La formula per la parte polarizzata della sezione d'urto di DIS su protone, nell'ambito delle approssimazioni di Parton Model, risulta

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\sigma^h}{dx_B dy} &= \sum_{f,s}\int d^4p\,\phi_{f,s}\,\frac{d\Delta\sigma^{el}}{dx_B dy}\,\frac{1}{2M\nu}\delta(x-x_B)\\ &\propto L^A_{\mu\nu}\,W^{\mu\nu}_A(P,q,S)\ . \end{aligned}\tag{1}$$

La sezione d'urto elementare è similmente proporzionale alla contrazione tra la parte antisimmetrica del tensore leptonico e quella antisimmetrica del tensore adronico elementare:

$$\frac{d\Delta\sigma^{el}}{dx_B dy} \propto L^A_{\mu\nu}\,W^{\mu\nu}_{A,el}(p,q,s) \tag{2}$$

dove $W^{\mu\nu}_{A,el}$ dipende dal momento p del partone iniziale, dal momento trasferito q, e dalla polarizzazione s del partone, e contribuisce al tensore adronico elementare con una parte antisimmetrica linearmente proporzionale a s:

$$\begin{aligned}W^{\mu\nu}_{S,el}+W^{\mu\nu}_{A,el} &= \frac{1}{4}e_f^2\,\mathrm{Tr}\left[(1-s\gamma_5)\ \not{p}\,\gamma^\mu\,(\not{p}+\not{q})\,\gamma^\nu\right]\\ &= 2e_f^2\left[(p+q)^\mu p^\nu+(p+q)^\nu p^\mu+g^{\mu\nu}(m^2-p\cdot(p+q))\right]\\ &\quad +e_f^2\,s\,i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}q_\rho p_\sigma\ . \end{aligned}\tag{3}$$

Inserendo la parte antisimmetrica di Eq. (3) in Eq. (1) otteniamo la relazione tra il tensore adronico antisimmetrico ed il suo corrispondente elementare:

$$\begin{aligned}W^{\mu\nu}_A(P,q,S) &= i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}q_\rho\sum_{f,s}e_f^2\,s\int d^4p\,\phi_{f,s}\,p_\sigma\,\frac{1}{2M\nu}\delta(x-x_B)\\ &= i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}q_\rho\,\frac{1}{2M\nu}\sum_f e_f^2\int d^4p\,(\phi_f^\uparrow-\phi_f^\downarrow)\,p_\sigma\,\delta(x-x_B)\\ &= i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}q_\rho\,\frac{1}{2M\nu}\sum_f e_f^2\int d^4p\,\Delta\phi_f\,p_\sigma\,\delta(x-x_B)\ . \end{aligned}\tag{4}$$

Osservazioni:

- la funzione incognita $\Delta\phi_f$ descrive la differenza di probabilità di trovare il partone di flavor f con polarizzazione s parallela o antiparallela a quella S del nucleone genitore; in generale può dipendere dagli invarianti $P\cdot S$, $p\cdot S$, $p\cdot P$. Il primo prodotto scalare è 0 per definizione. Il secondo può intervenire solo in modo lineare, perchè il tensore adronico può essere al massimo lineare in S, se lo spin del bersaglio è 1/2. Quindi la struttura generale della funzione è del tipo

$$\Delta\phi_f(p\cdot P,p\cdot S)=\frac{p\cdot S}{M}\,\Delta\tilde{\phi}_f(p\cdot P) \tag{5}$$

- dall'equazione precedente e dal fatto che compaia p_σ in Eq. (4) si deduce che il momento trasverso dei partoni non può essere trascurato, soprattutto quando si considera la reazione DIS con polarizzazione; non basta cioè descrivere il moto dei partoni in termini di una frazione x del momento dell'adrone genitore assumendo che i due momenti siano collineari, perché il prodotto scalare $p \cdot S$ può coinvolgere anche componenti di p trasverse a P; bisogna cioè passare nello spazio dei momenti da una descrizione mono-dimensionale ad una tridimensionale. La dipendenza di $\Delta\tilde{\phi}_f$ in generale può essere espressa come

$$\Delta\tilde{\phi}_f \left(x + \mathcal{O}\left(\frac{p_T^2}{M^2} \right) \right) , \tag{6}$$

dove la dipendenza esplicita dipende dal sistema di riferimento adottato.

