soluzione.

Siano per esempio  $U$  e  $V$  due *ensemble* di sistemi e  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  due osservabili rispettivamente di  $U$  e  $V$ . Siano inoltre  $\{|a_n\rangle\}$  e  $\{|b_n\rangle\}$  le autofunzioni di  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ . Supponiamo che inizialmente l'insieme  $U$  sia descritto dallo stato  $|a_i\rangle$  appartenente allo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}^{(U)}$  e analogamente l'insieme  $V$  dallo stato  $|b_0\rangle$  dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}^{(V)}$ . Assumiamo inoltre che l'interazione tra i sistemi di  $U$  e  $V$  sia descrivibile nel modo seguente:<sup>2</sup>

$$|a_i\rangle|b_0\rangle \rightarrow |a_i\rangle|b_i\rangle. \quad (2.2)$$

L'evoluzione lineare definita dalla (2.2) apparentemente non pone problemi, nel senso che sia lo stato iniziale che quello finale, appartenenti allo spazio di Hilbert prodotto tensoriale degli spazi associati a ciascun sistema componente  $\mathcal{H}^{(U)} \otimes \mathcal{H}^{(V)}$ , descrivono stati ben definiti, oltre che per il sistema composto, anche per i sottosistemi componenti. L'evoluzione così schematizzata si può interpretare dicendo che l'interazione tra i due sistemi ha come effetto il cambiare il valore dell'osservabile  $\hat{B}$  dei sistemi appartenenti a  $V$ , lasciando invariato il valore dell'osservabile  $\hat{A}$  dei sistemi di  $U$ .

Supponiamo ora che lo stato iniziale dei sistemi di  $U$  non sia descritto da un autostato di  $\hat{A}$ , bensì da un autostato di un'altra

<sup>1</sup> B. d'Espagnat, "Conceptual Foundations of Quantum Mechanics", W. A. Benjamin INC., Menlo Park, California (1976).

<sup>2</sup> L'interazione è descritta in modo drasticamente semplificato, ma questo non inficia le conclusioni.

osservabile  $\hat{A}'$  che non commuti con  $\hat{A}$ . Possiamo allora espandere tale stato sulla base degli autostati di  $\hat{A}$  e ottenere di conseguenza per lo stato iniziale dei sistemi di  $U$  l'espressione

$$|a'_i\rangle = \sum_k c_{ik} |a_k\rangle. \quad (2.3)$$

Si osservi che lo stato (2.3), pur essendo una sovrapposizione di autostati dell'osservabile  $\hat{A}$  relativi ad autovalori diversi, è comunque uno stato fisico ben definito per i sistemi di  $U$ , essendo in particolare lo stato in cui l'osservabile  $\hat{A}'$  possiede il valore  $a'_i$ .

L'evoluzione lineare (2.2) a partire da tale stato iniziale può essere scritta come

$$|a'_i\rangle|b_0\rangle \rightarrow \sum_k c_{ik} |a_k\rangle|b_k\rangle. \quad (2.4)$$

È chiaro che la (2.4), diversamente dalla (2.2), pone in generale seri problemi interpretativi. Lo stato iniziale del sistema composto  $U + V$  è uno stato *fattorizzato*, quindi ciascuno dei sistemi componenti si trova in uno stato ben preciso, con ben definiti valori delle osservabili. Viceversa lo stato finale è *non fattorizzato*, essendo combinazione lineare di stati fattorizzati: di conseguenza non è possibile attribuire ai sottosistemi componenti né un vettore di stato né valori definiti delle osservabili, nonostante essi non siano più interagenti.

Vediamo più in dettaglio quando l'evoluzione (2.4) porta a conclusioni problematiche.

#### *Un componente microscopico, l'altro macroscopico*

Supponiamo che i sistemi di  $U$  siano sistemi microscopici e quelli di  $V$  macroscopici: per esempio i sistemi di  $V$  sono apparecchi che misurano l'osservabile  $\hat{A}$  dei sistemi di  $U$ . Allora lo stato non fattorizzato a destra dell'evoluzione (2.4)

$$\sum_k c_{ik} |a_k\rangle|b_k\rangle$$

è una sovrapposizione di stati dell'apparecchio di misurazione ( $|b_k\rangle$ ) ciascuno con l'indicatore in posizioni macroscopicamente distinte. Esso è evidentemente in contrasto sia con la nostra

esperienza riguardo il comportamento dei corpi macroscopici che con il postulato di riduzione del pacchetto d'onde, secondo cui, dopo l'interazione tra il sistema microscopico e l'apparecchio di misurazione, il sistema composto dai due non è descritto dallo stato puro di cui sopra, bensì dagli stati  $|a_k\rangle|b_k\rangle$  con probabilità  $|c_{ik}|^2$ .

Il problema appena descritto è oggetto delle "teorie della misurazione quantistica": non ce ne occuperemo in questa sede.<sup>3</sup>

### *Componenti microscopici lontani*

E' ragionevole pensare che due microoggetti sufficientemente lontani non interagiscano. Sorge allora spontanea la domanda "Come è possibile che due sistemi non interagenti non siano ciascuno in un ben preciso stato?". Inoltre se si effettua, ad esempio, una misura dell'osservabile  $\hat{A}$  relativa al sistema  $U$ , il postulato di riduzione prevede, all'atto della misurazione, la transizione dallo stato puro alla miscela corrispondente:

$$\sum_k c_{ik} |a_k\rangle |b_k\rangle \rightarrow |a_k\rangle |b_k\rangle, |c_{ik}|^2.$$

Come risultato della misurazione effettuata su  $U$ , lo stato di  $V$  viene quindi modificato. "Come è possibile che una misurazione effettuata su  $U$  abbia influenza su  $V$  anche in assenza di interazione?"

L'insieme di queste considerazioni porta a sospettare che, in generale, quando due sistemi abbiano interagito nel passato, non sia possibile attribuire a ciascuno di essi uno stato definito. In corrispondenza a questo fatto, è anche lecito sospettare che non sia possibile attribuire a ciascun sistema valori definiti, anche se eventualmente non noti, per un sistema completo di osservabili compatibili associate a quel particolare sistema considerato come a sé stante. Comunque, fintantoché ci si attenga alle semplici argomentazioni di cui sopra, tali conclusioni non possono essere considerate definitive, a causa del fatto che il vettore di stato del sistema composto  $U + V$  è essenzialmente solo un elemento del formalismo matematico. In particolare, non è detto, almeno per ora, che tale vettore di stato sia in corrispondenza biunivoca con

<sup>3</sup> Si veda nota 1 pag. 11.

la “realtà fisica” dei sistemi (qualunque significato si attribuisca a questa espressione). Come spesso accade in fisica (ricordiamo le distribuzioni di probabilità classiche), potrebbe essere, ad esempio, che diversi vettori di stato corrispondano alle stesse condizioni fisiche, e che la differenza tra loro rifletta semplicemente le differenze in conoscenza degli utilizzatori.

In definitiva, si può affermare che, nel contesto della meccanica quantistica convenzionale, quando due sistemi quantistici, ciascuno dei quali sia originariamente caratterizzato da un insieme completo di proprietà definite, una volta che abbiano interagito non è più possibile, in generale, pensare a ciascuno di essi come dotato di un insieme completo di proprietà definite. Qui le parole “proprietà definite” significano esattamente valori specifici delle osservabili associate solamente a quel sistema e indipendenti da futuri esperimenti sul sistema stesso. Il punto importante su questa conclusione è che essa continua a valere anche per sistemi che abbiano interagito ma che non interagiscano più al tempo in cui vengano considerati. Questa è l'essenza di ciò che a volte è detta “non separabilità quantistica” dei sistemi.

## Può la descrizione quantomeccanica della realtà fisica essere considerata completa?†

In una teoria completa c'è un elemento corrispondente a ogni elemento di realtà. Una condizione sufficiente per la realtà di una quantità fisica è la possibilità di prevederne il valore con certezza, senza disturbare il sistema. In meccanica quantistica nel caso di due quantità fisiche descritte da operatori non commutanti, la conoscenza di una preclude la conoscenza dell'altra. Allora o (1) la descrizione della realtà data dalla funzione d'onda in meccanica quantistica non è completa oppure (2) queste due quantità non possono avere realtà simultanea. Prendere in considerazione il problema di fare previsioni riguardanti un sistema sulla base di misurazioni effettuate su un altro sistema che abbia interagito in precedenza con esso porta al risultato che se (1) è falsa allora anche (2) è falsa. Si è pertanto portati a concludere che la descrizione della realtà come data dalla funzione d'onda non è completa.

### 1.

Ogni seria considerazione di una teoria fisica deve tener conto della distinzione tra la realtà oggettiva, che è indipendente da ogni teoria, e i concetti fisici con i quali la teoria opera. Si intende che questi concetti corrispondono alla realtà oggettiva, e per mezzo di questi concetti noi ci costruiamo una descrizione della realtà.

Nel tentativo di giudicare il successo di una teoria fisica, dobbiamo porci due domande: (1) "La teoria è corretta?" e (2) "La descrizione fornita dalla teoria è completa?". È solo nel caso in cui si possano dare risposte positive a entrambe queste domande, che i concetti della teoria si possono dire soddisfacenti. La correttezza della teoria è giudicata dal grado di accordo tra le conclusioni della teoria e l'esperienza umana. Questa esperienza, che da sola ci rende in grado di operare inferenze circa la realtà, in fisica assume la forma di esperimento e misurazione. Noi qui

---

† di A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, Istituto di Studi Avanzati, Princeton, New Jersey. Testo ricevuto dalla rivista il 25 Marzo 1935 e pubblicato su *Physical Review* 47 (1935) 777-780.

desideriamo prendere in considerazione la seconda domanda, in quanto applicata alla meccanica quantistica.

Qualunque sia il significato attribuito al termine *completo*, la seguente richiesta perché una teoria sia completa sembra essere una richiesta necessaria: *ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica*. Noi chiameremo questa la condizione di completezza. La seconda domanda ottiene quindi facilmente risposta, non appena siamo in grado di decidere quali sono gli elementi della realtà fisica.

Gli elementi della realtà fisica non possono essere determinati da considerazioni filosofiche *a priori*, ma si devono trovare facendo riferimento ai risultati di esperimenti e misurazioni. Una definizione pregnante di realtà è, comunque, non necessaria per il nostro scopo. Ci riterremo soddisfatti del seguente criterio, che consideriamo ragionevole. *Se, senza disturbare in nessun modo un sistema, possiamo prevedere con certezza (cioè con probabilità unitaria) il valore di una quantità fisica, allora esiste un elemento di realtà fisica corrispondente a questa quantità fisica*. Ci sembra che questo criterio, sebbene lungi dall'esaurire tutti i modi possibili per riconoscere una realtà fisica, ci fornisca almeno un modo, quando le condizioni poste in esso criterio si verificano. Considerato non come condizione necessaria di realtà, ma soltanto come condizione sufficiente, questo criterio è in accordo con le idee di realtà sia della meccanica classica che della meccanica quantistica.

Allo scopo di illustrare le idee coinvolte prendiamo in considerazione la descrizione quantomeccanica del comportamento di una particella dotata di un solo grado di libertà. Il concetto fondamentale della teoria è il concetto di *stato*, che si suppone completamente caratterizzato dalla funzione d'onda  $\psi$ , che è una funzione delle variabili scelte per descrivere il comportamento della particella. In corrispondenza a ciascuna quantità fisicamente osservabile  $A$  c'è un operatore, che può essere indicato dalla medesima lettera.

Se  $\psi$  è un'autofunzione dell'operatore  $A$ , cioè se

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi, \quad (1)$$

dove  $a$  è un numero, allora la quantità fisica  $A$  ha con certezza il valore  $a$  quando la particella si trova nello stato dato da  $\psi$ . In

accordo con il nostro criterio di realtà, per una particella nello stato dato da  $\psi$  per cui valga l'Eq. (1), c'è un elemento di realtà fisica corrispondente alla quantità fisica  $A$ . Sia, per esempio,

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x}, \quad (2)$$

dove  $h$  è la costante di Planck,  $p_0$  è una costante numerica e  $x$  la variabile indipendente. Poiché l'operatore corrispondente all'impulso della particella è

$$p = (h/2\pi i)\partial/\partial x, \quad (3)$$

otteniamo

$$\psi' = p\psi = (h/2\pi i)\partial\psi/\partial x = p_0\psi. \quad (4)$$

Pertanto, nello stato dato dall'Eq. (2), l'impulso ha certamente il valore  $p_0$ . Ha quindi significato dire che l'impulso della particella nello stato dato dall'Eq. (2) è reale.

D'altra parte se l'Eq. (1) non valesse, non potremmo più dire che la quantità fisica  $A$  possiede un valore particolare. Questo è il caso, per esempio, della coordinata della particella. L'operatore ad essa corrispondente, diciamo  $q$ , è l'operatore di moltiplicazione per la variabile indipendente. Quindi,

$$q\psi = x\psi \neq a\psi. \quad (5)$$

In accordo con la meccanica quantistica possiamo solamente dire che la probabilità relativa che una misurazione della coordinata fornisca un risultato compreso tra  $a$  e  $b$  è

$$P(a, b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi dx = \int_a^b dx = b - a. \quad (6)$$

Siccome questa probabilità è indipendente da  $a$ , ma dipende solo dalla differenza  $b - a$ , vediamo che tutti i valori della coordinata sono equiprobabili.

Un valore definito della coordinata, per una particella nello stato dato dall'Eq. (2), è pertanto imprevedibile, ma può essere ottenuto solamente da una misurazione diretta. Tale misurazione comunque disturba la particella e quindi altera il suo stato. Dopo la determinazione della coordinata la particella non si troverà più

nello stato dato dall'Eq. (2). La conclusione che di solito da ciò si trae in meccanica quantistica è che *quando l'impulso di una particella è noto, la sua coordinata non possiede realtà fisica.*

Più in generale, si mostra in meccanica quantistica che, se gli operatori che corrispondono a due quantità fisiche, diciamo  $A$  e  $B$ , non commutano, cioè se  $AB \neq BA$ , allora la conoscenza precisa di una di esse preclude tale conoscenza dell'altra. Di più, ogni tentativo di determinare l'una sperimentalmente altererà lo stato del sistema in modo tale da distruggere la conoscenza dell'altra.

Da questo segue che o (1) *la descrizione quantomeccanica della realtà data dalla funzione d'onda non è completa* oppure (2) *quando gli operatori che corrispondono a due quantità fisiche non commutano le due quantità non possono avere realtà simultanea.* Perché se entrambe avessero realtà simultanea - e quindi valori definiti - questi valori entrerebbero nella descrizione completa, in accordo con la condizione di completezza. Se quindi la funzione d'onda fornisse tale descrizione completa della realtà, dovrebbe contenere questi valori; questi sarebbero allora predicibili. Poiché la situazione non è questa, non ci rimangono che le alternative formulate.

In meccanica quantistica solitamente si assume che la funzione d'onda *contenga* una descrizione completa della realtà fisica del sistema nello stato cui essa corrisponde. A prima vista questa assunzione è assolutamente ragionevole, perché l'informazione che si può ottenere da una funzione d'onda sembra corrispondere esattamente a ciò che può essere misurato senza alterare lo stato del sistema. Noi mostreremo, comunque, che questa assunzione, insieme al criterio di realtà dato sopra, porta a una contraddizione.

## 2.

A questo scopo supponiamo di avere due sistemi, I e II, cui permettiamo di interagire da  $t = 0$  a  $t = T$ , e che dopo tale tempo non ci sia più alcuna interazione tra le due parti. Supponiamo inoltre che gli stati dei due sistemi prima di  $t = 0$  fossero noti. Allora possiamo calcolare con l'aiuto dell'equazione di Schödinger lo stato del sistema composto I+II ad ogni tempo successivo; in particolare, per ogni  $t > T$ . Indichiamo la corrispondente funzione

d'onda con  $\Psi$ . Non possiamo, comunque, calcolare lo stato in cui ciascuno dei due sistemi si trova dopo l'interazione. Questo, in accordo con la meccanica quantistica, può essere fatto solo con l'aiuto di ulteriori misurazioni, mediante un processo noto come *riduzione del pacchetto d'onda*. Prendiamo in considerazione gli elementi essenziali di questo processo.

Siano  $a_1, a_2, a_3, \dots$  gli autovalori di una quantità fisica  $A$  relativa al sistema I e  $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \dots$  le corrispondenti autofunzioni, dove  $x_1$  rappresenta le variabili usate per descrivere il primo sistema. Allora  $\Psi$ , considerata come funzione di  $x_1$ , può essere espressa come

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \quad (7)$$

dove  $x_2$  rappresenta le variabili usate per descrivere il secondo sistema. Qui  $\psi_n(x_2)$  devono essere meramente considerate come i coefficienti dell'espansione di  $\Psi$  in una serie di funzioni ortogonali  $u_n(x_1)$ . Supponiamo ora che la quantità  $A$  venga misurata e che si trovi che ha il valore  $a_k$ . Allora si conclude che dopo la misurazione il primo sistema si trova nello stato dato dalla funzione d'onda  $u_k(x_1)$ , e che il secondo sistema si trova nello stato dato dalla funzione d'onda  $\psi_k(x_2)$ . Questo è il processo di riduzione del pacchetto d'onda; il pacchetto d'onda dato dalla serie infinita (7) è ridotto a un singolo termine  $\psi_k(x_2) u_k(x_1)$ .

L'insieme di funzioni  $u_n(x_1)$  è determinato dalla scelta della quantità fisica  $A$ . Se, invece di questa, avessimo scelto un'altra quantità, diciamo  $B$ , con autovalori  $b_1, b_2, b_3, \dots$  e autofunzioni  $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \dots$  avremmo ottenuto, invece dell'Eq. (7), l'espansione

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \phi_s(x_2) v_s(x_1), \quad (8)$$

dove  $\phi_s$ 's sono i nuovi coefficienti. Se ora si misura la quantità  $B$  e si trova che ha il valore  $b_r$ , concludiamo che dopo la misurazione il primo sistema si trova nello stato dato da  $v_r(x_1)$  e il secondo sistema nello stato dato da  $\phi_r(x_2)$ .

Vediamo pertanto che, come conseguenza di due misurazioni differenti operate sul primo sistema, il secondo sistema può trovarsi in stati descritti da due differenti funzioni d'onda. D'altra

parte, poiché al momento della misurazione i due sistemi non interagiscono più, nessun cambiamento reale può aver luogo nel secondo sistema come conseguenza di qualunque cosa possa essere fatta al primo sistema. Questo è, naturalmente, la pura definizione di ciò che si intende con l'assenza di un'interazione tra i due sistemi. Dunque, è possibile assegnare due funzioni d'onda differenti (nel nostro esempio  $\psi_k$  e  $\phi_r$ ) alla medesima realtà (il secondo sistema dopo l'interazione con il primo).

Ora, può succedere che le due funzioni d'onda,  $\psi_k$  e  $\phi_r$ , siano autofunzioni di due operatori non commutanti corrispondenti a quantità fisiche  $P$  e  $Q$ , rispettivamente. Che questo possa essere effettivamente il caso può essere visto meglio con un esempio. Supponiamo che i due sistemi siano due particelle, e che

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \quad (9)$$

dove  $x_0$  è una costante. Sia  $A$  l'impulso della prima particella; allora, come abbiamo visto nell'Eq. (4), le sue autofunzioni saranno

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)px_1} \quad (10)$$

corrispondenti all'autovalore  $p$ . Siccome qui abbiamo a che fare con il caso di uno spettro continuo, ora l'Eq. (7) sarà

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp, \quad (11)$$

dove

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p}. \quad (12)$$

Questa  $\psi_p$  comunque è l'autofunzione dell'operatore

$$P = (h/2\pi i)\partial/\partial x_2, \quad (13)$$

corrispondente all'autovalore  $-p$  dell'impulso della seconda particella. D'altra parte, se  $B$  è la coordinata della prima particella, essa ha come autofunzioni

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x), \quad (14)$$

corrispondenti all'autovalore  $x$ , dove  $\delta(x_1 - x)$  è la ben nota delta di Dirac. L'Eq. (8) in questo caso diventa

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(x_2) v_x(x_1) dx, \quad (15)$$

dove

$$\phi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p} dp = h\delta(x - x_2 + x_0). \quad (16)$$

Questa  $\phi_x$ , comunque, è l'autofunzione dell'operatore

$$Q = x_2$$

corrispondente all'autovalore  $x + x_0$  della coordinata della seconda particella. Poiché

$$PQ - QP = h/2\pi i, \quad (18)$$

abbiamo mostrato che in generale è possibile per  $\psi_k$  e  $\phi_r$  essere autofunzioni di due operatori non commutanti, corrispondenti a quantità fisiche.

