

# Riassunto della lezione precedente

- OPE su prodotto di correnti e.m. di quark liberi
  - applicazione a DIS ed  $e^+e^-$  inclusivi
  - classificazione delle singolarità a corte distanze
  - termine dominante coincide con QPM
- procedura generale :
  - sviluppo di OPE in coefficienti di Wilson con singolarità decrescenti
  - operatori bilocali regolari sviluppabili in serie di operatori locali
  - risultato finale per il tensore adronico è una serie di prodotti di potenze di  $1/Q^2$  per elementi di matrice adronici degli operatori locali
  - il parametro di classificazione dello sviluppo in potenze è il twist
- definizione efficace di twist → OPE = sviluppo in potenze di  $1/Q$

## Momentum sum rule

$$4\pi M W_{\mu\nu} = \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | P \rangle \sim c_{\hat{O}} \sum_{\{\alpha\}} c'_{\mu\nu, \{\alpha\}} \left( \frac{M}{\sqrt{q^2}} \right)^{d-n_\alpha-2} \left( \frac{1}{x_B} \right)^{n_\alpha}$$

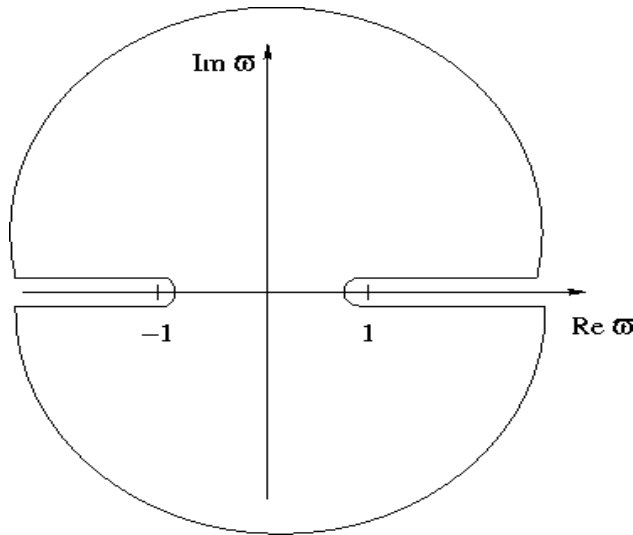
teorema ottico :  $2\pi W^{\mu\nu} = \mathcal{I}m T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | T [J^\mu(x) J^\nu(0)] | P \rangle \sim \sum_n \frac{1}{\left( \sqrt{q^2} \right)^{t-2}} \underbrace{\tilde{c}_n^{\mu\nu} M^{d-n-2} \left( \frac{1}{x_B} \right)^n}_{\text{memoria di}} C_n^{\mu\nu}(q^2, \mu_F) \langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_n}(0, \mu_F) | P \rangle$$

ma  $x_B \leq 1 \rightarrow$  serie converge in regione non fisica  $x_B > 1$  !

(continua)

piano complesso di  
 $\omega = 1 / x_B$



simmetria di crossing

$$\begin{aligned} T(\omega) &= T(-\omega) \\ T^*(\omega^*) &= T(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-1} d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' + i\epsilon)}{\omega' - \omega} \right. \\ \left. + \int_{-1}^{-\infty} d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' - i\epsilon)}{\omega' - \omega} \right. \\ \left. + \int_{\infty}^1 d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' - i\epsilon)}{\omega' - \omega} \right. \\ \left. + \int_1^{\infty} d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' + i\epsilon)}{\omega' - \omega} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega' \left[ \frac{\text{Im} T_{\mu\nu}(\omega')}{\omega' + \omega} + \frac{\text{Im} T_{\mu\nu}(\omega')}{\omega' - \omega} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \text{Im} T_{\mu\nu}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}$$

