

## Riassunto della lezione precedente

- regola di somma GDH : test di proprietà fondamentali dell' ampiezza di foto-assorbimento su nucleone polarizzato;  
versione generalizzata → esplorazione del passaggio da regime perturbativo a nonperturbativo  
regola di somma di Bjorken polarizzata: rapporto  $g_A/g_V$
- necessità di introdurre correzioni radiative a QPM  
→ IQPM inglobato nella pQCD
- cancellazione divergenze ultraviolette → rinormalizzazione  
→ eq. di Callan-Symanzik
- divergenze infrarosse reali e cancellazione da contributi virtuali;  
divergenze collineari

# Equazioni DGLAP (Dokshitzer-Gribov-Lipatov-) Altarelli-Parisi

divergenze collineari e infrarosse + fattorizzazione collineare  
sono presenti a tutti gli ordini perturbativi  
sono indipendenti dal processo elementare hard

ad es. in e+e- ISR

$$d\sigma^{(n\gamma)} \sim d\sigma_0 \alpha^n \log^n \left( \frac{s}{m_e^2} \right) \log^n E$$



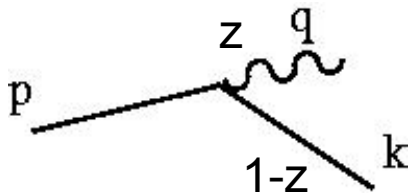
approccio universale (QED/QCD) probabilistico  
senza diagrammi di Feynman, a livello partonico



vertice di Altarelli Parisi



per e<sup>-</sup>(k) reale (L) e γ(q) virtuale ≈ reale



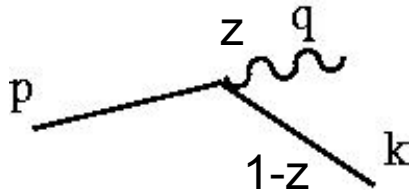
quasi-coll. kin.  
 $p_{\perp} / E \ll 1$



$$\text{QED} \quad \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dp_{\perp}^2}{p_{\perp}^2} \frac{1 + (1-z)^2}{z} \rightarrow P_{\gamma e}(z)$$

$$\text{QCD} \quad \frac{4}{3} \frac{\alpha_S}{2\pi} \frac{dp_{\perp}^2}{p_{\perp}^2} \frac{1 + (1-z)^2}{z} \rightarrow P_{gq}(z)$$

analogamente per  $\gamma(q)$  reale e  $e^-(k)$  virtuale  $\approx$  reale

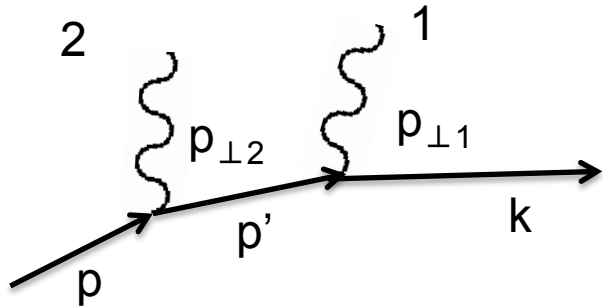


$$\delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dp_{\perp}^2}{p_{\perp}^2} \left[ \frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-x) \right]$$



$$x = 1-z$$

$P_{ee}(z)$  nel senso delle distribuzioni



$$p_{\perp 2} \ll p_{\perp 1} \Rightarrow p'^2 \sim m_e^2$$

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int_{m_e^2}^s \frac{dp_{\perp 1}^2}{p_{\perp 1}^2} \int_{m_e^2}^{p_{\perp 1}^2} \frac{dp_{\perp 2}^2}{p_{\perp 2}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \log^2 \frac{s}{m_e^2}$$

$$p^2 = m_e^2 \quad p'^2 \sim m_e^2 \quad \dots \quad k^2 \neq m_e^2$$

se  $p_{\perp 2} \gg p_{\perp 1}$  non c'è il doppio log  
generalizzabile ad emissione di  $n \gamma$

elettrone sempre più virtuale

se allo step  $n$  si vede un  $e^-$ , allo step  $n+1$  si risolve sua struttura interna e si vede il suo  $e^-$  costituente più virtuale + fotone  $\gamma$ , e così via...

allo step intermedio un  $e^-$  con  $p^2 \sim p_{\perp}^2$  è il costituente dell' $e^-$  fisico quando questo è sondato con risoluzione  $1/p_{\perp}$