Ritornando ora al caso generale contemplato in Eq. (7) e (8), assumiamo che  $\psi_k$  e  $\phi_r$  siano in realtà autofunzioni di operatori non commutanti  $P$  e  $Q$ , corrispondenti agli autovalori  $p_k$  e  $q_r$ , rispettivamente. Pertanto, misurando  $A$  o  $B$  siamo in grado di prevedere con certezza, e senza disturbare in alcun modo il secondo sistema, o il valore della quantità  $P$  (cioè  $p_k$ ) o il valore della quantità  $Q$  (cioè  $q_r$ ). In accordo con il nostro criterio di realtà, nel primo caso dobbiamo considerare la quantità  $P$  come elemento di realtà, nel secondo caso è la quantità  $Q$  ad essere un elemento di realtà. Ma, come abbiamo visto, entrambe le funzioni d'onda  $\psi_k$  e  $\phi_r$  appartengono alla stessa realtà.

In precedenza abbiamo dimostrato che o (1) la descrizione quantomeccanica della realtà data dalla funzione d'onda non è completa oppure (2) quando gli operatori corrispondenti a due quantità fisiche non commutano le due quantità non possono avere realtà simultanea. Partendo quindi dall'assunzione che la funzione d'onda fornisca veramente una descrizione completa della realtà fisica, siamo arrivati alla conclusione che due quantità fisiche, con operatori non commutanti, possono avere realtà simultanea.

Pertanto la negazione di (1) conduce alla negazione della sola altra alternativa (2). Siamo quindi forzati a concludere che la descrizione quantomeccanica della realtà fisica data dalle funzioni d'onda non è completa.

Si potrebbe obiettare a questa conclusione sulla base del fatto che il nostro criterio di realtà non è sufficientemente restrittivo. In realtà, non si arriverebbe alla nostra conclusione se si insistesse sul fatto che due o più quantità fisiche possono essere riguardate come elementi simultanei di realtà *solo quando possono essere misurati o previsti simultaneamente*. Da questo punto di vista, poiché o l'una o l'altra, ma non entrambe simultaneamente, delle quantità  $P$  e  $Q$  possono essere previste, esse non sono simultaneamente reali. Questo fa sì che la realtà di  $P$  e  $Q$  dipenda dal processo di misurazione effettuato sul primo sistema, che non disturba il secondo sistema in alcun modo. Non ci si può aspettare nessuna definizione ragionevole di realtà che permetta questo.

Mentre dunque abbiamo mostrato che la funzione d'onda non fornisce una descrizione completa della realtà fisica, lasciamo aperta la questione se tale descrizione esista o no. Noi crediamo, comunque, che una tale teoria sia possibile.

### §3. Stati puri e miscele quantistiche

È opportuno precisare a questo punto i concetti di stato puro e miscela quantistica. Dato un insieme  $\mathcal{E}$  di sistemi quantistici  $S$ , l'insieme si dice in uno stato puro se tutti i sistemi ad esso appartenenti sono descritti da un unico stato  $|\psi\rangle = \sum_m c_m |\psi_m\rangle$ , dove  $|\psi_m\rangle$  sono i vettori di una base opportuna. Viceversa l'insieme è una miscela quantistica se è separabile in sottoinsiemi  $\mathcal{E}_n$ , ciascuno rappresentante una frazione  $p_n = |c_n|^2$  del totale e descritto dallo stato  $|\psi_n\rangle$ .<sup>4</sup>

Stati puri e miscele presentano in generale comportamenti differenti, per quanto riguarda i risultati delle misurazioni. Nel seguito prenderemo in esame alcuni semplici esempi che non hanno la pretesa di esaurire l'argomento, ma possono contribuire alla comprensione.

#### *Sistemi semplici*

Sia  $S$  un sistema quantistico e sia  $\mathcal{H}$  lo spazio di Hilbert ad esso associato. Assumiamo per semplicità che lo spazio di Hilbert sia bidimensionale. Sia inoltre  $|e_i\rangle$  la base canonica assegnata nello spazio, soddisfacente alle condizioni di ortonormalità  $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ .

Si considerino due insiemi così definiti. Al primo insieme, che chiameremo  $\mathcal{E}_p$ , appartengono sistemi tutti descritti dallo stato

$$|\psi\rangle = c_1 |e_1\rangle + c_2 |e_2\rangle, \quad (3.1)$$

con

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \quad c_1, c_2 \neq 0. \quad (3.2)$$

Al secondo insieme, che chiameremo  $\mathcal{E}_m$ , appartengono sia sistemi descritti da  $|\psi_1\rangle = |e_1\rangle$  che da  $|\psi_2\rangle = |e_2\rangle$  con percentuali  $p_i = |c_i|^2$  rispettivamente, ovvero

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |e_1\rangle & p_1 &= |c_1|^2, \\ |\psi_2\rangle &= |e_2\rangle & p_2 &= |c_2|^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

<sup>4</sup> In realtà la distinzione tra stati puri e miscele è più sottile, ma in questa sede non è il caso di approfondire (per una trattazione dettagliata si veda nota I a pag. 11).

Si consideri ora un'osservabile  $A$  del sistema  $S$ , e siano  $a_k$  e  $|a_k\rangle$  gli autovalori e autovettori di  $A$  rispettivamente: ci proponiamo di calcolare le distribuzioni di probabilità relative ad una misurazione di  $A$  effettuata su  $\mathcal{E}_p$  ed  $\mathcal{E}_m$ .

Indichiamo con  $P_p(a_i)$  la probabilità di ottenere il risultato  $a_i$  da una misurazione effettuata sull'insieme  $\mathcal{E}_p$ . Essa è data, secondo la meccanica quantistica, dalla norma quadra del vettore  $|\psi\rangle$  proiettato sull'autospazio relativo all'autovalore  $a_i$ , cioè

$$P_p(a_i) = \|\Pi_i|\psi\rangle\|^2, \quad (3.4)$$

dove  $\Pi_i$ , il proiettore sul sottospazio associato ad  $a_i$ , è dato da

$$\Pi_i = |a_i\rangle\langle a_i|. \quad (3.5)$$

Inserendo il proiettore (3.5) nella (3.4) e utilizzando l'espansione (3.1) per  $|\psi\rangle$  si ottiene

$$P_p(a_i) = \left\| \sum_j c_j \langle a_i | e_j \rangle |a_i\rangle \right\|^2, \quad (3.6)$$

che può essere riscritta

$$P_p(a_i) = \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i | e_j \rangle|^2 + \sum_{j \neq m} c_m^* c_j \langle e_m | a_i \rangle \langle a_i | e_j \rangle, \quad (3.7)$$

dove i contributi per  $j = m$  e  $j \neq m$  sono stati messi in evidenza.

Indicando ora con  $P_m(a_i)$  la probabilità di ottenere il risultato  $a_i$  da una misurazione effettuata sull'insieme  $\mathcal{E}_m$ , essa è data dalla media pesata delle probabilità di ottenere  $a_i$  da ciascuno degli stati di (3.3), i pesi essendo proprio le percentuali che competono a ciascuno degli stati:

$$P_m(a_i) = \sum_j |p_j|^2 \|\Pi_i|\psi_j\rangle\|^2, \quad (3.8)$$

dove  $p_j$  e  $|\psi_j\rangle$  sono dati dalla (3.3). È immediato verificare che la (3.8) si può riscrivere come segue:

$$P_m(a_i) = \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i | e_j \rangle|^2. \quad (3.9)$$

Confrontando ora la (3.7) con la (3.9), si vede che la loro differenza è data da

$$P_p(a_i) - P_m(a_i) = \sum_{j \neq m} c_m^* c_j \langle e_m | a_i \rangle \langle a_i | e_j \rangle. \quad (3.10)$$

Alcuni commenti sono opportuni a questo punto. Come si vede dalla (3.10), la differenza nelle distribuzioni di probabilità di stato puro e miscela è legata ai termini "fuori diagonale" ( $j \neq m$ ). Questo dipende dal fatto che la probabilità di miscela non contiene termini interferenziali che invece sono presenti in quella di stato puro per la coerenza dei vettori componenti di  $|\psi\rangle$ . Tali termini sono inoltre nulli se l'osservabile  $A$  è diagonale sulla base canonica assegnata: infatti in tal caso, essendo  $j \neq m$ , si annulla almeno uno dei prodotti scalari  $\langle e_m | a_i \rangle$  o  $\langle a_i | e_j \rangle$ . Si può quindi concludere che, nel caso di un sistema semplice, stato puro e miscela sono distinguibili, a patto di effettuare misurazioni di osservabili che non siano diagonali sulla base assegnata.

### Sistemi composti

Sia ora  $S$  un sistema composto da due sottosistemi  $U$  e  $V$ ,  $S = U + V$ . Lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  associato al sistema è dato dal prodotto tensoriale degli spazi associati ai sistemi componenti:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(U)} \otimes \mathcal{H}^{(V)}. \quad (3.11)$$

Assumiamo ancora, per semplicità, che gli spazi di Hilbert  $\mathcal{H}^{(U)}$  e  $\mathcal{H}^{(V)}$  siano bidimensionali. Siano inoltre  $\{|\alpha\rangle\}$  e  $\{|\beta\rangle\}$  due basi in  $\mathcal{H}^{(U)}$  e  $\mathcal{H}^{(V)}$  rispettivamente, soddisfacenti le relazioni di ortonormalità

$$\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \langle \beta_i | \beta_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (3.12)$$

Prendiamo ancora in considerazione due insiemi statistici, uno stato puro  $\mathcal{E}_p$  e la miscela corrispondente  $\mathcal{E}_m$ . Assumiamo che i sistemi di  $\mathcal{E}_p$  siano descritti dal vettore

$$|\psi\rangle = c_1 |\alpha_1\rangle |\beta_1\rangle + c_2 |\alpha_2\rangle |\beta_2\rangle, \quad (3.13)$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  soddisfano alla condizione (3.2), e che quelli di  $\mathcal{E}_m$  siano descritti da

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |\alpha_1\rangle |\beta_1\rangle & p_1 &= |c_1|^2, \\ |\psi_2\rangle &= |\alpha_2\rangle |\beta_2\rangle & p_2 &= |c_2|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ci proponiamo di calcolare le distribuzioni di probabilità sia per misurazioni di osservabili relative a un solo componente, diciamo  $U$ , che per misurazioni di osservabili relative al sistema  $S$  come un tutto.

Iniziamo con la misurazione di un'osservabile  $A^{(U)}$  relativa al solo sottosistema  $U$ . La probabilità di ottenere l'autovalore  $a_i$  nel caso di stato puro si può scrivere come

$$P_p(a_i) = \|\Pi_i^{(U)}|\psi\rangle\|^2, \quad (3.15)$$

dove  $\Pi_i^{(U)}$  è il proiettore sull'autospazio di  $\mathcal{H}$  relativo all'autovalore  $a_i$ , dato dal prodotto tensoriale del proiettore sul sottospazio relativo ad  $a_i$  in  $\mathcal{H}^{(U)}$  e dell'identità in  $\mathcal{H}^{(V)}$

$$\Pi_i^{(U)} = |a_i\rangle\langle a_i| \otimes I^{(V)}. \quad (3.16)$$

Inserendo la (3.16) nella (3.15), espandendo  $|\psi\rangle$  secondo la (3.13) e tenendo conto delle relazioni di ortonormalità (3.12), la (3.15) si può riscrivere nella forma

$$P_p(a_i) = \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i|\alpha_j\rangle|^2. \quad (3.17)$$

La probabilità di osservare l'autovalore  $a_i$  nel caso di miscela è invece la media pesata delle probabilità di osservare  $a_i$  in ciascuno degli stati componenti la miscela:

$$P_m(a_i) = \sum_j |p_j|^2 \|\Pi_i^{(U)}|\psi_j\rangle\|^2, \quad (3.18)$$

dove  $p_j$  e  $|\psi_j\rangle$  sono dati dalla (3.14). Inserendo nella precedente la (3.14), si ottiene

$$P_m(a_i) = \sum_j |c_j|^2 |\langle a_i|\alpha_j\rangle|^2, \quad (3.19)$$

che coincide con la probabilità di stato puro (3.17). Dalle (3.17) e (3.19) si può quindi concludere che per misurazioni effettuate su un solo componente di un sistema composto stati puri e

miscela forniscono le medesime distribuzioni di probabilità, e sono pertanto indistinguibili.

Passiamo ora al caso della misurazione di osservabili relative al sistema  $S = U + V$  inteso come un tutto. Il tipico esempio di misurazione di questo tipo è una misurazione di correlazione tra i valori assunti da un'osservabile  $A^{(U)}$  relativa al solo sistema  $U$  e da un'osservabile  $B^{(V)}$  relativa al solo sistema  $V$ , cioè la misurazione dell'osservabile

$$\Omega = A^{(U)} \otimes B^{(V)}. \quad (3.20)$$

La probabilità che una misurazione effettuata sull'insieme  $\mathcal{E}_p$  fornisca la coppia di autovalori  $a_i$  e  $b_j$  è data, al solito, dalla norma quadra dello stato  $|\psi\rangle$  proiettato sul sottospazio di  $\mathcal{H}$  relativo alla coppia di autovalori presa in considerazione

$$P_p(a_i, b_j) = \|\Pi_{ij}|\psi\rangle\|^2, \quad (3.21)$$

dove  $\Pi_{ij}$  è il proiettore di cui sopra, dato da

$$\Pi_{ij} = |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_j\rangle\langle b_j|. \quad (3.22)$$

Inserendo il proiettore (3.22) nella probabilità (3.21) ed espandendo  $|\psi\rangle$  secondo la (3.13), con calcoli analoghi ai precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} P_p(a_i, b_j) &= \sum_k |c_k|^2 |\langle a_i | \alpha_k \rangle|^2 |\langle b_j | \beta_k \rangle|^2 \\ &+ \sum_{k \neq m} c_m^* c_k \langle \alpha_m | a_i \rangle \langle a_i | \alpha_k \rangle \langle \beta_m | b_j \rangle \langle b_j | \beta_k \rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

In modo simile, la probabilità che una misurazione effettuata sull'insieme  $\mathcal{E}_m$  fornisca la coppia di autovalori  $a_i$  e  $b_j$  è data da

$$P_m(a_i, b_j) = \sum_k p_k \|\Pi_{ij}|\psi_k\rangle\|^2. \quad (3.24)$$

Inserendo in (3.24)  $p_k$  e  $|\psi_k\rangle$  secondo la (3.14) e sviluppando i calcoli si ottiene

$$P_m(a_i, b_j) = \sum_k |c_k|^2 |\langle a_i | \alpha_k \rangle|^2 |\langle b_j | \beta_k \rangle|^2. \quad (3.25)$$

Prendendo ora la differenza tra la (3.23) e la (3.25) si ha infine

$$P_p(a_i, b_j) - P_m(a_i, b_j) = \sum_{k \neq m} c_m^* c_k \langle \alpha_m | a_i \rangle \langle a_i | \alpha_k \rangle \langle \beta_m | b_j \rangle \langle b_j | \beta_k \rangle. \quad (3.26)$$

La situazione descritta dalla (3.26) è per certi aspetti simile a quella descritta dalla (3.10) per il caso dei sistemi semplici: la differenza nelle distribuzioni di probabilità di stato puro e miscela è legata ai termini fuori diagonale. In questo caso, però, i prodotti scalari ad argomento della somma coinvolgono sia gli autostati di  $A^{(U)}$  con i vettori di base  $\{|\alpha\rangle\}$  in  $\mathcal{H}^{(U)}$  che quelli di  $B^{(V)}$  con i vettori di base  $\{|\beta\rangle\}$  in  $\mathcal{H}^{(V)}$ . Di conseguenza, perché la differenza delle probabilità di stato puro e di miscela sia diversa da zero, è necessario che entrambe le osservabili  $A^{(U)}$  e  $B^{(V)}$  non siano diagonali sulle basi  $\{|\alpha\rangle\}$  e  $\{|\beta\rangle\}$  rispettivamente. A questa condizione, stato puro e miscela forniscono distribuzioni di probabilità differenti e sono quindi distinguibili.

Per illustrare la trattazione fin qui svolta, specializziamola ad un esempio specifico che riprenderemo in considerazione nel prossimo paragrafo.

Come sistema composto  $S$  prendiamo il sistema costituito da due particelle a spin  $1/2$ ,  $U$  e  $V$ . Consideriamo poi due insiemi statistici di sistemi  $U + V$  così costruiti. Il primo, che indichiamo con  $\mathcal{E}_p$  è l'insieme dei sistemi  $U + V$  descritti dallo stato di singoletto di spin

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |+\rangle_z^U |-\rangle_z^V - |-\rangle_z^U |+\rangle_z^V \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle], \quad (3.27)$$

dove  $|\pm\rangle_z^{(U,V)}$  sono gli autostati di  $\sigma_z^U$  e  $\sigma_z^V$  rispettivamente ( $\sigma$  = matrici di Pauli) soddisfacenti all'equazione agli autovalori

$$\sigma_z^{(U,V)} |\pm\rangle_z^{(U,V)} = \pm |\pm\rangle_z^{(U,V)}. \quad (3.28)$$

Il secondo, che indichiamo con  $\mathcal{E}_m$ , è la miscela corrispondente

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |+\rangle_z^U |-\rangle_z^V & p_1 &= \frac{1}{2}, \\ |\psi_2\rangle &= |-\rangle_z^U |+\rangle_z^V & p_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Ci proponiamo di calcolare, per entrambi gli insiemi statistici, le distribuzioni di probabilità relative a misurazioni di correlazione di spin lungo l'asse  $x$ . Esse sono date da

$$P_p(\sigma_x^U = +; \sigma_x^V = +) = \|\Pi|\psi\rangle\|^2 = \frac{1}{2}\|\Pi|\psi_1\rangle\|^2 + \frac{1}{2}\|\Pi|\psi_2\rangle\|^2 - \frac{1}{2}\langle\psi_2|\Pi|\psi_1\rangle - \frac{1}{2}\langle\psi_1|\Pi|\psi_2\rangle, \quad (3.30)$$

$$P_m(\sigma_x^U = +; \sigma_x^V = +) = \frac{1}{2}\|\Pi|\psi_1\rangle\|^2 + \frac{1}{2}\|\Pi|\psi_2\rangle\|^2, \quad (3.31)$$

dove  $\Pi$  è il proiettore sul sottospazio dello spazio di Hilbert relativo agli autovalori  $\sigma_x^{(U,V)} = +$ , dato da

$$\Pi = |+\rangle_x^U \langle +| \otimes |+\rangle_x^V \langle +|. \quad (3.32)$$

Richiamando le espressioni esplicite per  $|\psi_1\rangle$ ,  $|\psi_2\rangle$  e  $\Pi$  di eq. (3.27) e (3.32), si può vedere facilmente che

$$\|\Pi|\psi_1\rangle\|^2 = \|\Pi|\psi_2\rangle\|^2 = \langle\psi_2|\Pi|\psi_1\rangle = \langle\psi_1|\Pi|\psi_2\rangle = \frac{1}{4}. \quad (3.33)$$

Inserendo ora la (3.33) nelle (3.30) e (3.31) si ottiene

$$P_p(\sigma_x^U = +; \sigma_x^V = +) = 0 \quad (3.34)$$

$$P_m(\sigma_x^U = +; \sigma_x^V = +) = \frac{1}{4}. \quad (3.35)$$

Come già anticipato nella discussione precedente, stato puro e miscela forniscono previsioni differenti per opportune misurazioni di correlazione, in questo caso per misure di correlazione delle componenti  $x$  degli spin le cui osservabili ( $\sigma_x$ ) non commutano con le osservabili mediante i cui autostati sono costruiti gli stati di  $\mathcal{E}_p$  ed  $\mathcal{E}_m$  ( $\sigma_z$ ). La differenza consiste nel fatto che mentre nello stato puro non è possibile trovare entrambi gli spin nel medesimo verso lungo l'asse  $x$ , ovvero trovandone uno in verso positivo l'altro è certamente in verso negativo (perfetta correlazione), nella miscela questo è possibile. Si può quindi concludere che i due insiemi statistici  $\mathcal{E}_p$  ed  $\mathcal{E}_m$  sono fisicamente diversi, nel senso che è possibile discriminare tra l'uno e l'altro mediante un'opportuna operazione fisica.