Recuperiamo ora la formula per $W_A^{\mu\nu}$ dalla slide 4,

$$\begin{aligned} W_A^{\mu\nu} &= i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho P_\sigma \lambda \frac{G_1}{M^3} \\ &\quad + i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} q_\rho S_{\perp\sigma} \frac{1}{M^2} \left(G_1 + \frac{P\cdot q}{M^2} G_2 \right) , \end{aligned} \tag{7}$$

e confrontiamola con quella dell'Eq. (4).

Per $\mu = 1$, $\nu = 2$ e per polarizzazione longitudinale $S = (0,0,0,1)$ (cioè per $\lambda = 1$) otteniamo

$$\begin{aligned} W_A^{12} &= -\frac{i}{M} \frac{|\boldsymbol{q}|}{M} G_1 \\ &= i \frac{1}{2M\nu} \sum_f e_f^2 \int d^4p \, (\nu p_z - |\boldsymbol{q}| x M) \left(-\frac{p_z}{M} \right) \\ &\qquad \times \Delta\tilde{\phi}_f \left(x + \mathcal{O}\left(\frac{p_T^2}{M^2} \right) \right) \delta(x - x_B) \, . \end{aligned} \tag{8}$$

Nel regime DIS $|\boldsymbol{q}| \approx \nu$, e si vede che la parte destra dell'equazione dipende solo da x_B, quindi $\nu/M\, G_1 \to g_1(x_B)$. Quindi in regime di scaling, se il bersaglio è polarizzato longitudinalmente, si attiva la componente del tensore adronico legata alla funzione di struttura g_1, che nel Parton Model è collegata alla differenza di densità partoniche $\Delta\phi_f$, ovvero alla cosiddetta densità di elicità.

Analogamente, per $\mu = 0$, $\nu = 2$ e per polarizzazione trasversa $S = (0,1,0,0) \equiv S_x$ otteniamo

$$W_A^{02} \approx -\frac{i}{M} \left(\frac{\nu}{M} G_1 + \frac{\nu^2}{M^2} G_2 \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= i\nu \frac{1}{2M\nu} \sum_f e_f^2 \int d^4p\, p_x\, (\phi_f^{\rightarrow} - \phi_f^{\leftarrow})\, \delta(x - x_B) \\
&= i\nu \frac{1}{2M\nu} \sum_f e_f^2 \int d^4p\, p_x\, \delta\phi_f\, \delta(x - x_B) \\
&= i\nu \frac{1}{2M\nu} \sum_f e_f^2 \int d^4p\, p_x \left(-\frac{p_x}{M}\right) \\
&\qquad \times \delta\tilde{\phi}_f \left(x + \mathcal{O}\left(\frac{p_T^2}{M^2}\right)\right) \delta(x - x_B)\ , \qquad (9)
\end{aligned}
$$

dove abbiamo definito $\delta\phi_f$ la differenza di probabilità di trovare il partone di flavor f con polarizzazione s trasversa o antitrasversa a quella S del nucleone genitore. Vale per $\delta\phi_f$ una decomposizione simile a quella di $\Delta\phi_f$ in Eq. (5). Nel regime DIS questa volta otteniamo che $\nu^2/M^2\, G_2 \to g_2(x_B)$. Quindi se il bersaglio è polarizzato trasversalmente, si attiva la componente del tensore adronico legata a $g_1 + g_2$, che nel Parton Model è collegata alla differenza di densità partoniche $\delta\phi_f$.

Ricapitolando: la combinazione $g_1(x) + g_2(x)$ descrive la polarizzazione trasversa del protone, mentre $g_1(x)$ ne descrive quella longitudinale.

Infine se si specializza il sistema di riferimento al Cono-Luce è possibile specificare la dipendenza completa delle funzioni partoniche $\Delta\tilde{\phi}_f$ e $\delta\tilde{\phi}_f$ dalle componenti indipendenti del momento p del partone. In questo modo si può dimostrare che

$$
-\frac{g_1(x)}{x} = \frac{\partial}{\partial x}[g_1(x) + g_2(x)]\ . \qquad (10)
$$