(continua)



$$T_{\mu\nu}(\omega) \xrightarrow{\omega/\omega' \sim 0} \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ pari}} \int_1^\infty \frac{d\omega'}{\omega'} \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^n \text{Im } T_{\mu\nu}(\omega')$$

$$y = \frac{1}{\omega'} \rightarrow = 2 \sum_n \frac{1}{\pi} \int_0^1 dy y^{n-1} \text{Im } T_{\mu\nu}(y) \left(\frac{1}{x_B}\right)^n$$

teorema  
ottico  $\rightarrow \propto$

$$\sum_n \int_0^1 dy y^{n-1} F(y, Q^2) \Gamma^{\mu\nu} \left(\frac{1}{x_B}\right)^n$$

$$\equiv \sum_n M_F^n(Q^2) \Gamma^{\mu\nu} \left(\frac{1}{x_B}\right)^n \equiv \sum_n \frac{1}{\left(\sqrt{q^2}\right)^{t-2}} \tilde{c}_n^{\mu\nu} M^{d-n-2} \left(\frac{1}{x_B}\right)^n$$

$$M_F^n(Q^2) \leftrightarrow C_{\mu\nu, n}(Q^2, \mu_F) \langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_n}(0, \mu_F) | P \rangle$$

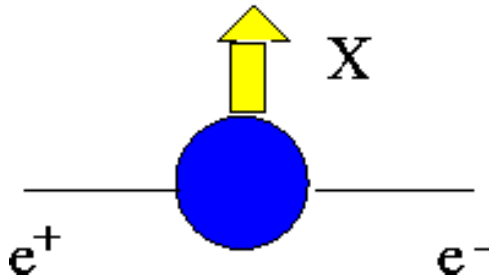
momenti delle  
funzioni di struttura  
(misurabili)

coeff. Wilson  
(calcolabili in  
pQCD)

incognite  
(calcolabili  
su reticolo)

# OPE dimostrabile solo per $e^+e^-$ e DIS inclusivi

## $e^+e^-$ inclusivo

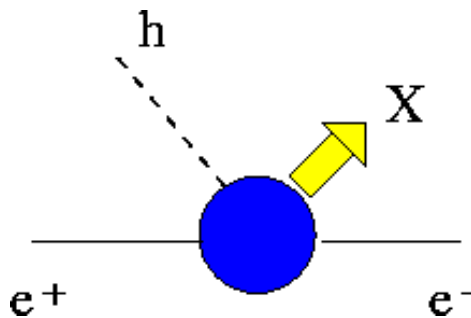


$$W^{\mu\nu} = \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle$$

$q^\mu \stackrel{c.m.}{=} (q^0, \mathbf{0})$  regime DIS:  $Q^2 \rightarrow \infty \Rightarrow q^0 \rightarrow \infty$   
 causalità  $\Rightarrow [..]$  definito su  $\xi^2 \geq 0$   
 contributo principale all'integrale da  $q \cdot \xi$  finito  
 $\Rightarrow \xi^0 \sim 0 \Rightarrow \xi \sim 0$

operatore composito a corte distanze  $\rightarrow$  OPE

## $e^+e^-$ semi-inclusivo



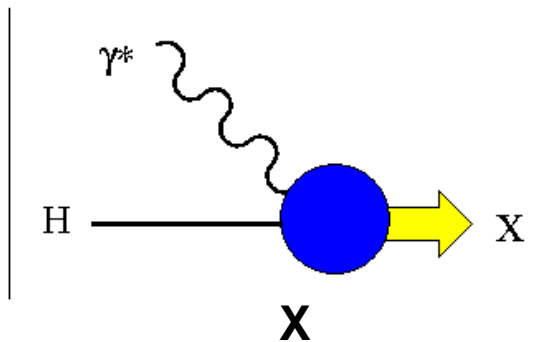
$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum_X \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0 | J^\mu(\xi) | P_h X \rangle \langle P_h X | J^\nu(0) | 0 \rangle$$

sistema dell'adrone a riposo  $P_h^\mu = (M_h, \mathbf{0})$

$q \cdot \xi$  finito  $\rightarrow W^{\mu\nu}$  dominato da  $\xi^2 \sim 0$

ma stato  $|P_h\rangle$  impedisce chiusura  $\sum_X$   
 $\rightarrow$  OPE non puo` essere applicata