#### §4. Versione moderna del paradosso EPR

Come abbiamo visto dalla traduzione del lavoro originale di Einstein, Podolsky e Rosen del 1935 (*Può la descrizione quantomeccanica della realtà fisica essere considerata completa?*), i tre autori si propongono di dimostrare che la meccanica quantistica è incompleta, nel senso che la funzione d'onda di un sistema quantistico non contiene tutte le possibili informazioni sul sistema stesso. La loro dimostrazione procede per assurdo: essi assumono infatti la completezza della meccanica quantistica e da questa ipotesi derivano una situazione paradossale. In realtà nel loro lavoro manca un'analisi dettagliata delle ipotesi. Gli autori assumono infatti come scontati un "principio di realtà" e un "principio di località" che possono invece essere messi in discussione. Naturalmente la cosa non va interpretata come un grossolano errore degli autori, bensì come un limite storico del loro lavoro.

Ma veniamo alla formulazione dei due principi:<sup>5</sup>

##### Principio di realtà

Se, senza intervenire su un dato sistema, è possibile prevedere con certezza (cioè con probabilità = 1) il valore di una grandezza fisica, a questa corrisponde una *proprietà oggettiva* del sistema, cioè una proprietà indipendente da eventuali osservatori esterni.

##### Principio di località

Dati due sistemi fisici e supposto che durante un certo intervallo di tempo essi rimangano *isolati* tra loro, allora l'evoluzione delle proprietà fisiche di uno di essi durante tale intervallo di tempo non può essere influenzata da operazioni eseguite sull'altro (località alla Einstein).

Rivediamo ora la derivazione del paradosso EPR seguendo un esempio ideato da D. Bohm e Y. Aharonov,<sup>6</sup> in cui si esamina un sistema quantistico dal punto di vista delle sue variabili di spin. Il vantaggio di adottare un esempio di questo tipo consiste nel

<sup>5</sup> Si veda nota 1 pag. 11.

<sup>6</sup> D. Bohm and Y. Aharonov, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1070.

fatto che innanzi tutto lo spazio di spin è finito - dimensionale e consente quindi una trattazione semplice del problema senza che per questo vadano perse le caratteristiche proprie della meccanica quantistica, e in secondo luogo nel fatto che la formulazione teorica del problema è più vicina alle situazioni sperimentali che sono state di fatto esaminate.

Si consideri il sistema costituito da una particella a spin 0 che decade in due particelle identiche a spin 1/2,  $U$  e  $V$ .<sup>7</sup> Sia  $\mathcal{E}$  l'insieme costituito da un numero sufficientemente grande di sistemi composti  $U + V$ . Tralasciando la parte orbitale, che è del tutto inessenziale nella descrizione del problema, lo stato che descrive i sistemi di  $\mathcal{E}$  è un singoletto di spin:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |+\rangle_z^U |-\rangle_z^V - |-\rangle_z^U |+\rangle_z^V \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle]. \quad (4.1)$$

$|\pm\rangle_z^{(U,V)}$  sono autostati della componente  $z$  raddoppiata dello spin di  $U$  e  $V$  rispettivamente, soddisfacenti all'equazione agli autovalori

$$\sigma_z^{(U,V)} |\pm\rangle_z^{(U,V)} = \pm |\pm\rangle_z^{(U,V)}, \quad (4.2)$$

dove con  $\sigma$  si intendono le matrici di Pauli.

Indichiamo con  $t_0$  l'istante del decadimento. Supponiamo quindi di misurare la componente  $z$  dello spin della particella  $U$  ad un istante  $t_1$  successivo a  $t_0$ . La meccanica quantistica prevede che troveremo  $\sigma_z^U = \pm 1$  con probabilità 1/2. Fissiamo la nostra attenzione sull'ensemble  $\mathcal{E}^+$  costituito dai sistemi composti  $U + V$  per cui la misurazione di  $\sigma_z^U$  ha fornito il risultato +1. Il postulato di riduzione ci dice che tale ensemble è descritto dallo stato  $|+\rangle_z^U |-\rangle_z^V$ . Di conseguenza esso è separabile nei due sottoinsiemi  $E^+$  e  $F^+$  costituiti rispettivamente dalle particelle  $U$  con  $\sigma_z^U = +1$  e  $V$  con  $\sigma_z^V = -1$ . Questo ci permette di concludere che una misura di  $\sigma_z^V$  eseguita ad un istante  $t_2$  successivo a  $t_1$  fornirà il valore  $\sigma_z^V = -1$  con probabilità unitaria. L'applicazione del principio di realtà e dell'equazione di Schrödinger ci costringono a considerare  $\sigma_z^V = -1$  come *proprietà oggettiva* delle particelle  $V$  appartenenti a  $\mathcal{E}^+$  sia all'istante  $t_2$

<sup>7</sup> Come vedremo in seguito è possibile realizzare esperimenti che dal punto di vista quantomeccanico sono equivalenti alla situazione qui esaminata.

che ad un qualunque istante  $t_1'$  compreso tra  $t_1$  e  $t_2$ . Del resto va osservato che all'istante  $t_1$  le particelle  $U$  e  $V$  sono separate e non più interagenti. L'applicazione del principio di località ci porta quindi ad ammettere che  $\sigma_z^V = -1$  è una proprietà fisica delle particelle  $V$  appartenenti ad  $\mathcal{E}^+$  anche all'istante  $t_1$  e ad un qualunque istante  $t_1''$  compreso tra  $t_0$  e  $t_1$ . La sola differenza tra le due situazioni consiste nel fatto che all'istante  $t_1$  l'osservatore *conosce* il valore di  $\sigma_z^V$ , mentre all'istante  $t_1''$  non lo conosce ancora. Lo stesso discorso vale naturalmente per l'ensemble  $\mathcal{E}^-$  definito in modo analogo ad  $\mathcal{E}^+$ . Se si assume ora la completezza della meccanica quantistica, si è costretti ad ammettere che all'istante  $t_1''$  successivo a  $t_0$  e precedente  $t_1$  l'ensemble  $\mathcal{E}$  è *separato* nei due sottoinsiemi  $\mathcal{E}^+$  ed  $\mathcal{E}^-$ . Esso è di conseguenza descritto non dallo stato puro di singoletto, bensì dalla miscela

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |+\rangle_z^U |-\rangle_z^V & p_1 &= \frac{1}{2}, \\ |\psi_2\rangle &= |-\rangle_z^U |+\rangle_z^V & p_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Come abbiamo già osservato nel paragrafo precedente, stato puro e miscela forniscono previsioni differenti per misure di correlazione. In particolare, richiamando le equazioni (3.34) e (3.35) si vede che

$$P_p(\sigma_z^U = +, \sigma_z^V = +) = 0, \quad (4.4)$$

$$P_m(\sigma_z^U = +, \sigma_z^V = +) = \frac{1}{4}. \quad (4.5)$$

La situazione è chiaramente paradossale: abbiamo assunto inizialmente il sistema nello stato di singoletto (4.1) e abbiamo mostrato che in realtà tale stato è la miscela (4.3), fisicamente diversa dallo stato puro (4.1) (fig. 1).

La contraddizione nasce dall'assumere tre ipotesi:

- i) Principio di realtà
- ii) Principio di località
- iii) Completezza della meccanica quantistica

Lasciando cadere almeno una delle ipotesi il paradosso si risolve, perché la catena deduttiva che porta da stato puro

## EPR

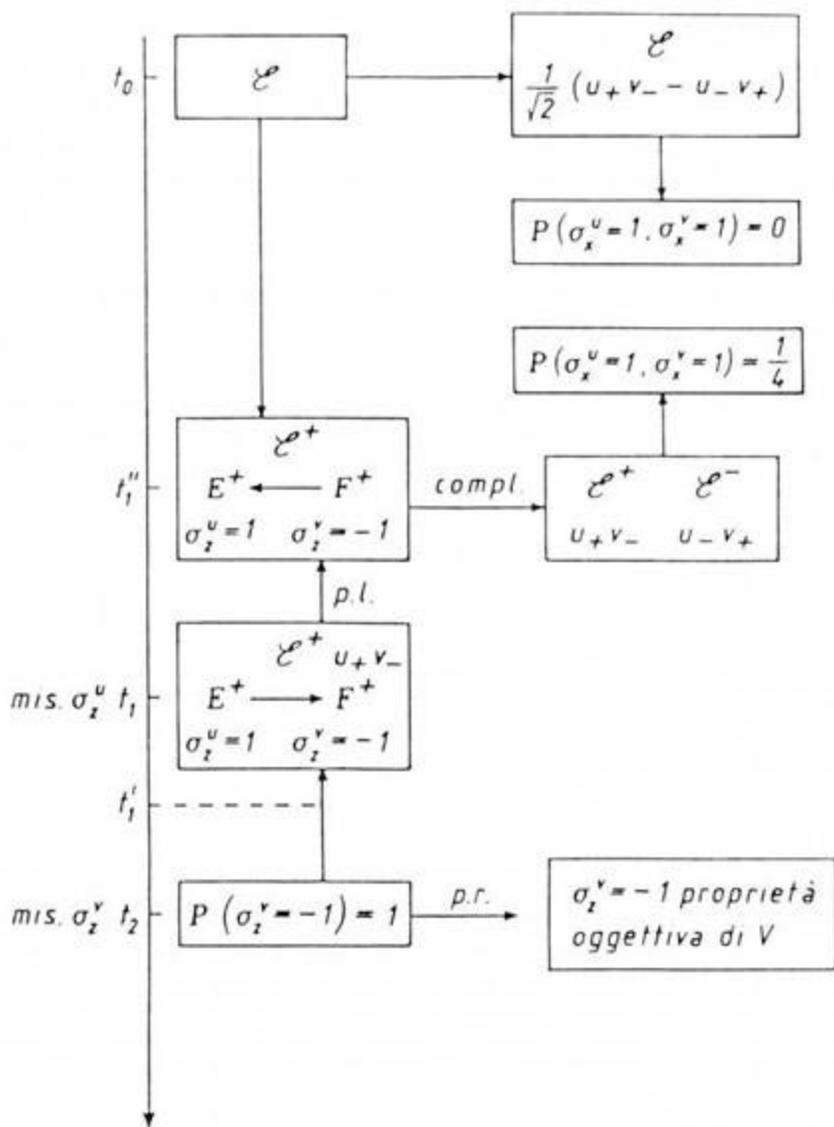


Fig. 1 Schema della deduzione del paradosso EPR. p.r. = principio di realtà. p.l. = principio di località. compl. = ipotesi di completezza della meccanica quantistica.

a miscela si interrompe. I tre autori considerano le prime due ipotesi talmente ovvie che interpretano il paradosso come un'evidenza dell'incompletezza della meccanica quantistica. Poiché inoltre completezza della meccanica quantistica significa "indeterminismo" essi sono convinti della necessità di completare quest'ultima mediante una teoria più fondamentale, in cui l'incompletezza è superata introducendo parametri dinamici addizionali le cosiddette "variabili nascoste": in tal modo, oltre alla soluzione del paradosso, si recupererebbe una visione del mondo essenzialmente "determinista".

Vediamo con un semplice esempio come una teoria a variabili nascoste sia in grado di risolvere il paradosso. Per teoria a variabili nascoste si intende una teoria caratterizzata da:

- i) un insieme di parametri  $\lambda$  la cui conoscenza permette di prevedere in modo deterministico l'evoluzione del sistema. Tali parametri sono in linea di principio non conoscibili esattamente; di qui il nome di "variabili nascoste";
- ii) la distribuzione statistica delle variabili nascoste;
- iii) una regola che stabilisca la corrispondenza tra valore della variabile nascosta e valore dell'osservabile misurata;
- iv) una regola che stabilisca la distribuzione statistica di  $\lambda$  dopo la misura.

Consideriamo il seguente modello per la descrizione dello spin:

#### *Una particella*

$\vec{\lambda}$  ha sempre un valore ben definito; esso è uniformemente distribuito sulla sfera; a  $\lambda_i > 0 (< 0)$  corrisponde  $\sigma_i = +1 (-1)$ ; dopo la misura  $\vec{\lambda}$  è uniformemente distribuito sulla semisfera associata al valore di  $\sigma$  misurato. Tale modello riproduce le previsioni della meccanica quantistica per misure dello spin di una particella (fig. 2 a)).

#### *Due particelle*

Gli spin sono correlati:  $\vec{\lambda}^V = -\vec{\lambda}^U$ . Tale modello riproduce le previsioni dello stato di singoletto quantomeccanico per misure di  $\sigma_z^U$  e  $\sigma_z^V$  e per misure di correlazione tra  $\sigma_x^U$  e  $\sigma_x^V$  (fig. 2 b)).

È evidente che se si assume tale descrizione per lo stato di singoletto si risolve il paradosso EPR poiché non si realizza mai

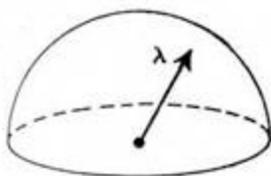


Fig. 2 a) Modello a variabili nascoste per la descrizione dello spin di una particella.

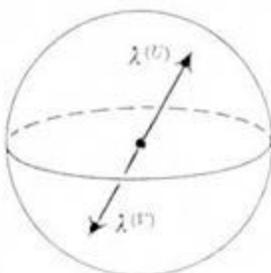


Fig. 2 b) Modello a variabili nascoste per la descrizione dello stato di singoletto si spin.

il conflitto tra stato puro e miscela.<sup>8</sup> È però altrettanto chiaro che il modello è non locale. Infatti, a causa del vincolo di rigidità  $\vec{\lambda}^V = -\vec{\lambda}^U$ , una misurazione di  $\vec{\sigma}^U$  modifica la distribuzione di  $\vec{\lambda}^U$ , e quindi di  $\vec{\lambda}^V$ , anche se  $V$  è isolato da  $U$  in modo dipendente dalla componente di spin misurata (non località alla Bell).

*Ma allora è davvero possibile completare la meccanica quantistica?*

Ovvero: è possibile considerare gli stati quantistici come medie su stati per cui i risultati di tutte le possibili misure sono in linea di principio interamente determinati?

<sup>8</sup> Il modello è molto rozzo e cessa di funzionare se si eseguono misure di correlazione che coinvolgono tre direzioni. Esistono comunque modelli più elaborati che riproducono la meccanica quantistica in tutto e per tutto.

Nel 1955 viene pubblicata la traduzione inglese di un teorema di J. Von Neumann<sup>9</sup> che sembra escludere dal gioco le teorie a variabili nascoste. Solo circa dieci anni dopo J. Bell<sup>10</sup> si rende conto che le ipotesi di J. Von Neumann non sono fisicamente rilevanti: esiste la possibilità di prendere in considerazione completamente deterministici della meccanica quantistica, ma il prezzo da pagare è molto alto. La lettura del lavoro originale di Bell, riportato nel prossimo paragrafo, ci chiarirà i vari aspetti del problema.

---

<sup>9</sup> J. Von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quanten-mechanik*, Verlag Julius-Springer, Berlino (1932); traduzione inglese: Princeton University Press (1955).

<sup>10</sup> J. Bell, *Physics* **1** (1964) 195-200.

## I. Introduzione

Il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen [1]<sup>11</sup> è stato avanzato ad argomentare che la meccanica quantistica non sarebbe una teoria completa ma dovrebbe essere integrata da variabili addizionali. Queste variabili addizionali avrebbero il compito di rendere nuovamente causale e locale la teoria [2]. Nella presente nota quell'idea verrà formulata in modo matematicamente corretto e si mostrerà come essa sia incompatibile con le previsioni statistiche della meccanica quantistica. È la richiesta di località, o più precisamente la richiesta che il risultato di una misurazione effettuata su un sistema non venga influenzata da operazioni effettuate su un sistema distante con il quale esso abbia interagito nel passato, che crea la difficoltà essenziale. Ci sono stati tentativi [3] per mostrare che anche senza una tale richiesta di separabilità o località non è possibile alcuna

---

<sup>†</sup> di J. S. Bell, Dipartimento di Fisica, Università del Wisconsin, Madison, Wisconsin. Testo ricevuto dalla rivista il 4 Novembre 1964 e pubblicato su *Physics* **1** (1964) 195-200. Lavoro parzialmente finanziato dalla Commissione Statunitense per l'Energia Atomica.

J. S. Bell è nato in Inghilterra nel 1928. Membro permanente del CERN di Ginevra dal 1960, ha svolto attività di ricerca sia sui fondamenti della meccanica quantistica che sulla fisica teorica delle particelle elementari. È del 1964 la sua famosa Disuguaglianza sulle correlazioni dei risultati di misurazioni simultanee su sistemi fisici separati (oggetto del presente articolo), che è stata definita "il più importante progresso recente in fisica". Nel 1969, in collaborazione con Adler e Jackiw, ha scoperto l'anomalia ABJ, sollevando profonde questioni riguardanti la teoria quantistica dei campi. Nella metà degli anni '60, in collaborazione con Steinberger (premio Nobel per la fisica 1989), ha perfezionato il formalismo della violazione della simmetria CP. Si è interessato anche di fisica degli acceleratori di particelle in collaborazione con la moglie Mary. Membro della Royal Society, nel 1989 gli è stato assegnato il premio Dannie Heinemann per i suoi contributi alla fisica matematica. È scomparso prematuramente nell'ottobre 1990.

<sup>11</sup> I numeri tra parentesi quadra si riferiscono alle note bibliografiche originali riportate alla fine dell'articolo.

interpretazione a "variabili nascoste" della meccanica quantistica. Questi tentativi sono stati esaminati altrove [4] e sono stati trovati incompleti. Inoltre, un'interpretazione a variabili nascoste della teoria quantistica elementare [5] è stata costruita esplicitamente. Quella particolare interpretazione possiede in realtà una struttura grossolanamente non locale. Questa è caratteristica, in accordo con il risultato che sarà dimostrato qui, di ogni tale teoria che riproduca esattamente le previsioni della meccanica quantistica.