$\Rightarrow f_e(x, Q) =$  probabilità di trovare  $e^-$  con frazione  $x$  di energia di  $e^-$  fisico

inglobando tutti i  $\gamma$  collineari emessi con  $p_{\perp} < Q$

## DGLAP eqs. (continua)

$$\frac{d}{d\log Q} f_e(x, Q) = \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \underbrace{\left[ \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right]}_{P_{ee}(z) \text{ splitting function}} f_e\left(\frac{x}{z}, Q\right)$$



$P_{ee}(z)$  splitting function

DGLAP eqs. descrivono evoluzione della funz. di struttura  $f_e$  al cambiare della scala  $Q$   
 equazione integro-differenziale con condizione al contorno  $f_e(x, m_e^2) = \delta(1-x)$

Analogamente



QCD

$$P_{ye}(z) = \frac{1 + (1-z)^2}{z}$$

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left[ \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right]$$

$$P_{ey}(z) = z^2 + (1-z)^2$$

$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \left[ \frac{1 + (1-z)^2}{z} \right]$$

$$P_{yy}(z) = -\frac{2}{3} \delta(1-z)$$

$$P_{qg}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2]$$

$$P_{gg}(z) = 6 \left[ \frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) \left( \frac{11}{12} - \frac{n_f}{18} \right) \delta(1-z) \right]$$

# evoluzione , fattorizzazione: DIS inclusivo

Teorema : (Collins, Soper, Sterman, '89)

$$F_{1/2/3}(x_B, Q^2) = \sum_{i=f, \bar{f}, a} \int_{x_B}^1 \frac{dx}{x} C_{1/2/3} \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F^2}{\mu_R^2}, \alpha_s(\mu_R^2) \right) \phi_i(x, \mu_F, \mu_R)$$

somma su quark,  
antiquark e gluoni

$$\phi(x, \mu_F, \mu_R)$$

generalizzazione delle  
distribuzioni partoniche in QPM

$\mu_R$  scala di rinormalizzazione  
 $\mu_F$  scala di fattorizzazione : definisce  
ciò che è a brevi distanze  $\rightarrow C$   
da ciò che è a lunghe distanze  $\rightarrow \phi$

N.B. può essere  $\mu_F = \mu_R (=Q)$

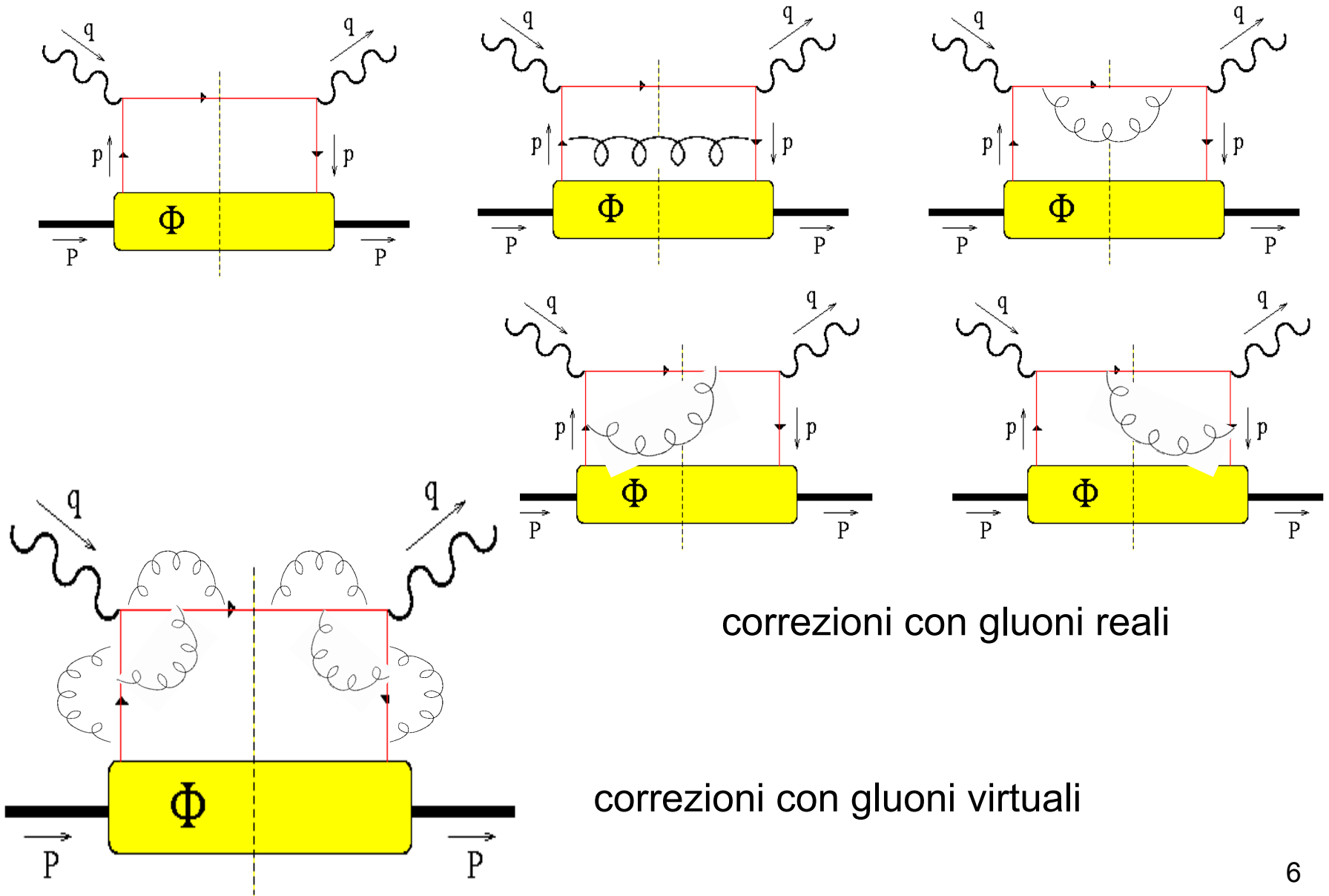
$$C = \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F}{\mu_R}, \alpha_s(\mu_R) \right)$$