## DIS inclusivo

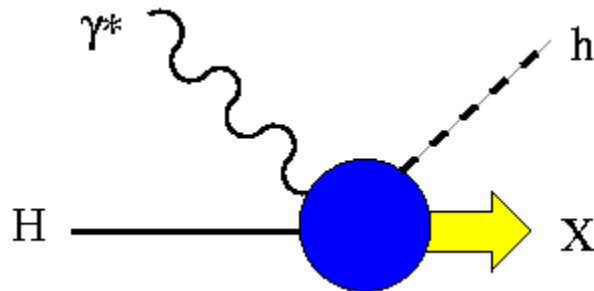


$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | P \rangle$$

dominante per  $\xi^2 \sim 0$

in limite DIS  $\Rightarrow (x_B = -q^2/2P\cdot q \text{ finito}) \Leftrightarrow (v \rightarrow \infty)$   
 $q\cdot\xi$  finito in limite DIS  $\rightarrow \xi^0 \sim 0 \rightarrow \xi^\mu \sim 0$

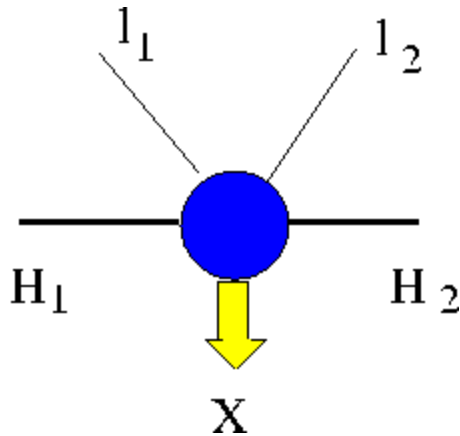
## DIS semi-inclusivo



$$2MW^{\mu\nu} \propto \sum_X \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | J^\mu(\xi) | P_h X \rangle \langle P_h X | J^\nu(0) | P \rangle$$

stato  $|P_h\rangle$  impedisce chiusura  $\sum_X$   
 $\rightarrow$  OPE non può essere applicata

## Drell-Yan



$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{2} s \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P_1 P_2 | J^\mu(\xi) J^\nu(0) | P_1 P_2 \rangle$$

$q\cdot\xi$  finito  $\rightarrow$  dominanza per  $\xi^2 \sim 0$

ma  $\langle .. \rangle$  non è limitato in nessun sistema  
perché  $s=(P_1+P_2)^2 \sim 2P_1 \cdot P_2 \geq Q^2$  e nel  
limite  $Q^2 \rightarrow \infty$  entrambe  $P_1, P_2$  non limitati  
 $W^{\mu\nu}$  riceve contributi fuori dal light-cone!

Quali sono i diagrammi dominanti per i processi in cui  
non si può applicare l'OPE ?

È possibile applicare il concetto dell'OPE (fattorizzazione) anche  
a processi semi-inclusivi?

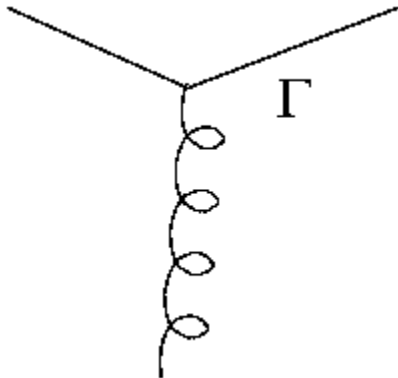
# Classificazione dei contributi dominanti ai vari processi hard

Premessa :