## II. Formulazione

Con l'esempio invocato da Bohm e Aharonov [6], l'argomentazione EPR è la seguente. Si consideri una coppia di particelle a spin un mezzo formata in qualche modo nello stato di singoletto di spin con le particelle componenti in moto libero in direzioni opposte. È possibile effettuare, mediante ad esempio magneti Stern - Gerlach, misurazioni su componenti selezionate degli spin  $\vec{\sigma}_1$  e  $\vec{\sigma}_2$ . Se la misurazione della componente  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ , dove  $\vec{a}$  è un vettore unitario, fornisce il valore  $+1$  allora, secondo la meccanica quantistica, la misurazione di  $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{a}$  deve dare il valore  $-1$  e viceversa. Ora introduciamo l'ipotesi [2], e sembra un'ipotesi che valga almeno la pena di prendere in considerazione, che se le due misurazioni sono effettuate in luoghi distanti l'uno dall'altro l'orientazione di un magnete non influenzi il risultato ottenuto con l'altro. Siccome siamo in grado di prevedere in anticipo il risultato della misura di una qualunque componente di  $\vec{\sigma}_2$  arbitrariamente scelta, misurando prima la medesima componente di  $\vec{\sigma}_1$ , segue che il risultato di una qualunque misurazione del genere deve essere in realtà predeterminato. Poiché la funzione d'onda quantomeccanica iniziale *non* determina il risultato di una misurazione individuale, questa predeterminazione implica la possibilità di una specificazione più completa dello stato.

Supponiamo che questa specificazione più completa sia effettuata per mezzo di parametri  $\lambda$ . È indifferente per quanto segue se  $\lambda$  indichi una singola variabile o un insieme, o anche un insieme di funzioni, e se le variabili siano discrete o continue. Comunque, noi scriviamo come se  $\lambda$  fosse un singolo parametro continuo. Il risultato  $A$  della misurazione di  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$  è quindi determinato da  $\vec{a}$

e  $\lambda$ , e il risultato  $B$  della misurazione di  $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$  è allo stesso modo determinato da  $\vec{b}$  e  $\lambda$ , e

$$A(\vec{a}, \lambda) = \pm 1, \quad B(\vec{b}, \lambda) = \pm 1. \quad (1)$$

L'assunzione cruciale [2] è che il risultato  $B$  per la particella 2 non dipenda dalla disposizione  $\vec{a}$ , del magnete per la particella 1, né  $A$  da  $\vec{b}$ .

Se  $\rho(\lambda)$  è la distribuzione di probabilità di  $\lambda$  allora il valore di aspettazione del prodotto delle due componenti  $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$  e  $\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$  è

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda). \quad (2)$$

Questo dovrebbe eguagliare il valore di aspettazione quantomeccanico, che per lo stato di singoletto è

$$\langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (3)$$

Ma mostreremo che questo non è possibile.

Si potrebbe preferire una formulazione in cui le variabili nascoste sono divise in due insiemi, con  $A$  dipendente da uno e  $B$  dall'altro; questa possibilità è contenuta nella precedente, poiché  $\lambda$  rappresenta un qualunque numero di variabili e le dipendenze di  $A$  e  $B$  da esse non sono specificate. In una teoria fisica completa del tipo immaginato da Einstein, le variabili nascoste avrebbero significato dinamico e leggi di moto; si può quindi pensare che il nostro  $\lambda$  rappresenti i valori iniziali di queste variabili a un istante opportuno.

### III. Illustrazione

La dimostrazione del risultato principale è abbastanza semplice. Prima di darla, comunque, un certo numero di esempi può servire a metterla nella giusta prospettiva.

Innanzitutto, non c'è alcuna difficoltà a dare una descrizione a variabili nascoste delle misurazioni di spin su una singola particella. Supponiamo di avere una particella a spin un mezzo in uno stato puro di spin con polarizzazione indicata da un vettore

unitario  $\vec{p}$ . Sia la variabile nascosta (per esempio) un vettore unitario  $\vec{\lambda}$  con distribuzione di probabilità uniforme sulla semisfera  $\vec{\lambda} \cdot \vec{p} > 0$ . Si specifichi che il risultato di una misurazione di una componente  $\sigma \cdot \vec{a}$  sia

$$\text{sign } \vec{\lambda} \cdot \vec{a}', \quad (4)$$

dove  $\vec{a}'$  è un vettore unitario dipendente da  $\vec{a}$  e da  $\vec{p}$  in modo da assegnare, e la funzione segno è  $+1$  o  $-1$  secondo il segno del suo argomento. In realtà questo lascia il risultato indeterminato quando  $\vec{\lambda} \cdot \vec{a}' = 0$ , ma siccome la probabilità di questo caso è zero non daremo particolari prescrizioni per esso. Mediando su  $\vec{\lambda}$  il valore di aspettazione è

$$\langle \sigma \cdot \vec{a} \rangle = 1 - 2\vartheta'/\pi, \quad (5)$$

dove  $\vartheta'$  è l'angolo tra  $\vec{a}'$  e  $\vec{p}$ . Supponiamo ora che  $\vec{a}'$  sia ottenuto da  $\vec{a}$  mediante una rotazione verso  $\vec{p}$  finché

$$1 - \frac{2\vartheta'}{\pi} = \cos \vartheta, \quad (6)$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra  $\vec{a}$  e  $\vec{p}$ . Allora abbiamo il risultato desiderato

$$\langle \sigma \cdot \vec{a} \rangle = \cos \vartheta. \quad (7)$$

Così in questo caso semplice non c'è difficoltà nel vedere che il risultato di ogni misurazione è determinato dal valore di una variabile addizionale, e che le caratteristiche statistiche della meccanica quantistica sorgono perché il valore di questa variabile nei casi individuali non è noto.

In secondo luogo, non c'è difficoltà nel riprodurre, nella forma (2), le sole caratteristiche della (3) usate comunemente nelle discussioni verbali di questo problema:

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{a}) &= -P(\vec{a}, -\vec{a}) = -1, \\ P(\vec{a}, \vec{b}) &= 0 \quad \text{se} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Per esempio, sia ora  $\lambda$  un vettore unitario  $\vec{\lambda}$ , con distribuzione di probabilità uniforme in tutte le direzioni, e sia

$$\begin{aligned} A(\vec{a}, \vec{\lambda}) &= \text{sign } \vec{a} \cdot \vec{\lambda}, \\ B(\vec{b}, \vec{\lambda}) &= -\text{sign } \vec{b} \cdot \vec{\lambda}. \end{aligned} \quad (9)$$

Questo dà

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = -1 + \frac{2}{\pi} \vartheta, \quad (10)$$

dove  $\vartheta$  è l'angolo tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , e (10) ha le proprietà (8). Per confronto, si consideri il risultato di una teoria modificata [6] in cui lo stato puro di singoletto è sostituito nel corso del tempo da una miscela isotropa di stati fattorizzati; questo fornisce la funzione di correlazione

$$-\frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (11)$$

Probabilmente, dal punto di vista sperimentale, è meno agevole distinguere la (10) dalla (3), che non la (11) dalla (3).

A differenza della (3), la funzione (10) non è stazionaria al valore minimo  $-1$  (a  $\vartheta = 0$ ). Si vedrà che questo è caratteristico delle funzioni di tipo (2).

In terzo luogo, infine, non c'è difficoltà nel riprodurre le correlazioni quantomeccaniche (3) se si permette che i risultati  $A$  e  $B$  in (2) dipendano da  $\vec{b}$  e da  $\vec{a}$  rispettivamente oltre che da  $\vec{a}$  e da  $\vec{b}$ . Per esempio, si sostituisca  $\vec{a}$  nella (9) con  $\vec{a}'$ , ottenuto da  $\vec{a}$  mediante una rotazione verso  $\vec{b}$  finché

$$1 - \frac{2}{\pi} \vartheta' = \cos \vartheta,$$

dove  $\vartheta'$  è l'angolo tra  $\vec{a}'$  e  $\vec{b}$ . Comunque, per valori assegnati delle variabili nascoste, i risultati delle misurazioni con un magnete dipendono ora da come è disposto il magnete distante, che è proprio ciò che vorremmo evitare.

#### IV. Contraddizione

Dimostreremo ora il risultato principale. Siccome  $\rho$  è una distribuzione di probabilità normalizzata,

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1, \quad (12)$$

e siccome valgono le proprietà (1),  $P$  in (2) non può essere minore di  $-1$ . Essa può raggiungere il valore  $-1$  solamente per  $\vec{a} = \vec{b}$  se

$$A(\vec{a}, \lambda) = -B(\vec{a}, \lambda) \quad (13)$$

eccetto per un insieme di punti  $\lambda$  di probabilità nulla. Assumendo questo, (2) può essere riscritta

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda). \quad (14)$$

Se  $\vec{c}$  è un altro vettore unitario segue che

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda) - 1] \end{aligned}$$

usando (1), da cui

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)].$$

Il secondo termine a destra è  $P(\vec{b}, \vec{c})$ , per cui

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \geq |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})|. \quad (15)$$

A meno che  $P$  sia costante, il membro di destra è in generale di ordine  $|\vec{b} - \vec{c}|$  per piccoli  $|\vec{b} - \vec{c}|$ . Pertanto  $P(\vec{b}, \vec{c})$  non può essere stazionaria al valore minimo ( $-1$  per  $\vec{b} = \vec{c}$ ) e non può uguagliare il valore quantomeccanico (3).

Del resto neppure la correlazione quantomeccanica (3) può essere approssimata in modo arbitrariamente preciso dalla forma (2). La prova formale di questo può essere data nel modo seguente. Non è il caso di preoccuparsi del fallimento dell'approssimazione in punti isolati, cosicché consideriamo invece di (2) e (3) le funzioni

$$\overline{P}(\vec{a}, \vec{b}) \quad \text{e} \quad \overline{-\vec{a} \cdot \vec{b}},$$

dove la soprasedgnatura indica medie indipendenti di  $P(\vec{a}', \vec{b}')$  e  $-\vec{a}' \cdot \vec{b}'$  su vettori  $\vec{a}'$  e  $\vec{b}'$  entro angoli assegnati piccoli di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Supponiamo che per tutti gli  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  la differenza sia limitata superiormente da  $\varepsilon$ :

$$|\overline{P}(\vec{a}, \vec{b}) + \overline{\vec{a} \cdot \vec{b}}| \leq \varepsilon. \quad (16)$$

Allora si mostrerà che  $\varepsilon$  non può essere reso arbitrariamente piccolo.

Supponiamo che per tutti gli  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$

$$|\overline{\vec{a} \cdot \vec{b}} - \vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \delta. \quad (17)$$

Allora dalla (16)

$$|\overline{P(\vec{a}, \vec{b})} + \vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \varepsilon + \delta. \quad (18)$$

Dalla (2)

$$\overline{P(\vec{a}, \vec{b})} = \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)}, \quad (19)$$

dove

$$|\overline{A(\vec{a}, \lambda)}| \leq 1 \quad \text{e} \quad |\overline{B(\vec{b}, \lambda)}| \leq 1. \quad (20)$$

Dalla (18) e (19), con  $\vec{a} = \vec{b}$ ,

$$\int d\lambda \rho(\lambda) [\overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)} + 1] \leq \varepsilon + \delta. \quad (21)$$

Dalla (19)

$$\begin{aligned} \overline{P(\vec{a}, \vec{b})} - \overline{P(\vec{a}, \vec{c})} &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)} - \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)}] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)} [1 + \overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)}] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A(\vec{a}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)} [1 + \overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)}]. \end{aligned}$$

Usando quindi la (20)

$$\begin{aligned} |\overline{P(\vec{a}, \vec{b})} - \overline{P(\vec{a}, \vec{c})}| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 + \overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{c}, \lambda)}] \\ &\quad + \int d\lambda \rho(\lambda) [1 + \overline{A(\vec{b}, \lambda)} \overline{B(\vec{b}, \lambda)}]. \end{aligned}$$

Usando quindi la (19) e la (21)

$$|\overline{P(\vec{a}, \vec{b})} - \overline{P(\vec{a}, \vec{c})}| \leq 1 + \overline{P(\vec{b}, \vec{c})} + \varepsilon + \delta.$$

Usando infine la (18)

$$|\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}| - 2(\varepsilon + \delta) \leq 1 - \vec{b} \cdot \vec{c} + 2(\varepsilon + \delta),$$

ovvero

$$4(\varepsilon + \delta) \geq |\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}| + \vec{b} \cdot \vec{c} - 1. \quad (22)$$

Si prenda ad esempio  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 1/\sqrt{2}$ . Allora

$$4(\varepsilon + \delta) \geq \sqrt{2} - 1.$$

Pertanto, per  $\delta$  piccoli finiti,  $\varepsilon$  non può essere arbitrariamente piccolo.

Quindi, il valore di aspettazione quantomeccanico non può essere rappresentato, né accuratamente né in modo arbitrariamente preciso, nella forma (2).

## V. Generalizzazione

L'esempio considerato sopra ha il vantaggio di richiedere poca fantasia per immaginare che le misurazioni coinvolte vengano effettivamente realizzate. In modo più formale, assumendo [7] che ogni operatore Hermitiano dotato di un insieme completo di autostati sia una "osservabile", il risultato è facilmente esteso ad altri sistemi. Se i due sistemi hanno spazi degli stati di dimensionalità maggiore di 2 possiamo sempre considerare sottospazi bidimensionali e definire, nel loro prodotto diretto, operatori  $\vec{\sigma}_1$  e  $\vec{\sigma}_2$  formalmente analoghi a quelli usati sopra e che sono nulli al di fuori del sottospazio prodotto. Allora per almeno uno stato quantomeccanico, lo stato di "singoletto" nei sottospazi combinati, le previsioni statistiche della meccanica quantistica sono incompatibili con la predeterminazione separabile.

## VI. Conclusione

In una teoria in cui vengano aggiunti alla meccanica quantistica parametri che determinino i risultati di misurazioni individuali, senza cambiare le previsioni statistiche, ci deve essere un meccanismo per cui la collocazione di un apparato di misurazione può

influenzare la lettura di un altro strumento, comunque distante. Inoltre, il segnale coinvolto si deve propagare in modo istantaneo, cosicché una tale teoria non sarebbe Lorentz invariante.

Naturalmente, la situazione è diversa se le previsioni quantomeccaniche hanno validità limitata.

Può darsi che esse si possano applicare solamente a esperimenti in cui le collocazioni degli strumenti sono effettuate con sufficiente anticipo da permettere loro di raggiungere un qualche mutuo rapporto mediante lo scambio di segnali che si propaghino con velocità minore o uguale a quella della luce. A tal proposito, esperimenti del tipo proposto da Bohm e Aharonov [6], in cui le collocazioni vengono cambiate durante il volo delle particelle, sono cruciali.

*Ho un debito di riconoscenza verso i Dr. M. Bander e J. K. Perring per discussioni molto utili su questo problema. La prima stesura del lavoro è stata scritta durante una permanenza alla Brandeis University; sono grato ai colleghi del posto e all'Università del Wisconsin per il loro interessè e la loro ospitalità.*

### Bibliografia

- [1] A. Einstein, N. Rosen e B. Podolsky, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935); si veda anche N. Bohr, *Ibid.* **48**, 696 (1935), W. H. Furry, *Ibid.* **49**, 393 e 476 (1936), e D. R. Inglis, *Rev. Mod. Phys.* **33**, 1 (1961).
- [2] "Ma, secondo me, noi dovremmo attenerci strettamente a una supposizione: la situazione reale di fatto del sistema  $S_2$  è indipendente dalle operazioni che si compiano sul sistema  $S_1$ , che è spazialmente separato dal primo." A. Einstein in *Albert Einstein, Scienziato Filosofo*, (Edito da P. A. Schilp) p. 85, Library of Living Philosophers, Evanston, Illinois (1949).
- [3] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Verlag Julius-Springer, Berlino (1932), [Traduzione inglese: Princeton University Press (1955)]; J. M. Jauch e C. Piron, *Helv. Phys. Acta* **36**, 827 (1963).
- [4] J. S. Bell, in corso di stampa.
- [5] D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 166 e 180 (1952).

- [6] D. Bohm e Y. Aharonov, *Phys. Rev.* **108**, 1070 (1957).
- [7] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (3rd Ed.) p. 37, The Clarendon Press, Oxford (1947).

## §5. Considerazioni generali sulle verifiche sperimentali delle disuguaglianze di Bell

I risultati di Bell del 1964 possono portare a pensare che le teorie realistiche locali non descrivano correttamente la realtà, per il fatto che sono in disaccordo con la meccanica quantistica e questa è stata abbondantemente confermata in una grande varietà di situazioni sperimentali. Comunque, se si procede ad un esame critico, si trova che le situazioni che esibiscono il disaccordo scoperto da Bell sono piuttosto rare, e nessuna è stata mai verificata sperimentalmente. È chiaro che la descrizione di sistemi fisici correlati ma spazialmente separati può essere il punto di maggior vulnerabilità della meccanica quantistica. In vista delle conseguenze del teorema di Bell è quindi importante progettare esperimenti per verificare esplicitamente le previsioni delle teorie realistiche locali.

Nel seguito di questo paragrafo passeremo brevemente in rassegna i più importanti esperimenti effettuati fino al 1978.<sup>12</sup> Gli esperimenti di gran lunga più completi dal 1978 ad oggi sono quelli eseguiti da A. Aspect e collaboratori; ad essi sarà dedicata la traduzione di un lavoro di rassegna di A. Aspect stesso.

Gli esperimenti destinati alla verifica delle disuguaglianze di Bell sono essenzialmente di tre tipi:<sup>13</sup>

- i) annichilazione del positronio;<sup>14</sup>
- ii) urti protone - protone a bassa energia;
- iii) cascate fotoniche in fisica atomica.

### *Annichilazione del positronio*

Il primo esperimento che utilizza l'annichilazione del positronio è stato effettuato da Kasday et al. nel 1970 e ripetuto nel 1975.<sup>15</sup> Gli autori hanno usato come sorgente di positroni atomi

<sup>12</sup> J. F. Clauser and A. Shimony, Rep. Prog. Phys. **41** (1978) 1881

<sup>13</sup> La classificazione seguente non è in ordine cronologico.

<sup>14</sup> Il positronio è un "atomo" di idrogeno in cui al protone viene sostituito un positrone, antiparticella dell'elettrone. È un sistema instabile poiché elettrone e positrone si annichilano in onda  $s$  producendo due fotoni.

<sup>15</sup> L. R. Kasday, J. D. Ullman and C. S. Wu, Bull. Am. Phys. Soc. **15** (1970) 586; Nuovo Cim. **B** (1975) 633.

di  $^{64}\text{Cu}$  (decadimento  $\beta^+$ ); i positroni venivano quindi fatti annichilare su un bersaglio di rame. Siccome l'annichilazione del positronio avviene in onda  $s$ , i due fotoni prodotti si trovano nello stato di singoletto di spin. Sono state effettuate misurazioni di correlazione delle polarizzazione dei fotoni ed è stato trovato un buon accordo quantitativo con la meccanica quantistica.

Successivamente al primo esperimento di Kasday et al. del 1970, Faraci et al.<sup>16</sup> hanno effettuato un esperimento molto simile a quello precedente, ma con risultati molto diversi. Infatti gli autori trovano un forte disaccordo con la meccanica quantistica e inoltre vedono una dipendenza dei risultati dalla distanza tra la sorgente di positroni e l'apparecchio di misurazione.

Due anni dopo l'esperimento di Faraci et al. sono stati pubblicati i risultati di un esperimento condotto da Wilson et al.<sup>17</sup> I tre autori hanno ripetuto l'esperimento con  $^{64}\text{Cu}$ , ritrovando, come nel caso di Kasday et al., perfetto accordo con la meccanica quantistica; inoltre non è stata osservata alcuna dipendenza dei risultati dalla distanza sorgente - apparecchio.

Infine nel 1977 è stato effettuato un esperimento da Bruno et al.<sup>18</sup> Gli autori hanno effettuato un esperimento simile ai precedenti, utilizzando però, come sorgente di positroni, il  $^{22}\text{Na}$  e adottando una selezione degli eventi più raffinata. I risultati di Kasday et al. e Wilson et al. sono stati confermati: ottimo accordo con la meccanica quantistica e nessuna dipendenza dei risultati dalla distanza sorgente - apparecchio.