coefficiente di Wilson

generalizzazione delle  $F^{\text{el}}$  in scattering elastico in QPM

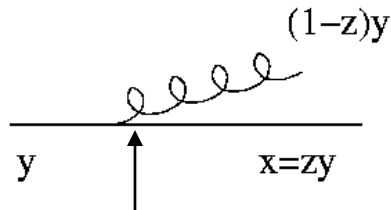
$$C_1^i = \frac{1}{2} \delta_{iq} e_q^2 \delta \left( 1 - \frac{x_B}{x} \right) \rightarrow F_1(x_B) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 \phi_q(x_B)$$

# DIS inclusivo : processi oltre il tree level



## Calcolo di C

gluoni reali



quark con momento  $y$  può irraggiare un gluone e riscaldare il suo momento a  $x$

**divergenze collineari** per  $z \rightarrow 1$

**da riassorbire in  $\phi$** , perché connesse all'evoluzione del singolo  $q$ , indipendenti dall'interazione

vertice di Altarelli-Parisi

determina l'evoluzione in  $Q^2$  di  $\phi$ , determina cioè il suo contenuto partonico

$$s = (p + q)^2 \sim 2p \cdot q - Q^2 = Q^2 \frac{1 - x_B}{x_B} \quad \text{divergenze soft per } x_B \rightarrow 1 \text{ (s} \rightarrow 0\text{)}$$

non riassorbibili in  $\phi$ , perché riguardano gluone nello stato finale

non riassorbibili in  $C$  perché  $C$  è I.R.-safe e si romperebbe fattorizzazione

gluoni virtuali quark on-shell nel taglio  $\rightarrow \delta((p+q)^2) \approx x_B/Q^2 \delta(x_B - 1)$

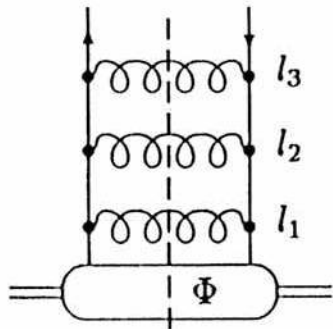
**in approssimazione collineare, cancellazione sistematica delle divergenze soft con gluone reale = “fattorizzazione collineare”**

calcolo dei diagrammi con regolarizzazione dimensionale  $d = 4 - 2\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ )

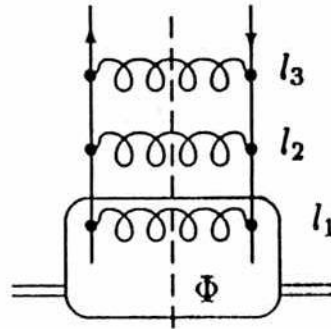
$\rightarrow$  scala fittizia  $\mu_d$  e compaiono poli  $\sim 1/\varepsilon$