### *Urti protone - protone a bassa energia*

La sola verifica delle previsioni del teorema di Bell effettuata fino ad ora senza far uso di fotoni è quella di Laméhi-Rachti e Mittag del 1976.<sup>19</sup> Essi hanno misurato le correlazioni di spin in coppie di protoni preparate da urti a bassa energia in onda  $s$ . L'esperimento è stato effettuato facendo incidere protoni a bassa energia generati dall'acceleratore di Saclay su un bersaglio

<sup>16</sup> G. Faraci, S. Gutkowski, S. Notarrigo and A. R. Pennisi, Lett. Nuovo Cim. **9** (1974) 607.

<sup>17</sup> A. R. Wilson, J. Lowe and D. K. Butt, F. Phys. G: Nucl. Phys. **2** (1976) 613.

<sup>18</sup> M. Bruno, M. d'Agostino and C. Maroni, Nuovo Cim. **40B** (1977) 142.

<sup>19</sup> M. Laméhi-Rachti and W. Mittag, Phys. Rev. **14** (1976) 2543.

contenente idrogeno. I protoni del fascio e quelli dell'idrogeno venivano diffusi e le loro polarizzazioni analizzate. I risultati sono in buon accordo con la meccanica quantistica.

### *Cascate fotoniche in fisica atomica*

Il primo esperimento che utilizza cascate atomiche è stato effettuato da Freedman et al. nel 1972.<sup>20</sup> Gli autori hanno effettuato misurazioni di correlazione di polarizzazione su coppie di fotoni a 5513 Å e 4227 Å generati dalla cascata  $4p^2^1S_0 \rightarrow 4p4s^1P_1 \rightarrow 4p^2^1S_0$  del calcio.<sup>21</sup> L'esperimento è in ottimo accordo con la meccanica quantistica.

Successivamente Holt et al.<sup>22</sup> hanno effettuato un esperimento analogo con fotoni da 5676 Å e 4047 Å generati dalla cascata  $9^1P_1 \rightarrow 7^3S_1 \rightarrow 6^3P_0$  del  $^{198}\text{Hg}$ . Gli autori hanno registrato un netto disaccordo con la meccanica quantistica. In realtà in seguito è stata trovata almeno una sorgente di errore sistematico, ma l'esperimento non è più stato ripetuto.

Del 1974 è l'esperimento di Clauser et al.<sup>23</sup> Gli autori hanno ripetuto l'esperimento di Holt e Pipkin usando come sorgente il  $^{202}\text{Hg}$ . In una prima fase di lavoro i risultati erano in forte disaccordo con la meccanica quantistica a causa di un errore sistematico. Trovata quindi la sorgente d'errore e ripetuto l'esperimento, i risultati si sono dimostrati in perfetto accordo con le previsioni quantomeccaniche.

L'esperimento più recente con cascate atomiche, a parte gli esperimenti di Aspect, è quello di Fry et al.<sup>24</sup> Gli autori hanno usato la cascata  $7^3S_1 \rightarrow 6^3P_1 \rightarrow 6^1S_0$  del  $^{200}\text{Hg}$  per generare fotoni da 4358 Å e 2537 Å. I risultati sperimentali confermano la meccanica quantistica.

<sup>20</sup> S. J. Freedman, Lawrence Berkeley Lab. Rep. No LBL 391 (1972); S. J. Freedman and J. F. Clauser, Phys. Rev. Lett. **38** (1972) 938.

<sup>21</sup> Nel lavoro originale di Aspect vedremo in dettaglio come si possa generare una cascata atomica.

<sup>22</sup> R. A. Holt, PhD Thesis, Harvard University (1973); R. A. Holt and F. M. Pipkin, Preprint Harvard University (1973).

<sup>23</sup> J. F. Clauser, Phys. Rev. **A6** (1972) 49; Phys. Rev. **D9** (1974) 853; J. F. Clauser and M. A. Horne, Phys. Rev. **D10** (1974) 526.

<sup>24</sup> E. S. Fry, Phys. Rev. **A8** (1973) 1219; E. S. Fry and R. C. Thompson, Phys. Rev. Lett. **37** (1976) 465.

Alcuni commenti sono opportuni a questo punto. Dall'esame sommario degli esperimenti abbiamo visto come la maggior parte di essi sia in accordo con la meccanica quantistica, ma ci siano anche alcuni esperimenti in netto disaccordo con essa. Del resto, dalla discussione sulla disuguaglianza di Bell risulta che, nelle situazioni esaminate dagli esperimenti, la meccanica quantistica prevede "più correlazioni" delle teorie realistiche locali. Il fatto che tali correlazioni siano difficilmente rilevabili può quindi spiegare perché esistano esperimenti in disaccordo con la meccanica quantistica: una qualunque sorgente d'errore tende infatti a nascondere le correlazioni, e non ad esaltarle. Vedremo nel prossimo paragrafo quali precauzioni sia necessario adottare perché il segnale sperimentale non venga irrimediabilmente distrutto dal rumore.

# Verifiche sperimentali delle disuguaglianze di Bell in fisica atomica<sup>†</sup>

## I. Introduzione

Le disuguaglianze di Bell forniscono un criterio quantitativo per mettere a confronto certe ragionevoli teorie a parametri supplementari con la meccanica quantistica. Grazie a Bell [1], il dibattito sulla possibilità di completare la meccanica quantistica mediante una sottostruttura più fondamentale è stato portato nel dominio sperimentale.

Le motivazioni per considerare parametri supplementari saranno discusse nell'ambito dell'analisi del famoso *esperimento concettuale* di Einstein - Podolsky - Rosen [2]. Introducendo una ragionevole condizione di località, è possibile derivare il teorema di Bell, che dice che

- (i) le teorie a parametri supplementari locali sono soggette alle disuguaglianze di Bell;
- (ii) certe previsioni della meccanica quantistica a volte violano le disuguaglianze di Bell.

Metteremo in rilievo che un'assunzione fondamentale per il conflitto è l'assunzione di località. Mostriamo che in una versione più sofisticata dell'esperimento ideale EPR ("timing experiment"), la condizione di località può essere considerata come conseguenza della località einsteiniana, impedendo interazioni superluminali.<sup>25</sup>

Lo scopo di questa discussione è convincere il lettore che il formalismo che conduce alle disuguaglianze di Bell è molto generale e ragionevole. Ciò che è sorprendente è che esso è in conflitto con la meccanica quantistica.

Come dato di fatto, situazioni che esibiscono tale conflitto sono molto rare, ed è stato necessario progettare esperimenti speciali

---

<sup>†</sup> di A. Aspect, Istituto di Ottica Teorica e Applicata, Centro Universitario di Orsay, BP 43 91406 Orsay Cedex, Francia. Testo pubblicato su "*Atomic Physics 8*", Rendiconti della "Ottava Conferenza Internazionale sulla Fisica Atomica, 2 - 6 Agosto 1982, Göteborg, Svezia. Edito da I. Lindgren, A. Rosén e S. Svanberg.

<sup>25</sup> interazioni che si propagano con velocità superiore a quella della luce.

per ottenere una prova significativa. La fisica atomica è il campo dove sono stati effettuati gli esperimenti che seguono più da vicino lo schema ideale dell'esperimento concettuale. Passeremo in rassegna questi esperimenti e i loro risultati.

## II. Perché parametri supplementari? L'esperimento concettuale di Einstein - Podolsky - Rosen - Bohm

### Schema sperimentale

Consideriamo la variante ottica dell'esperimento concettuale di EPR modificata da Bohm [1]. Una sorgente  $S$  emette una coppia di fotoni con differenti energie,  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , che si propagano in versi opposti lungo  $\pm Oz$  (Fig. 1).

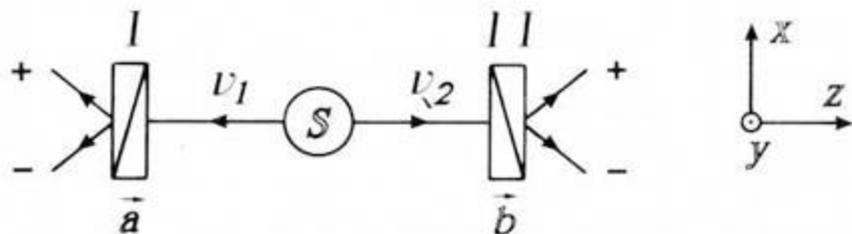


Fig. 1. L'esperimento concettuale di Einstein - Podolsky - Rosen - Bohm con fotoni. I due fotoni  $\nu_1$  e  $\nu_2$ , emessi nello stato (1), sono analizzati mediante polarizzatori lineari orientati in direzione  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . È possibile misurare le probabilità di rivelazione singola o congiunta dopo i polarizzatori.

Supponiamo che la parte di polarizzazione dei loro vettori di stato sia:

$$|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = (1/\sqrt{2})[|x, x\rangle + |y, y\rangle], \quad (1)$$

dove  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$  sono stati di polarizzazione lineare.

Effettuiamo su questi fotoni misurazioni di polarizzazione lineare. L'analizzatore I, orientato in direzione  $\vec{a}$ , seguito da due rivelatori, fornisce il risultato  $+$  o  $-$ , in corrispondenza di una polarizzazione lineare parallela o perpendicolare ad  $\vec{a}$ . L'analizzatore II, orientato in direzione  $\vec{b}$ , funziona in modo simile.\*

È facile derivare le previsioni della meccanica quantistica per queste misurazioni, singole o in coincidenza.

Sia  $P_{\pm}(\vec{a})$  la probabilità di ottenere il risultato  $\pm$  per  $\nu_1$ ; similmente  $P_{\pm}(\vec{b})$  è correlata a  $\nu_2$ . La meccanica quantistica prevede:

$$\begin{aligned} P_+(\vec{a}) &= P_-(\vec{a}) = 1/2, \\ P_+(\vec{b}) &= P_-(\vec{b}) = 1/2. \end{aligned} \quad (2)$$

Sia  $P_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$  la probabilità di rivelazione congiunta di  $\nu_1$  nel canale  $\pm$  di I (orientato in direzione  $\vec{a}$ ), e di  $\nu_2$  nel canale  $\pm$  di II ( $\vec{b}$ ). La meccanica quantistica prevede:

$$\begin{aligned} P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) &= P_{--}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\vec{a}, \vec{b}), \\ P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) &= P_{-+}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \sin^2(\vec{a}, \vec{b}). \end{aligned} \quad (3)$$

### Correlazioni

Nella situazione speciale  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$  si trova

$$P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) = P_{--}(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2},$$

mentre

$$P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) = P_{-+}(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Così, se  $\nu_1$  viene rivelato nel canale  $+$  di I (la cui probabilità è 50%), siamo sicuri di trovare  $\nu_2$  nel canale  $+$  di II (e analogamente per i canali  $-$ ). C'è una forte correlazione tra i risultati delle misurazioni su  $\nu_1$  e  $\nu_2$ .

\* C'è corrispondenza biunivoca con l'esperimento concettuale per una coppia di particelle a spin  $1/2$ , nello stato di singoletto, e analizzate mediante due filtri Stern - Gerlach [3].

Un modo conveniente di spiegare queste correlazioni è il coefficiente di correlazione di polarizzazione:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + P_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{-+}(\vec{a}, \vec{b}). \quad (4)$$

La previsione della meccanica quantistica è

$$E_{MQ}(\vec{a}, \vec{b}) = \cos 2(\vec{a}, \vec{b}). \quad (5)$$

Per  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ , si trova  $E_{MQ}(0) = 1$ , cioè una completa correlazione.

### *Parametri supplementari*

Le correlazioni tra misurazioni distanti su due sistemi che si siano separati possono essere facilmente capite in termini di proprietà comuni dei due sistemi. Consideriamo ancora le correlazioni di misurazioni di polarizzazione nel caso  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ . Quando troviamo + per  $\nu_1$ , siamo sicuri di trovare + per  $\nu_2$ . Quindi siamo portati ad ammettere che c'è qualche proprietà (Einstein la chiamò "un elemento di realtà fisica") caratteristica di questa particolare coppia, e tale da determinare il risultato ++. Per un'altra coppia, i risultati saranno --; la proprietà invocata è differente.

Tali proprietà, essendo differenti da coppia a coppia, non sono prese in considerazione dal vettore di stato quantomeccanico  $|\Psi(1, 2)\rangle$  che è il medesimo per tutte le coppie. Ecco perché Einstein concluse che la meccanica quantistica non è completa. Ed ecco perché tali proprietà sono indicate come "parametri supplementari" (a volte chiamati "variabili nascoste").

Come conclusione, si può sperare di "capire" le correlazioni EPR mediante tale descrizione di tipo classico, che coinvolge parametri supplementari differenti da coppia a coppia. Si può sperare di ritrovare le previsioni della meccanica quantistica mediando sui parametri supplementari. Sembra che questa fu la posizione di Einstein [4]. A questo stadio, l'adesione a questo punto di vista è solamente una questione di gusto.<sup>26</sup>

<sup>26</sup> Poiché Einstein parlava di "un elemento di realtà fisica", alcuni autori chiamano le teorie che fanno uso di parametri supplementari "teorie realistiche" [5].

### III. Le disuguaglianze di Bell

#### Formalismo

Bell ha tentato di tradurre in formule matematiche la discussione precedente, introducendo esplicitamente parametri supplementari chiamati  $\lambda$ . La loro distribuzione su un insieme di coppie emesse è specificata da una distribuzione di probabilità  $\rho(\lambda)$ , tale che

$$\rho(\lambda) \geq 0 \quad \text{e} \quad \int d\lambda \rho(\lambda) = 1. \quad (6)$$

Per una data coppia, caratterizzata da un dato  $\lambda$ , i risultati della misurazione saranno

$$\begin{aligned} A(\lambda, \vec{a}) &= \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} && \text{analizzatore I (direzione } \vec{a}), \\ B(\lambda, \vec{b}) &= \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} && \text{analizzatore II (direzione } \vec{b}). \end{aligned} \quad (6')$$

Una teoria particolare deve essere in grado di fornire esplicitamente le funzioni  $\rho(\lambda)$ ,  $A(\lambda, \vec{a})$  e  $B(\lambda, \vec{b})$ .

È quindi facile esprimere le probabilità dei vari risultati. Per esempio  $P_+(\vec{a}) = \frac{1}{2} \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\lambda, \vec{a}) + 1]$  ecc. In particolare, faremo uso della funzione di correlazione:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b}). \quad (7)$$

#### Un semplice esempio

Supponiamo che i due fotoni di una coppia siano emessi con la stessa polarizzazione lineare, definita dal suo angolo  $\lambda$  con l'asse  $O\vec{x}$  (Fig. 2).

La distribuzione di probabilità è assunta isotropa:

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}.$$

Come semplice modello per il polarizzatore I assumiamo di avere il risultato +1 se

$$|\vartheta_I - \lambda| \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{o} \quad |\vartheta_I - \lambda| \geq \frac{3\pi}{4}.$$

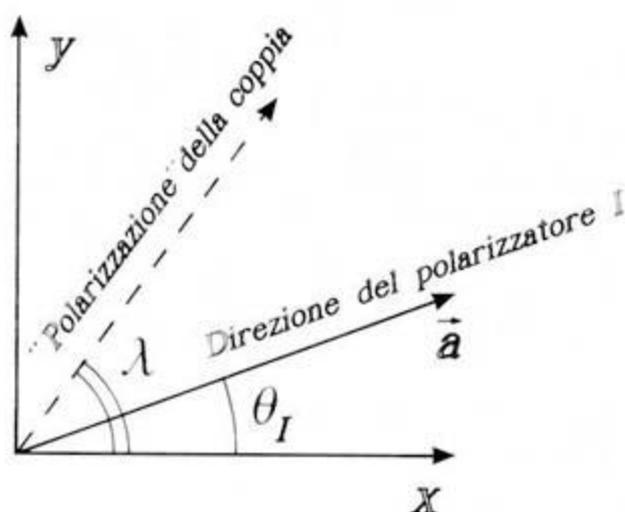


Fig. 2. Il nostro esempio. Ogni coppia possiede una "direzione di polarizzazione", definita da  $\lambda$ .

Il risultato  $-1$  è ottenuto per

$$\frac{\pi}{4} < |\vartheta_I - \lambda| < \frac{3\pi}{4}.$$

La risposta può quindi essere scritta

$$A(\lambda, \vec{a}) = \frac{\cos 2(\vartheta_I - \lambda)}{|\cos 2(\vartheta_I - \lambda)|}.$$

Analogamente

$$B(\lambda, \vec{b}) = \frac{\cos 2(\vartheta_{II} - \lambda)}{|\cos 2(\vartheta_{II} - \lambda)|}.$$

Con questo modello troviamo:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = 1 - 4 \frac{|\vartheta_I - \vartheta_{II}|}{\pi} = 1 - 4 \frac{|(\vec{a}, \vec{b})|}{\pi}.$$

Come il risultato della meccanica quantistica,  $E(\vec{a}, \vec{b})$  dipende solamente dall'angolo relativo  $(\vec{a}, \vec{b})$ . Fig. 3 mostra un confronto tra questo risultato e la previsione quantomeccanica.

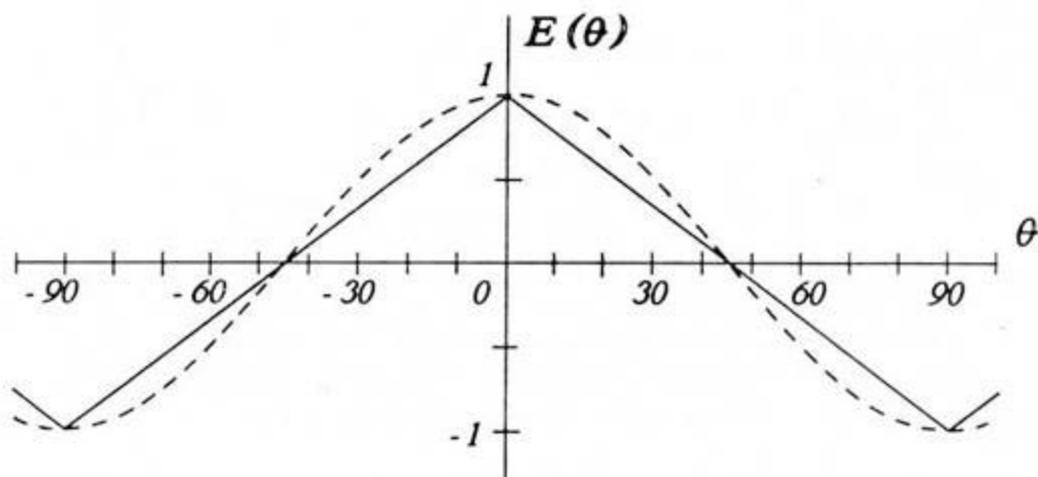


Fig. 3. Coefficiente di correlazione di polarizzazione come funzione delle orientazioni relative dei polarizzatori. Risultato quantomeccanico (linea tratteggiata) e del nostro semplice modello (linea continua).

L'accordo è soddisfacente. Si potrebbe sperare che qualche modello un po' più complicato sarà in grado di riprodurre esattamente le previsioni quantomeccaniche. La scoperta di Bell consiste nel fatto che questa scoperta è senza speranza.

### Disuguaglianze

Prendiamo in considerazione la quantità

$$\begin{aligned}
 s &= A(\lambda, \vec{a})B(\lambda, \vec{b}) - A(\lambda, \vec{a})B(\lambda, \vec{b}') \\
 &+ A(\lambda, \vec{a}')B(\lambda, \vec{b}) + A(\lambda, \vec{a}')B(\lambda, \vec{b}') \\
 &= A(\lambda, \vec{a}) [B(\lambda, \vec{b}) - B(\lambda, \vec{b}')] + A(\lambda, \vec{a}') [B(\lambda, \vec{b}) + B(\lambda, \vec{b}')].
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Ricordando che i quattro numeri  $A$  e  $B$  assumono solo i valori  $\pm 1$ , troviamo che

$$s(\lambda, \vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') = \pm 2.$$

La media di  $\lambda$  è pertanto compresa tra  $+2$  e  $-2$ , cioè

$$-2 \leq \int d\lambda \rho(\lambda) s(\lambda, \vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') \leq 2.$$

Secondo la (7), riscriviamo quest'ultima

$$-2 \leq S(\vec{a}, \vec{a}', \vec{b}, \vec{b}') \leq 2, \quad (9)$$

con

$$S = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}').$$

Queste sono le disuguaglianze di BCHSH, cioè le disuguaglianze di Bell generalizzate da Clauser, Horn, Shimony, Holt [6]. Esse sono basate su una combinazione di quattro coefficienti di correlazione di polarizzazione, misurati in quattro orientazioni dei polarizzatori.  $S$  è pertanto una quantità misurabile.

#### IV. Conflitto con la meccanica quantistica

##### *Evidenza*

Prendiamo il particolare insieme di orientazioni di Fig. 4a. Sostituendo le grandezze  $E$  con i loro valori quantomeccanici (5) per coppie nello stato (1), otteniamo:

$$S_{QM} = 2\sqrt{2}.$$

Questa previsione quantomeccanica viola fortemente il limite superiore delle disuguaglianze (9). Pertanto troviamo impossibile riconciliare il formalismo definito in (6) e (6') con le previsioni della meccanica quantistica per il particolare stato (1) (tipo EPR).

##### *Studio generale*

Noi cerchiamo il massimo conflitto, e deriviamo  $S$  rispetto ai tre angoli  $(\vec{a}, \vec{b})$ ,  $(\vec{b}, \vec{a}')$  e  $(\vec{a}', \vec{b}')$  (che sono indipendenti).  $S_{MQ}$  è estremo se

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}') = (\vec{a}', \vec{b}') = \vartheta$$

e assume il valore

$$S_{MQ}(\vartheta) = 3 \cos 2\vartheta - \cos 6\vartheta.$$

Derivando ora rispetto a  $\vartheta$ , otteniamo il massimo e il minimo valore di  $S_{MQ}$ :

$$\begin{aligned} S_{MQ}^{Max} &= 2\sqrt{2} & \text{per} & \quad \vartheta = \pi/8, \\ S_{MQ}^{Min} &= -2\sqrt{2} & \text{per} & \quad \vartheta = 3\pi/8. \end{aligned} \quad (10)$$

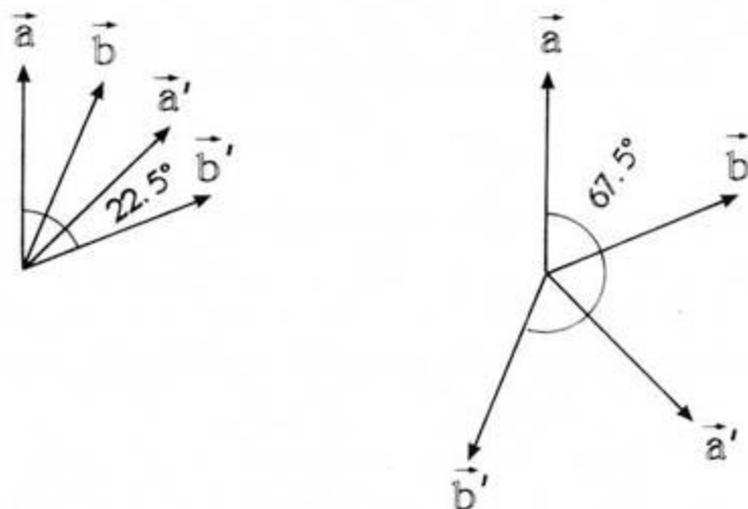


Fig. 4. Le orientazioni che portano al massimo conflitto tra le disuguaglianze di Bell e la meccanica quantistica

Le corrispondenti orientazioni sono mostrate in Fig. 4. Fig. 5 mostra le variazioni di  $S_{MQ}(\vartheta)$  e i limiti dati dalle disuguaglianze BCHSH. Si vede che il conflitto è serio.

## V. Discussione delle ipotesi

Per tentare di capire quale parte del formalismo provoca questo conflitto, mettiamo in luce le ipotesi assunte dal formalismo (6) e (6'). I parametri supplementari  $\lambda$  sono stati introdotti per spiegare le correlazioni EPR mediante alcune proprietà comuni dei due fotoni. Questo punto è già stato discusso.

Il formalismo usato è deterministico. Quando  $\lambda$  è fissato, allora i risultati delle misurazioni  $A(\lambda, \vec{a})$  e  $B(\lambda, \vec{b})$  sono certi, cioè  $\lambda$  determina il risultato. Si potrebbe pensare che proprio questa è la ragione che determina il conflitto con la meccanica quantistica. Ma Bell [1] e Clauser e Horne [7] hanno costruito teorie a parametri supplementari stocastici che non sono deterministiche, e che nondimeno conducono alle disuguaglianze di Bell. Il carattere

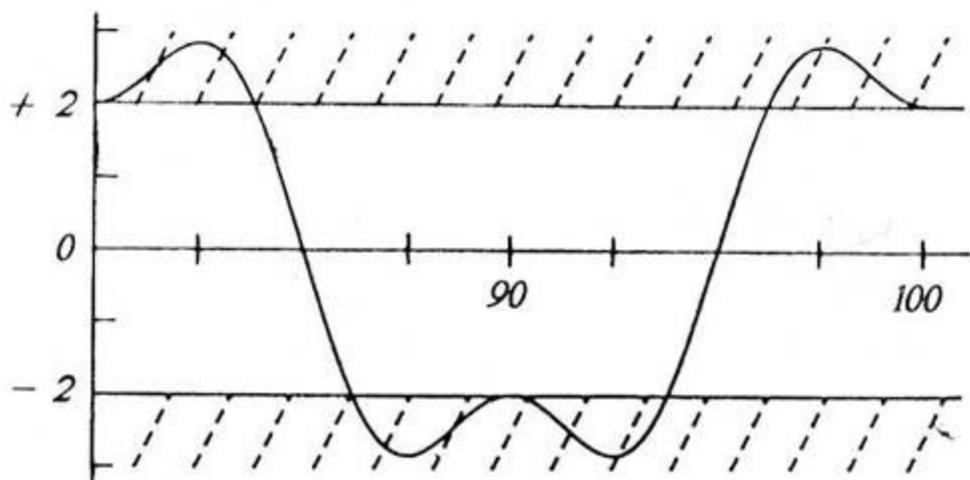


Fig. 5.  $S(\vartheta)$  come previsto dalla meccanica quantistica per coppie nello stato (1). Il conflitto nasce nella zona tratteggiata.

deterministico non sembra sufficiente a portare a un conflitto.\*

Come sottolineato da Bell, il formalismo è consistente con una condizione di località. Il risultato di una misurazione a I,  $A(\lambda, \vec{a})$ , non dipende dall'orientazione  $\vec{b}$  del polarizzatore remoto II, e viceversa, né  $\rho(\lambda)$  (cioè il modo in cui le coppie sono emesse) dipende dalle orientazioni  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Le disuguaglianze di Bell non valgono più se non facciamo l'assunzione di località (è facile vedere che la dimostrazione del paragrafo 3 cade con quantità come  $A(\lambda, \vec{a}, \vec{b})$  o  $\rho(\lambda, \vec{a}, \vec{b})$ ).

Come riassunto di questa discussione, possiamo dire che il teorema di Bell stabilisce un conflitto tra teorie a parametri supplementari locali e certe previsioni quantomeccaniche. Esso fornisce un criterio quantitativo per questo conflitto, che ci permetterà di progettare esperimenti sensibili.

\* Questa conclusione non è condivisa da tutti gli autori. A. Fine [8], ad esempio, pensa che le teorie stocastiche di Bell o di Clauser e Horne non raggiungono ulteriore generalità, poiché esse possono essere mimate da una teoria deterministica.

## VI. L'esperimento concettuale con analizzatori variabili: la condizione di località come conseguenza della causalità di Einstein

In esperimenti statici, in cui i polarizzatori sono tenuti fissi per l'intera durata di un periodo di raccolta dati, la condizione di località deve essere presa come assunzione. Sebbene molto ragionevole, essa non è prescritta da alcuna legge fisica fondamentale. Per citare J. Bell "la disposizione degli strumenti è fatta sufficientemente in anticipo da consentire loro di raggiungere un qualche mutuo rapporto mediante scambio di segnali con velocità minore o uguale a quella della luce". Se tali interazioni esistessero, la condizione di località non varrebbe più per esperimenti statici, né varrebbero le disuguaglianze di Bell.

Bell ha pertanto sottolineato l'importanza di "esperimenti del tipo proposto da Bohm e Aharonov [4], in cui le disposizioni vengono cambiate durante il volo delle particelle".\*

In un esperimento di questo tipo, la condizione di località diventerebbe una conseguenza della causalità di Einstein, che impedisce ogni influenza superluminale.

Come mostrato nella nostra proposta del 1975 [9], è sufficiente commutare l'orientazione di ciascun polarizzatore tra due particolari disposizioni ( $\vec{a}$  e  $\vec{a}'$  per I,  $\vec{b}$  e  $\vec{b}'$  per II). Diviene quindi possibile sottoporre a verifica sperimentale una classe più ampia di teorie a parametri supplementari: quelle che obbediscono alla causalità di Einstein. In tali teorie, la risposta del polarizzatore I al tempo  $t$  può dipendere dall'orientazione  $\vec{b}$  (o  $\vec{b}'$ ) di II al tempo  $t - L/c$  ( $L$  essendo la distanza tra i polarizzatori). Una simile dipendenza ritardata è presa in considerazione per il modo in cui le coppie sono emesse alla sorgente (caratterizzata dalla distribuzione dei parametri supplementari). Per tempi di commutazione casuali, con entrambi i lati scorrelati, le previsioni di queste teorie più generali sono sottoposte al vincolo di disuguaglianze di Bell generalizzate [9].

D'altra parte, è facile mostrare che le correlazioni di polarizzazione previste dalla meccanica quantistica dipendono solamente dalle orientazioni  $\vec{a}$  o  $\vec{a}'$  e  $\vec{b}$  o  $\vec{b}'$  solo all'istante delle misurazioni, e non coinvolgono termini ritardati del tipo  $L/c$ .

\* L'idea era già stata espressa nel libro di Bohm [3].

Per una scelta opportuna dell'insieme di orientazioni ( $\vec{a}$ ,  $\vec{a}'$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{b}'$ ) – per esempio gli insiemi mostrati in Fig. 4 – le previsioni quantomeccaniche sono ancora in conflitto con le disuguaglianze di Bell generalizzate.

Un tale esperimento ad analizzatori mobili fornirebbe quindi un confronto tra teorie a parametri supplementari, che obbediscano alla causalità di Einstein, e la meccanica quantistica.

## VII. Considerazioni generali riguardanti un esperimento reale sensibile

*Le situazioni sensibili sono rare*

La meccanica quantistica è stata sottoposta a verifica in una così grande varietà di esperimenti che il teorema di Bell potrebbe apparire come una dimostrazione di impossibilità di parametri supplementari. Comunque, le situazioni in cui questo conflitto nasce (situazioni sensibili) sono rare; dal 1965 non ne è stata realizzata nessuna.

Le disuguaglianze di Bell pongono ovviamente limiti sull'intera fisica classica, cioè la meccanica classica e l'elettrodinamica classica, che possono essere espresse secondo il formalismo (6) e (6') (per esempio, nella meccanica classica, possiamo prendere come  $\lambda$  le posizioni e velocità iniziali). Inoltre, in una situazione che coinvolge due misurazioni correlate su due sottosistemi separati, la meccanica quantistica prevederà molto raramente una violazione delle disuguaglianze di Bell. Senza essere esaustivi, possiamo mettere in evidenza due importanti condizioni necessarie per un esperimento sensibile (secondo la meccanica quantistica):

- (i) i due sottosistemi devono essere in uno stato non fattorizzato, come lo stato di singoletto per due particelle a spin 1/2, o lo stato analogo (1) per due fotoni;
- (ii) per ciascun sottosistema, deve essere possibile scegliere la quantità misurata tra almeno due osservabili non commutanti (come misurazioni di polarizzazione lungo direzioni  $\vec{a}$  e  $\vec{a}'$  né parallele né perpendicolari).

Come dato di fatto, queste sono condizioni stringenti.

### Condizioni sui tempi

Come abbiamo visto, la condizione di località può essere derivata dalla causalità di Einstein, se l'esperimento soddisfa alcune richieste che possono essere suddivise in due condizioni:

- (i) le misurazioni sui due sottosistemi hanno separazione *space-like*;<sup>27</sup>
- (ii) le scelte delle quantità misurate su ogni sottosistema sono fatte a caso, e hanno separazione *space-like* dalla misurazione effettuata al lato opposto.

È ovviamente molto più difficile soddisfare la seconda condizione.

### Produzione di coppie di fotoni correlati in polarizzazione

Come sottolineato da CHSH [6], coppie di fotoni emesse in opportune cascate radiative atomiche sono buoni candidati per un test sensibile. Si consideri ad esempio una cascata  $(J = 0) \rightarrow (J = 1) \rightarrow (J = 0)$ , negli stati di singoletto di una terra alcalina (Fig. 6). Supponiamo di selezionare, facendo uso di filtri di frequenza e collimatori, due onde piane di frequenze  $\nu_1$  e  $\nu_2$  che si propagano lungo  $-Oz'$  e  $+Oz'$  (Fig. 7).

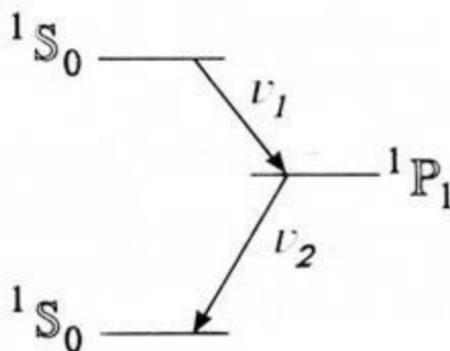


Fig. 6. Cascata radiativa che emette coppie di fotoni correlati in polarizzazione (si noti che si possono usare solamente isotopi pari [10]).

<sup>27</sup> i due eventi non sono in relazione causale tra loro, cioè non si possono influenzare mediante segnali che si propagano a velocità inferiore o uguale a quella della luce.

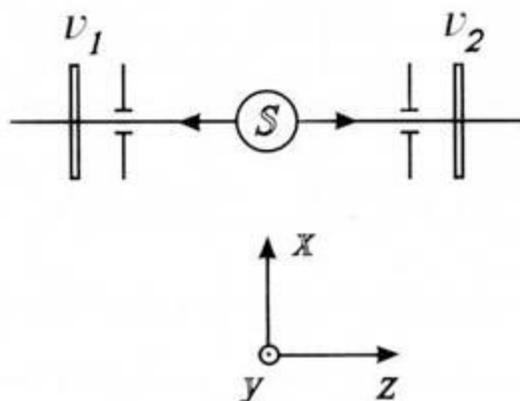


Fig. 7. Configurazione ideale (angoli solidi infinitamente piccoli).

È facile mostrare, invocando la conservazione della parità e del momento angolare, che la parte di polarizzazione del vettore di stato che descrive la coppia  $(\nu_1, \nu_2)$  può essere scritta

$$(1/\sqrt{2})[|R, R\rangle + |L, L\rangle], \quad (11)$$

dove  $R$  e  $L$  sono stati a polarizzazione circolare. Esprimendo  $|R\rangle$  e  $|L\rangle$  su una base a polarizzazione lineare, otteniamo lo stato (1)

$$|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = (1/\sqrt{2})[|x, x\rangle + |y, y\rangle].$$

Sappiamo che tale coppia è un buon candidato per un esperimento sensibile, poiché le corrispondenti previsioni quantomeccaniche violano le disuguaglianze di Bell.

#### *Esperimento reale*

Un esperimento reale differisce da quello ideale sotto diversi aspetti. Per esempio, la luce dovrebbe essere raccolta in angoli solidi finiti, grandi il più possibile (Fig. 8). Si può mostrare [10] che allora il contrasto tra le funzioni di correlazione decresce, poiché (5) è sostituita da

$$E_{MQ}(\vec{a}, \vec{b}) = F(\vec{u}) \cos 2(\vec{a}, \vec{b}), \quad (12)$$

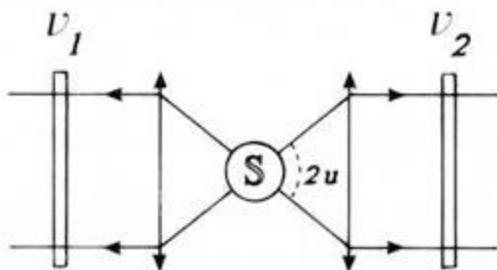


Fig. 8. Configurazione realistica con angoli solidi finiti.

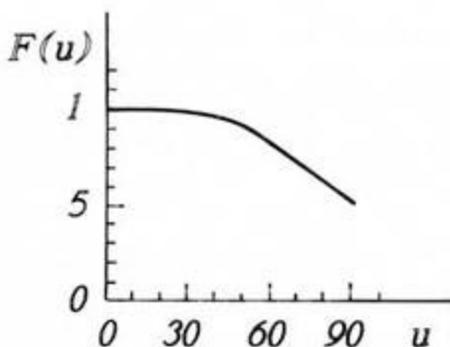


Fig. 9.  $F(u)$  per una cascata  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ .

dove  $F(\vec{u}) \leq 1$ .

Fig. 9 mostra  $F(\vec{u})$  per una cascata di terra alcalina  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$  (senza struttura iperfine). Fortunatamente si possono usare grandi angoli senza troppi danni. Per  $u = 32^\circ$  (il nostro esperimento),  $F(u) = 0.984$ .

Tutte le altre inefficienze - difetti dei polarizzatori, birifrangenze accidentali ecc. - porteranno analogamente a una diminuzione della funzione di correlazione  $E(\vec{a}, \vec{b})$ . La funzione  $S_{MQ}(\vartheta)$  (Fig. 5) è quindi moltiplicata per un fattore minore di 1, e il conflitto con le disuguaglianze di Bell diminuisce, o addirittura scompare.

Pertanto, un esperimento reale deve essere progettato con cura e ogni effetto di contorno deve essere valutato. Ogni cosa deve essere perfettamente sotto controllo poiché si può assumere che un effetto trascurato probabilmente porta ad una diminuzione del conflitto (si sa per esempio che la struttura iperfine diminuisce in

modo drammatico  $F(u)$ , cosicché si possono usare solo gli isotopi pari [10]).

### VIII. Esperimenti precedenti (1970 - 1976)<sup>[5,11]</sup>

Il lavoro di CHSH [6] del 1969 ha mostrato la possibilità di costruire esperimenti sensibili in fisica atomica. Due gruppi hanno cominciato a costruire un esperimento. Seguendo la proposta di CHSH, hanno usato un semplice schema sperimentale, con polarizzatori a un canale.

#### *Esperimenti con polarizzatori a un canale*

In questo schema sperimentale semplificato, si usano polarizzatori che trasmettono luce polarizzata parallelamente ad  $\vec{a}$  (o  $\vec{b}$ ), e bloccano quella polarizzata ortogonalmente. Pertanto si rivelano solo i risultati  $+$ , e le misurazioni di coincidenza forniscono solamente  $N_{++}((\vec{a}, \vec{b}))$ .