# Evoluzione

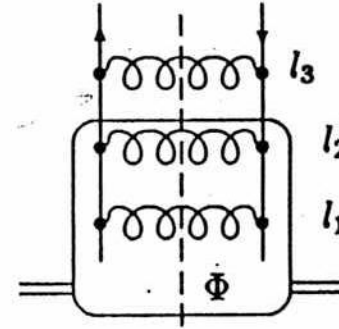
scala  $Q^2 = \mu_F^2 \rightarrow$  al variare di  $\mu_F$  la funzione di splitting determina il contenuto partonico della distribuzione  $\phi$ , discrimina cioè ciò che va inglobato in  $\phi$  (essendo off-shell  $< \mu_F$ ) da ciò che va inglobato in  $C$  (essendo off-shell  $> \mu_F$ )



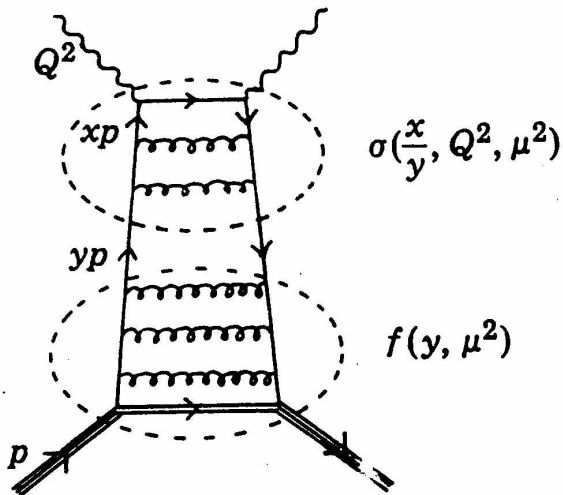
$$\boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{1T}^{-2} \leq \tilde{l}_{2T}^{-2} \leq \tilde{l}_{3T}^{-2}$$



$$\tilde{l}_{1T}^{-2} \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{2T}^{-2} \leq \tilde{l}_{3T}^{-2}$$



$$\tilde{l}_{1T}^{-2} \leq \tilde{l}_{2T}^{-2} \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{3T}^{-2}$$



al variare di  $\mu_F$  la situazione cambia  
 $\rightarrow$  Evoluzione DGLAP

assorbiti in  $\phi < \mu_F <$  assorbiti in  $C$





$$F_1(x, Q^2) \sim \int_x^1 \frac{dz}{z} f_1^{bare} \otimes \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \log \left( \frac{Q^2}{\mu_d^2} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F P_{qq} \left( \frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \right) + \dots \right\} \otimes \phi$$



cancellazione singolarità e dipendenza da  $\mu_d$

$$f_1 \equiv f_1^{bare} \otimes \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \log \left( \frac{\mu_F^2}{\mu_d^2} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F P_{qq} \left( \frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \right) + \dots \right\}$$

**DIS**

**MS**

la scala di partenza dell'evoluzione (ad es.  $Q_0^2$ ) è arbitraria

→ assegnare contributi a  $\phi$  o a  $C$  è arbitrario

→ necessità di definire uno schema in cui calcolare l'evoluzione e confrontarsi con i dati consistentemente

diverse scelte: **schema DIS** (Altarelli, Ellis, Martinelli, '79) QPM esatto a  $Q_0^2$

**schema MS** (Bardeen *et al.*, '78 ; Furmanski & Petronzio, '82 ; Collins & Soper, '82)

potere predittivo di DGLAP:

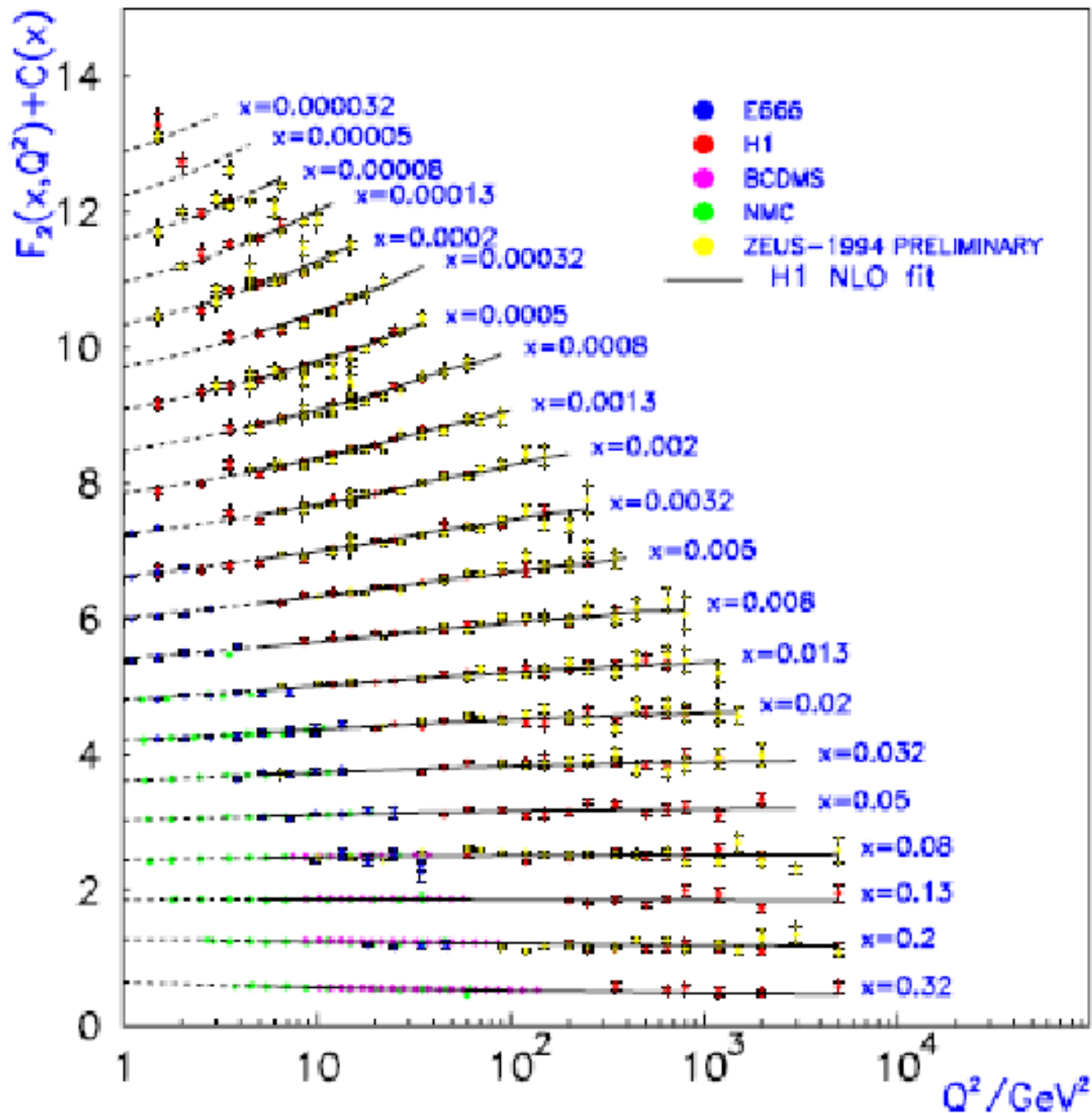
noto il risultato a  $Q_0^2 \rightarrow$  DGLAP danno risultato alla scala  $Q^2 \neq Q_0^2$

DGLAP + fattorizzazione

→ universalità delle distribuzioni partoniche

(definite ad una stessa scala  $\mu_F$  e nello stesso schema)

⇒ ampio potere predittivo della pQCD !



# evoluzione & fattorizzazione: teorema

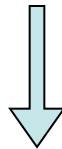
fattorizzazione in DIS inclusivo  $\rightarrow$  convoluzione:

$$F_1(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} C\left(\frac{x}{z}, \dots\right) \phi(z, \dots) \equiv C \otimes \phi$$

trasformata di Mellin di ordine N  $f_N = \int_0^1 dx x^{N-1} f(x)$

risulta  $(f \otimes g)_N = f_N \cdot g_N$

invarianza della fisica dalla scala di fattorizzazione  $\mu_F$  :  $\frac{dF_1}{d \log \mu_F^2} = 0$



$$\gamma_N[\alpha_s(Q^2)] = (P_+)_N$$

dimensioni anomale sono trasformate di Mellin di ordine N delle splitting functions (kernel delle eq. DGLAP di evoluzione)