Vengono effettuati periodi di raccolta di dati ausiliari con uno o entrambi i polarizzatori rimossi (indichiamo  $\infty$  "l'orientazione" di un polarizzatore rimosso). Possiamo scrivere relazioni come:

$$\begin{aligned} N(\infty, \infty) &= N_{++}((\vec{a}, \vec{b})) + N_{+-}((\vec{a}, \vec{b})) \\ &\quad + N_{-+}((\vec{a}, \vec{b})) + N_{--}((\vec{a}, \vec{b})), \\ N_{++}((\vec{a}, \infty)) &= N_{++}((\vec{a}, \vec{b})) + N_{+-}((\vec{a}, \vec{b})), \\ &\text{ecc.} \end{aligned}$$

Sostituendo nelle disuguaglianze (9), si ottengono le nuove disuguaglianze BCHSH

$$-1 \leq S' \leq 0, \quad (13)$$

con

$$\begin{aligned} S' &= (1/N(\infty, \infty)) \left[ N(\vec{a}, \vec{b}) - N(\vec{a}, \vec{b}') + N(\vec{a}', \vec{b}) \right. \\ &\quad \left. + N(\vec{a}', \vec{b}') - N(\vec{a}', \infty) - N(\infty, \vec{b}) \right] \end{aligned}$$

(abbiamo ommesso gli indici  $++$ ).

Per lo stesso insieme di orientazioni di prima (Fig. 4), le previsioni quantomeccaniche violano le disuguaglianze (13):

$$\begin{aligned} S_{MQ}^{Max} &= \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \text{per } \vartheta &= \pi/8, \\ S_{MQ}^{Min} &= \frac{-\sqrt{2}-1}{2} & \text{per } \vartheta &= 3\pi/8. \end{aligned} \quad (14)$$

La derivazione delle disuguaglianze (13) richiede un'assunzione supplementare. Siccome le efficienze di rivelazione sono basse (a causa della piccola accettazione angolare e delle basse efficienze dei fotomoltiplicatori), le probabilità coinvolte in  $E(\vec{a}, \vec{b})$  (4) devono essere ridefinite sull'insieme delle coppie che sarebbero rivelate con i polarizzatori rimossi. Questo procedimento è valido solamente se si assume una ragionevole ipotesi sui rivelatori. L'assunzione CHSH stabilisce che "una volta che una coppia di fotoni sia passata dai polarizzatori, la probabilità di rivelarli in coincidenza è indipendente dalle orientazioni dei polarizzatori" (o dall'averli rimossi) [6]. Clauser e Horne hanno mostrato un'altra assunzione [7], che porta alle medesime disuguaglianze.\*

### Risultati

Nell'esperimento di Berkeley (Clauser e Freedman [12]), la cascata del Calcio  $4p^2\ ^1S_0 \rightarrow 4s4p\ ^1P_1 \rightarrow 4s^2\ ^1S_0$  è stata eccitata da assorbimento ultravioletto verso uno stato  $^1P_1$  ad energia più alta. Poiché il segnale era debole, e c'erano cascate spurie, ci vollero più di 200 ore di misurazione per ottenere un risultato significativo. L'esperimento confermava la meccanica quantistica, e violava le disuguaglianze (13) per diverse deviazioni standard.

Nello stesso periodo, ad Harvard, Holt e Pipkin [11] trovarono un risultato in disaccordo con le previsioni della meccanica quantistica, e in accordo con le disuguaglianze di Bell. Questi autori hanno eccitato la cascata del Mercurio  $200\ 9^1P_1 \rightarrow 7^3P_1 \rightarrow 6^3P_0$  mediante un fascio di elettroni. La raccolta dati durò 150 ore.

\* Sebbene queste assunzioni siano ragionevoli, ricordiamo che esistono teorie a parametri supplementari che non soddisfano ad esse. Dal punto di vista delle teorie a parametri supplementari, non c'è modo di sottoporre a prova sperimentale queste assunzioni [5].

Clauser [13] ha ripetuto il loro esperimento nel Mercurio 202. Ha trovato accordo con la meccanica quantistica, e una violazione delle disuguaglianze di Bell.

Nel 1976, a Houston, Fry e Tompson [14] hanno usato la cascata  $7^3S_1 \rightarrow 6^3P_1 \rightarrow 6^3S_0$  nel Mercurio 200. La loro eccitazione selettiva faceva uso di un laser C.W. a linea singola. Il segnale era diversi ordini di grandezza più grande che nei precedenti esperimenti, permettendo loro di raccogliere i dati in un periodo di 80 minuti. Il loro risultato era in eccellente accordo con la meccanica quantistica e violava le disuguaglianze di Bell generalizzate per 4 deviazioni standard.

## IX. L'esperimento di Orsay (1980 - 1982)

### La sorgente

Siccome il nostro scopo era di usare schemi sperimentali più sofisticati, per prima cosa abbiamo dovuto costruire una sorgente ad alta efficienza e molto stabile e ben controllata. Questa è stata ottenuta (Fig. 10) mediante un'eccitazione a due fotoni della cascata  $4p^2\ ^1S_0 \rightarrow 4s4p\ ^1P_1 \rightarrow 4s^2\ ^1S_0$  del Calcio [15]. Questa cascata si adatta molto bene a esperimenti di conteggio di coincidenze perché la vita media del livello  $\tau_r$  del livello intermedio è piuttosto breve (5 ns). Potendo raggiungere una velocità di eccitazione di circa  $1/\tau_r$ , allora per questa cascata si ottiene un rapporto segnale-rumore ottimale.

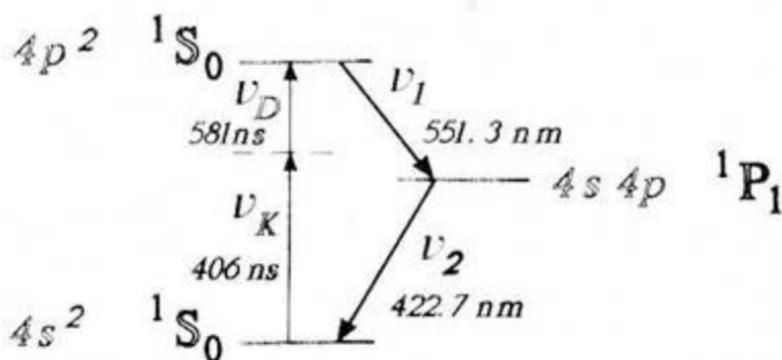


Fig. 10. L'eccitazione a due fotoni della cascata scelta nel Calcio

Noi abbiamo raggiunto questo tasso ottimale facendo uso di un laser a Krypton ( $\lambda_k = 406.7$  nm) e di un dye laser ( $\lambda_D = 581$  nm) sintonizzato alla risonanza per il processo a due fotoni. Entrambi i laser sono stati attivati in modo singolo. Essi hanno polarizzazioni parallele.

I laser sono focalizzati su un fascio atomico di Calcio (waists del fascio laser circa  $50 \mu\text{m}$ ).

Due cicli di retroazione assicurano la richiesta stabilità della sorgente (meglio di  $0.5 \%$  per diverse ore): il primo ciclo controlla la lunghezza d'onda del laser sintonizzabile per assicurare il massimo segnale di fluorescenza; un secondo ciclo controlla la potenza dei laser e compensa tutte le fluttuazioni.

Con poche decine di milliwatt da ogni laser, la velocità di cascata è circa  $N = 4 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ . Un aumento al di là di questa velocità non migliorerebbe in modo significativo il rapporto segnale-rumore per il conteggio di coincidenze, poiché il tasso di coincidenze accidentali cresce come  $N^2$ , mentre il vero tasso di coincidenze cresce come  $N$ .

#### *Rivelazione - Conteggio delle coincidenze*

La luce di fluorescenza è raccolta da lenti asferiche a grande apertura, seguite da un insieme di lenti e dai polarizzatori.

I fotomoltiplicatori alimentano l'elettronica del conteggio di coincidenze, che comprende un convertitore tempo - ampiezza e un analizzatore multicanale, che fornisce lo spettro di ritardo delle rivelazioni a due fotoni (Fig. 11). Questo spettro coinvolge un fondo piatto dovuto a coincidenze accidentali (cioè tra fotoni emessi da atomi differenti). Le vere coincidenze producono un picco attorno al ritardo nullo, con una diminuzione esponenziale (costante di tempo  $\tau_r$ ).

Il segnale delle vere coincidenze è pertanto assunto essere il segnale al picco.

Inoltre, un circuito a coincidenze standard con una finestra di coincidenza a  $19$  ns monitorizza il tasso di coincidenze attorno al ritardo nullo, mentre un canale a coincidenze ritardate monitorizza il tasso accidentale. È pertanto possibile verificare che il vero tasso di coincidenze ottenuto per sottrazione è uguale al segnale al picco dello spettro di ritardo.

Nel secondo e nel terzo esperimento, abbiamo usato un sistema

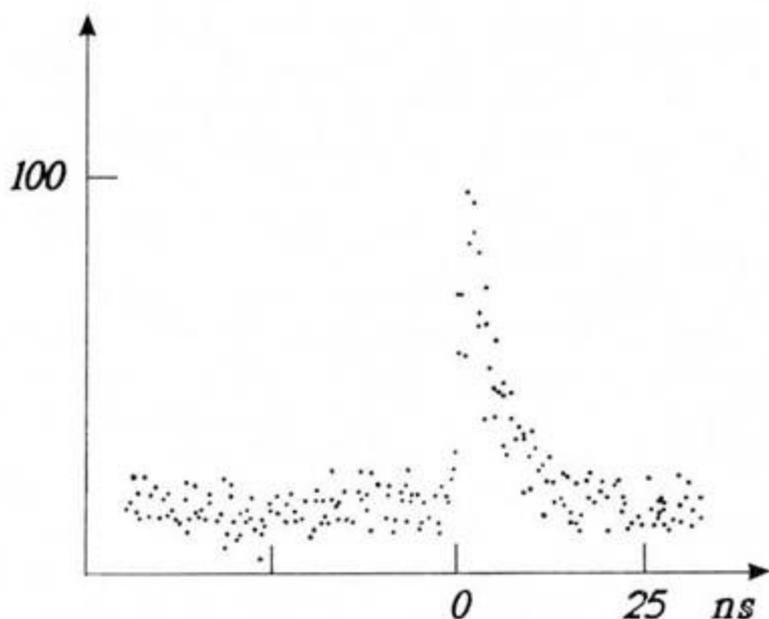


Fig. 11. Spettro di ritardo. Il numero delle coppie rivelate come funzione del ritardo tra le rivelazioni dei due fotoni.

a coincidenza quadrupla, formato da un quadruplo analizzatore multicanale e da quattro circuiti a doppia coincidenza. I dati sono stati raccolti automaticamente e analizzati al computer.

#### *Esperimento con polarizzatori a un canale [16]*

Il nostro primo esperimento è stato effettuato usando polarizzatori a pila di piatti a un canale, fatti di dieci piatti di vetro all'angolo di Brewster.

Grazie alla nostra sorgente ad alta efficienza, l'accuratezza statistica è stata meglio del 2 % in un periodo di presa dati di 100 s (con i polarizzatori rimossi). Questo ci ha permesso di effettuare varie verifiche.

La verifica delle disuguaglianze di Bell ha fornito

$$S'_{exp} = 0.126 \pm 0.014, \quad (15)$$

che viola le disuguaglianze (13) di 9 deviazioni standard, ed è in buon accordo con le previsioni quantomeccaniche (per i nostri

polarizzatori e angoli solidi):

$$S_{MQ} = 0.118 \pm 0.005$$

(questo errore tiene conto dell'incertezza nelle misurazioni delle efficienze dei polarizzatori).

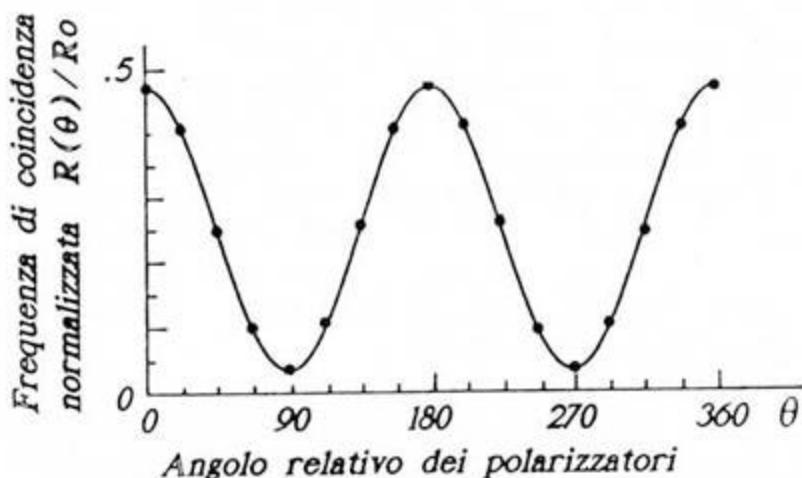


Fig. 12. Esperimento con polarizzatori a un canale: il tasso di coincidenza normalizzato come funzione delle orientazioni relative dei polarizzatori. Gli errori indicati sono  $\pm 1$  deviazioni standard. La curva continua non è un adattamento ai dati, ma la previsione della meccanica quantistica.

L'accordo tra i dati sperimentali e le previsioni quantomecchaniche è stato verificato su un campo completo di orientazioni a  $360^\circ$  (Fig. 12).

Per soddisfare la prima condizione sul tempo (par. 7) abbiamo ripetuto queste misurazioni con i polarizzatori a 6.5 m dalla sorgente. A tale distanza (quattro lunghezze di coerenza del pacchetto d'onda associato al tempo di vita  $\tau_r$ ) gli eventi rivelati hanno separazione space-like. Non si sono osservate variazioni nei risultati sperimentali.

*Esperimenti con polarizzatori a due canali* [17]

Con polarizzatori a canale singolo<sup>1</sup>, le misurazioni di polarizzazione sono intrinsecamente incomplete. Quando una coppia è stata emessa, se non si ottiene un conteggio a uno dei fotomoltiplicatori non c'è modo di sapere se "è stata persa" dal rivelatore o è stata bloccata dal polarizzatore (solo l'ultimo caso corrisponde a un risultato - per la misurazione). Ecco perché si deve ricorrere a esperimenti ausiliari, e al ragionamento indiretto, per mettere alla prova le disuguaglianze di Bell.

Con l'uso di polarizzatori a due canali, abbiamo effettuato un esperimento che segue più da vicino lo schema ideale di Fig. 1.\*

I nostri polarizzatori erano cubi polarizzanti che trasmettono una polarizzazione (parallela ad  $\vec{a}$ , o rispettivamente a  $\vec{b}$ ) e riflettono quella ortogonale. Tale separatore a polarizzazione, e i due corrispondenti fotomoltiplicatori, sono montati in un meccanismo ruotabile. Questo apparecchio (polarimetro) fornisce i risultati + e - per le misurazioni di polarizzazione lineare lungo  $\vec{a}$  (rispettivamente  $\vec{b}$ ). Esso è l'analogo ottico di un filtro Stern - Gerlach per particelle a spin 1/2.

Con i polarimetri I e II orientati secondo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , e il sistema di conteggio di coincidenza quadrupla, noi siamo in grado di misurare in un singolo periodo di presa dati i quattro tassi di coincidenza  $R_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$ . Noi quindi otteniamo direttamente il coefficiente di correlazione per la misurazione lungo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ :

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{R_{++} + R_{--} - R_{+-} - R_{-+}}{R_{++} + R_{--} + R_{+-} + R_{-+}}(\vec{a}, \vec{b}). \quad (16)$$

È pertanto sufficiente ripetere le stesse misurazioni per tre altre orientazioni, e la disuguaglianza BCHSH (9) può essere direttamente verificata.

Questa procedura è corretta se i valori misurati (16) dei coefficienti di correlazione possono essere presi uguali alla definizione (4), cioè se assumiamo che l'insieme delle coppie realmente rivelate è un campione significativo di tutte le coppie emesse. Questa assunzione è molto ragionevole vista la simmetria del nostro schema, dove le due misurazioni +1 e -1 sono trattate

\* Un esperimento simile, che fa uso di polarizzatori a calcite, è stato intrapreso all'Università di Catania, Italia.

nello stesso modo (le efficienze di rivelazione in entrambi i canali di un polarimetro sono uguali). Inoltre, abbiamo verificato che la somma dei quattro tassi di coincidenza  $R_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$  è costante al cambiare delle orientazioni, sebbene ciascun tasso cambi fortemente. L'ampiezza dei campioni di coppie selezionati è stata pertanto trovata costante.

L'esperimento è stato effettuato in corrispondenza all'insieme di orientazioni di Fig. 4, per cui è previsto il massimo conflitto. Abbiamo trovato

$$S_{exp} = 2.697 \pm 0.015, \quad (17)$$

che viola le disuguaglianze (9) ( $|S| \leq 2$ ) per più di 40 deviazioni standard! Questo risultato è in eccellente accordo con le previsioni della meccanica quantistica (per i nostri polarizzatori e angoli solidi):

$$S_{MQ} = 2.7 \pm 0.05.$$

L'incertezza di  $S_{MQ}$  tiene conto di una leggera mancanza di simmetria di entrambi i canali di un polarizzatore ( $\pm 1\%$ ). L'effetto di queste dissimmetrie è stato calcolato e non può creare una variazione di  $S_{MQ}$  maggiore del 2%.

Abbiamo anche effettuato misurazioni di  $E(\vec{a}, \vec{b})$  in varie orientazioni, per un confronto diretto con le previsioni della meccanica quantistica (Fig. 13). L'accordo è chiaramente eccellente.

#### *Esperimento a disposizione variabile* [18]

Come sottolineato nel par. 6, un esperimento ideale di tipo EPR dovrebbe prevedere la possibilità di cambiare a tempi casuali l'orientazione di ciascun polarizzatore. Noi abbiamo fatto un progresso verso tale esperimento ideale usando lo schema modificato mostrato in Fig. 14.

Ciascun polarizzatore (a canale singolo) è rimpiazzato da un'apparecchiatura composta da un dispositivo di commutazione seguito da due polarizzatori in due orientazioni differenti:  $\vec{a}$  e  $\vec{a}'$  dal lato I,  $\vec{b}$  e  $\vec{b}'$  dal lato II. Il commutatore ottico è in grado di dirigere rapidamente la luce incidente da un polarizzatore all'altro. Ogni apparecchio è pertanto equivalente a un polarizzatore variabile commutato tra due orientazioni. La distanza  $L$  tra i due commutatori è 12 m.

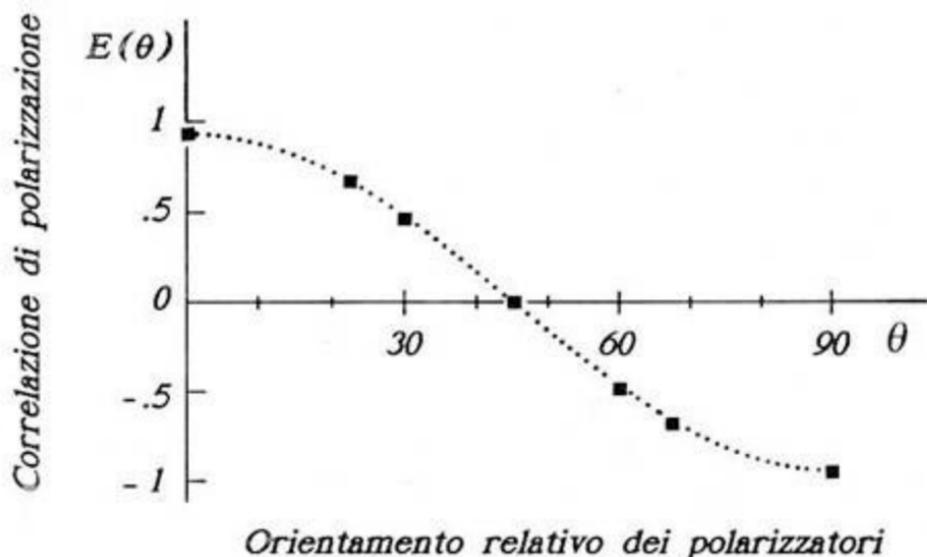


Fig. 13. Esperimento con polarizzatori a due canali: correlazione delle polarizzazioni come funzione dell'angolo relativo dei polarimetri. Gli errori indicati sono  $\pm 2$  deviazioni standard. La curva tratteggiata non è un adattamento ai dati, ma la previsione quantomeccanica per l'esperimento reale. Per polarizzatori ideali, la curva raggiungerebbe i valori  $\pm 1$ .

La commutazione della luce è effettuata da interazione acusto-ottica della luce con un'onda stazionaria ultrasonica nell'acqua. L'angolo di incidenza (angolo di Bragg) e la potenza acustica sono regolati per ottenere una commutazione completa tra la diffrazione all'ordine 0 e 1. A una frequenza acustica di 25 Mhz, la frequenza di commutazione è 50 MHz. Di conseguenza ogni 10 ns si verifica un cambiamento di orientazione del polarizzatore variabile equivalente. Poiché questo periodo (10 ns) e il tempo di vita  $\tau_r$  (5 ns) sono piccoli in confronto a  $L/c$  (40 ns), la rivelazione di un evento da un lato e il corrispondente cambiamento di orientazione dall'altro sono separati da un intervallo space-like. La seconda condizione sul tempo è pertanto parzialmente soddisfatta.

Con i grandi fasci usati nell'esperimento, la commutazione non era completa, poiché l'angolo di incidenza non era esattamente

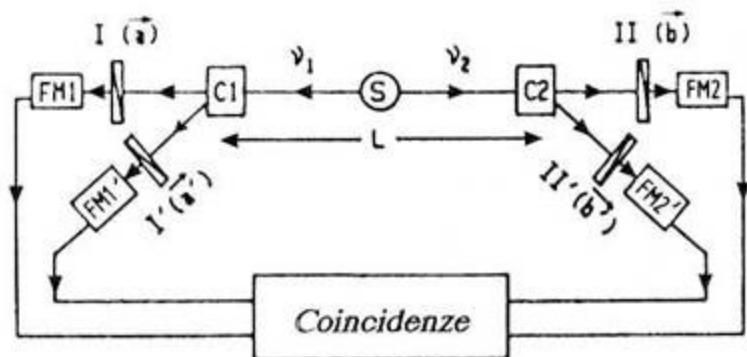


Fig. 14. Esperimento a disposizione variabile con commutatori ottici ( $C_1$  e  $C_2$ ). C'è una commutazione ogni 10 ns. I due commutatori sono pilotati indipendentemente.

l'angolo di Bragg. Invece di essere 0, il minimo di luce trasmessa in ciascun canale era 20 %.

Siccome dovevamo ridurre la divergenza dei fasci, i tassi di coincidenze rilevate erano più piccoli di un ordine di grandezza rispetto agli esperimenti precedenti. In corrispondenza a questo, la durata della raccolta dati è stata più lunga.

La verifica delle disuguaglianze di Bell (13) comporta un totale di 8000 s di accumulazione dati con i quattro polarizzatori nelle orientazioni di Fig. 4. Un totale di 16000 s è stato dedicato a misurazioni ausiliarie di calibrazione con metà di tutti i polarizzatori rimossa.

Per compensare gli effetti di errori sistematici, l'accumulazione dati è stata alternata tra le varie configurazioni ogni 400 s. La media fornisce

$$S'_{exp} = 0.101 \pm 0.020, \quad (18)$$

che viola la disuguaglianza (13) di 5 deviazioni standard, e in buon accordo con le previsioni quantomeccaniche

$$S_{MQ} = 0.113 \pm 0.005.$$

Un altro periodo di presa dati è stato effettuato per un confronto diretto con la meccanica quantistica. Fig. 15 mostra un accordo eccellente.

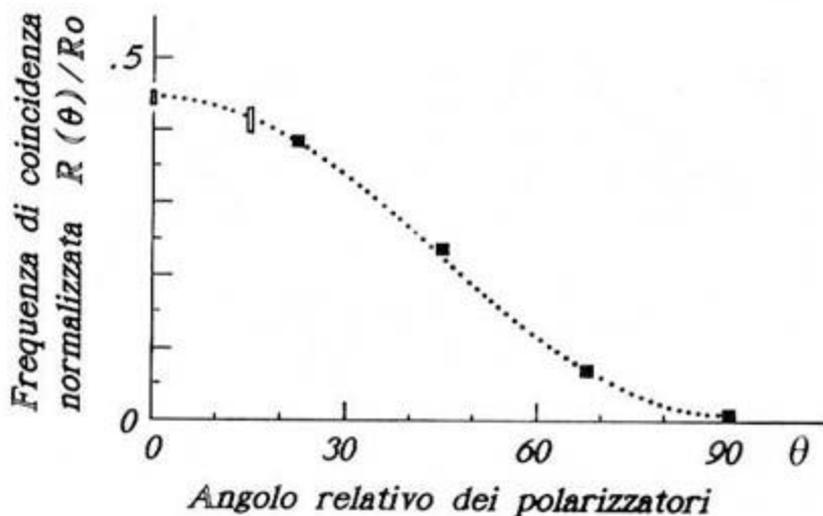


Fig. 15. Esperimento a disposizione variabile: tasso di coincidenza medio normalizzato come funzione delle orientazioni relative dei polarizzatori. Gli errori indicati sono  $\pm 1$  deviazioni standard. La curva tratteggiata non è un adattamento ai dati ma la previsione della meccanica quantistica per l'esperimento reale.

In accordo con questi risultati, le teorie a parametri supplementari che obbediscono alla causalità di Einstein sembrano insostenibili. Per trovare una via d'uscita da questa conclusione, si dovrebbe pensare che la commutazione non era completa. Comunque, una grande frazione delle coppie è sottoposta a commutazione forzata. Se le disuguaglianze di Bell fossero osservate da queste coppie, è difficile credere che non avremmo osservato una discrepanza significativa tra i nostri risultati e le previsioni della meccanica quantistica.

Il nostro esperimento differisce dallo schema ideale da un altro punto di vista: le commutazioni non sono veramente casuali, poiché i commutatori acusto-ottici sono pilotati da generatori quasi periodici. Nonostante ciò, i due generatori ai due lati funzionano in modo completamente scorrelato, specialmente considerando le loro instabilità in frequenza.

Il nostro ultimo esperimento (esperimento a disposizione variabile), come i precedenti, ha qualche imperfezione tecnica.

Alcune scappatoie rimangono pertanto aperte per gli amanti delle teorie a parametri supplementari che obbediscono alla causalità einsteiniana. Esperimenti migliorati probabilmente diverranno fattibili in futuro [19], ma noi abbiamo già un accordo impressionante con la meccanica quantistica. Le teorie a parametri supplementari che obbediscono alla causalità di Einstein e sono compatibili con i nostri risultati appaiono in qualche modo artificiali, poiché i risultati sperimentali dovrebbero cambiare drammaticamente (disaccordo con la meccanica quantistica) con certi miglioramenti tecnici (come ad esempio aumento delle efficienze dei fotomoltiplicatori).\*

Secondo Bell [20], siamo quindi costretti ad ammettere:

- 1) o che ci sono, a livello dei parametri supplementari, influenze superluminali;\*\*
- 2) o rinunciare a una spiegazione in termini di parametri supplementari.

La seconda posizione sembra a priori più comoda. Ma, per citare Mermin [22], "io sfido il lettore a suggerire un qualunque ... altro modo per render conto di cosa accade" (cioè le forti correlazioni osservate).

Spero che anche coloro che non si addentrano in tali discussioni saranno convinti che Einstein ha messo in luce una delle proprietà più straordinarie della meccanica quantistica. Dobbiamo ringraziare J. Bell per averci fornito la possibilità di evidenziare sperimentalmente questa proprietà.

## Bibliografia

- [1] J. S. Bell, *Physics* (N.Y.) **1**, (1964) 195. J. S. Bell in

---

\* Un altro argomento ricorrente è ammettere che i due commutatori, sebbene sembrino pilotati a caso (in un esperimento ideale), in realtà siano correlati tra loro, e anche con le coppie. Dobbiamo allora ammettere che l'intero mondo è completamente ingarbugliato, e che non c'è possibilità di scegliere liberamente cosa decidiamo di misurare!

\*\* Dobbiamo sottolineare che in un esperimento a disposizione variabile - anche ideale - queste ipotetiche influenze superluminali non possono essere controllate per la telegrafia pratica [21].

- "Foundations of Quantum Mechanics", ed. da B. d'Espagnat, Academic, N. Y. (1972).
- [2] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47** (1935) 777. Si veda anche la risposta di Bohr: N. Bohr, *Phys. Rev.* **48** (1935) 696.
- [3] D. Bohm, "Quantum Theory", Prentice - Hall, Englewoods Cliffs, N. J. (1951).
- [4] D. Bohm and A. Aharonov, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1070.
- [5] J. F. Clauser and A. Shimony, *Rep. Prog. Phys.* **41** (1978) 1881).
- [6] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969) 880.
- [7] J. F. Clauser and M. A. Horne, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 526.
- [8] A. Fine, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 291.
- [9] A. Aspect, *Phys. Lett.* **54A** (1975) 117.
- [10] E. S. Fry, *Phys. Rev.* **A8** (1973) 1219.
- [11] F. M. Pipkin in "Advances in Atomic and Molecular Physics", ed. da D. R. Bates e B. Bederson, Academic (1978).
- [12] S. J. Freedman and J. F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 938.
- [13] J. F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 1123.
- [14] E. S. Fry and R. C. Thompson, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 495.
- [15] A. Aspect, C. Imbert and G. Roger, *Opt. Commun.* **34**, (1980) 46.
- [16] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 460.
- [17] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 91.
- [18] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1804.
- [19] T. K. Lo and A. Shimony, *Phys. Rev.* **A 23** (1981) 3003.
- [20] J. S. Bell, *Comments on Atom. Mol. Phys.* **9** (1980) 121.
- [21] A. Aspect, *J. Phys. Coll.* **C2** (1981) 63.
- [22] N. D. Mermin, *Am. J. Phys.* **49** (1981) 940.

## §6. Teorema di Bell ed esperimenti

Dalla lettura del lavoro originale di Bell, abbiamo visto come il teorema di Bell dica sostanzialmente che le teorie a variabili nascoste locali (o teorie realistiche locali) forniscano, in certe situazioni, previsioni contrastanti con quelle fornite dalla meccanica quantistica. Abbiamo anche visto come queste situazioni si verifichino, tipicamente, quando si effettuino misurazioni di correlazione di osservabili relative a sistemi spazialmente separati che vadano però considerati come un unico sistema composto (ad esempio i fotoni delle cascate atomiche). Di conseguenza il teorema di Bell può essere riassunto rozzamente dicendo che, dal punto di vista dei principi, meccanica quantistica da una parte e teorie realistiche locali dall'altra sono due *corpus* teorici incompatibili tra loro (e quindi in particolare la meccanica quantistica non può essere completata da una teoria a variabili nascoste locali).

Naturalmente il teorema di Bell non contiene affermazioni che riguardano la validità dell'una o delle altre teorie. Nonostante la meccanica quantistica sia stata corroborata da un'enorme mole di conferme sperimentali, tali conferme non sono in grado di discriminare tra la meccanica quantistica stessa e le teorie realistiche locali, poiché in generale gli esperimenti riguardano situazioni in cui non esiste conflitto tra i due tipi di teorie. Ecco perché si è reso necessario effettuare gli esperimenti "di correlazione" discussi in precedenza: le misurazioni di correlazione sono il terreno su cui meccanica quantistica e teorie realistiche locali forniscono previsioni sensibilmente diverse.

L'esame dei risultati sperimentali permette di concludere che la meccanica quantistica descrive correttamente la realtà, mentre le teorie a variabili nascoste locali forniscono previsioni smentite dagli esperimenti.

Per amor di completezza va però detto che nulla si può concludere circa le teorie a variabili nascoste *non* locali: Bell stesso ha osservato che in tal caso il teorema non vale, per cui è possibile pensare che esistano teorie a variabili nascoste non locali equivalenti, dal punto di vista fenomenologico, alla meccanica quantistica (benché molto differenti dal punto di vista concettuale, perché sarebbero il "completamento deterministico"

della meccanica quantistica). In realtà è possibile costruire teorie di questo tipo. Un esempio elementare è costituito dal modello a variabili nascoste per il singoletto di spin esaminato nel §4. Come già osservato, tale modello è equivalente alla meccanica quantistica, nel senso che fornisce previsioni probabilistiche identiche a quelle da essa fornite, ma è non locale, nel senso che una misurazione effettuata su uno spin influenza istantaneamente a distanza l'altro. Esiste poi la cosiddetta "Interpretazione causale della meccanica quantistica" dovuta a Bohm.<sup>28</sup> In tale teoria, che è equivalente in tutto e per tutto alla meccanica quantistica (è una sua reinterpretazione), l'equazione di Schrödinger viene riscritta in termini di due equazioni, una delle quali rappresenta la conservazione della probabilità, mentre l'altra è interpretata come l'equazione di Hamilton - Jacobi per una particella soggetta sia alle forze ordinarie descritte da un potenziale  $V$  che a forze "quantistiche" descritte da un opportuno potenziale quantico che fornisce il carattere di non località alla teoria.

## §7. Conclusioni

Cerchiamo ora di sintetizzare le conclusioni che è possibile trarre dalle critiche mosse alla meccanica quantistica da Einstein e collaboratori e dalle informazioni combinate del teorema di Bell e degli esperimenti sulle sue disuguaglianze.

L'argomentazione EPR porta a concludere che il *principio di realtà*, il *principio di località* e la *completezza* della meccanica quantistica sono tre assunti tra loro incompatibili: non è possibile costruire una teoria che sia insieme realista, determinista e locale. Questo significa che in una qualunque teoria fisica almeno uno dei tre principi deve cadere.

D'altra parte il teorema di Bell e le verifiche (o meglio falsificazioni) sperimentali delle sue disuguaglianze dimostrano che

<sup>28</sup> D. Bohm, *Phys. Rev.* **85** (1952) 166; D. Bohm, B. J. Hiley and P. N. Kaloyeru, *Phys. Rep.* **144** n. 6 (1987) 321; per una discussione critica si veda: S. Boffi, "Onde di materia e probabilità", *Quaderni di Fisica Teorica*, Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica, Università degli Studi di Pavia (1989); O. Nicrosini, "Aspetti non locali del comportamento quantistico", *Scientifica Acta - Quaderni del Dottorato*, volume III, anno III, n. 1 (1988).

non è possibile completare la meccanica quantistica mediante una teoria realistica locale: l'eventuale completamento deterministico deve necessariamente essere non locale.

Come abbiamo già osservato, l'abbandono della completezza della meccanica quantistica è solo una possibile soluzione del paradosso EPR, quella a cui pensavano Einstein e collaboratori. Esistono in realtà almeno altre due soluzioni, che consistono nell'abbandonare alternativamente il principio di realtà o quello di località. A ciascuna di queste tre soluzioni corrisponde una "visione del mondo" diversa:

#### *Abbandono della completezza della meccanica quantistica*

L'idea che sta alla base di questa interpretazione è che la meccanica quantistica sia una sorta di teoria fenomenologica che non descrive il mondo come esso è in realtà, ma che ne descrive in qualche modo il comportamento in media. La descrizione dettagliata della realtà fisica sarebbe fornita da una teoria più fondamentale, in linea di principio deterministica, che in un certo senso starebbe alla meccanica quantistica come la meccanica statistica sta alla termodinamica. Il prezzo da pagare per sostenere questo punto di vista, particolarmente caro ad Einstein, è molto alto. La teoria fondamentale di cui la meccanica quantistica sarebbe il modello fenomenologico dovrebbe essere, infatti, non locale: ne segue che, abbandonando il principio di completezza per salvare quelli di realtà e località, si è automaticamente portati a negare il principio di località stesso. Questa posizione intellettuale, benché attraente, risulta quindi in parte contraddittoria.

#### *Abbandono del principio di realtà*

L'interpretazione della teoria si basa sulla completezza della meccanica quantistica e sul principio di località. L'indeterminismo conseguente è visto come la caratteristica essenziale del mondo microscopico. Abbandono del principio di realtà significa in sostanza ammettere che la funzione d'onda non è una proprietà del sistema fisico, indipendente dall'osservatore, ma è un oggetto matematico che sintetizza tutte le possibili informazioni che l'osservatore possiede sul sistema stesso. In questo senso la meccanica quantistica è un paradigma in grado di prevedere l'evoluzione temporale della nostra conoscenza sul sistema, ma

ad essa non deve essere richiesto di descrivere il sistema. In quest'ottica il principio di località è salvaguardato dal fatto che le osservazioni sui sistemi modificano solo la nostra conoscenza su di essi, senza che si faccia riferimento alcuno alle loro proprietà fisiche. Alla base di questa visione del mondo sta una filosofia "neopositivista" in senso lato: parlare di proprietà oggettive della realtà non ha significato. Questo è in sostanza il punto di vista della scuola di Copenhagen.

#### *Abbandono del principio di località*

Anche in quest'ottica si accetta l'indeterminismo. Tuttavia, accettando la modificazione istantanea a distanza delle proprietà fisiche del sistema si permette l'interpretazione realista della funzione d'onda, secondo cui questa può essere considerata come una proprietà del sistema. Nella rinuncia alla località il sistema fisico è implicitamente considerato come un tutto indivisibile. Da questo punto di vista un micro-oggettivismo alla Leucippo-Democrito è assolutamente insostenibile. Resta però aperta la speranza di dare un significato, nell'ambito della meccanica quantistica, al macro-oggettivismo del senso comune.

L'analisi qui presentata è estremamente rozza. Uno studio più dettagliato delle possibilità in gioco richiederebbe, come è facile immaginare, un discorso di natura in gran parte filosofica, che esula dal presente contesto.

*Finito di stampare  
nel mese di gennaio 1991  
Tipografia del Libro - Pavia*

## QUADERNI DI FISICA TEORICA

Collana curata da Sigfrido Boffi

Dopo un primo biennio, in cui ha rivisto con maggiori dettagli e approfondimenti lo sviluppo della fisica classica e ha imparato a destreggiarsi con alcuni aspetti del formalismo matematico necessario, lo studente del Corso di Laurea in Fisica è costretto ad affrontare un nuovo modo di descrivere la natura che ormai il ricercatore professionale ha fatto suo da oltre mezzo secolo, ma che tuttora risulta estraneo al cosiddetto senso comune. L'impatto è principalmente difficile nel corso di Istituzioni di Fisica Teorica, che è tradizionalmente dedicato all'esposizione dei metodi teorici della meccanica quantistica così come si sono sviluppati nella prima metà del nostro secolo. Sembra perciò utile proporre, con questa collana di "*Quaderni di Fisica Teorica*," un tema, o un autore, attraverso la lettura commentata di uno o più articoli originali. Lo studente si accorgerà allora che le teorie organicamente presentate nei suoi manuali, necessarie per la pratica scientifica attuale, sono piuttosto il risultato di un lungo travaglio di idee, tentativi, successi, difficoltà, e infine di scelte, che sono sempre presenti nell'avventura dell'uomo animato dal desiderio invincibile di capire. Sarà dunque preparato, al termine dei suoi studi durante i quali si è impadronito in breve tempo dei risultati fondamentali ottenuti nell'arco di secoli, ad affrontare a sua volta, come giovane ricercatore, un cammino pieno di trabocchetti, ma anche ricco di soddisfazioni.

### PARADOSSO EPR E TEOREMA DI BELL

La peculiarità più importante e stupefacente della meccanica quantistica è il suo indeterminismo, cioè la sua incapacità di principio di dare previsioni certe per i risultati dei singoli esperimenti. Nel presente Quaderno, attraverso l'esame dei lavori teorici originali di Einstein - Podolsky - Rosen e di Bell e di quelli sperimentali di Aspect e collaboratori, è presentato lo sviluppo storico del dibattito che ha portato alla conclusione che la visione del mondo realista, determinista e locale della scienza della fine del secolo scorso non può essere mantenuta alla luce delle conoscenze attuali.