- propagatore di quark libero a corte distanze  $S_F(x)$

$$\begin{aligned} S_F(x) &= (i\gamma \cdot \partial + m) \Delta(x) \sim (i\gamma \cdot \partial + m) \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{x^2 - i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{-2\gamma \cdot x}{(x^2 - i\epsilon)^2} \frac{i}{4\pi^2 i} + \dots \sim \frac{1}{x^3} + \text{termini meno singolari} \end{aligned}$$

- interazione con gluone non incrementa la singolarita`



$$\sim \int \frac{d^4 y}{(2\pi)^4} S_F(x - y) \Gamma S_F(y) \sim \frac{1}{x^2}$$



(continua)

$e^+e^-$  inclusivo

**teorema ottico**

$$= \text{Im} \left\{ \text{diagramma} \right\} \sim \text{Tr} [S_F(x)]^2 \sim \frac{1}{x^6}$$

contributo dominante a corte distanze  $\rightarrow \sigma_{\text{tot}}$  del QPM  
 correzioni radiative  $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$

$e^+e^-$  semi-inclusivo

**diagramma dominante a corte distanze perchè**

$$\sim S_F(x) \sim \frac{1}{x^3}$$

correzioni radiative  $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$  quindi fattorizzazione  
 tra vertice hard e frammentazione soft funziona

(continua)

## DIS inclusivo

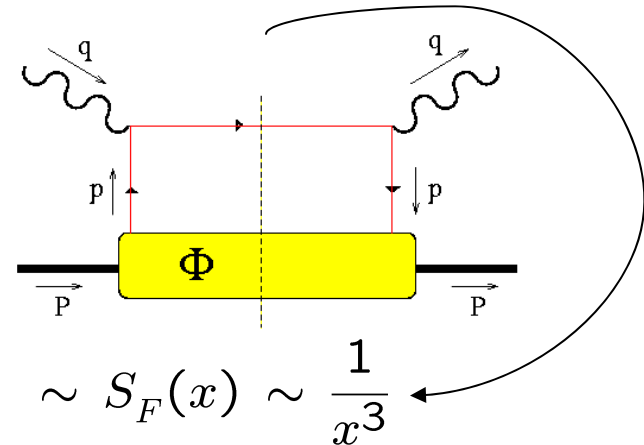
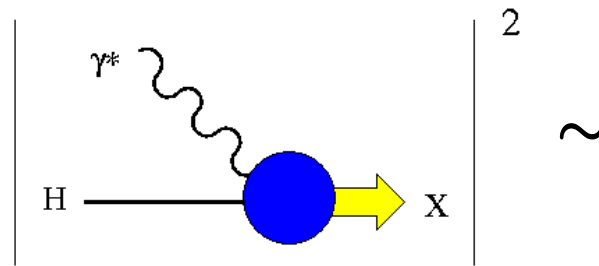
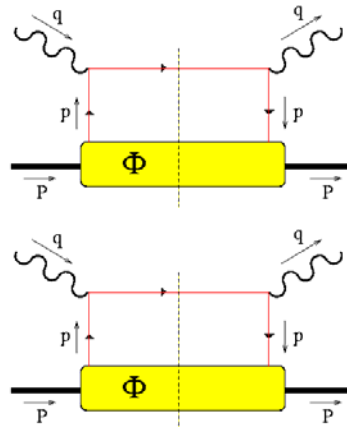
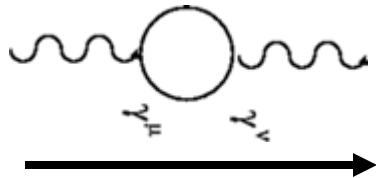
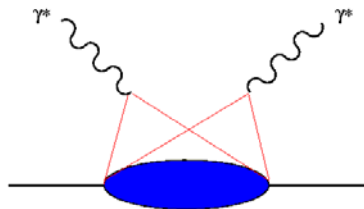


diagramma dominante a corte distanze perche'  $\sim S_F(x) \sim \frac{1}{x^3}$   
 correzioni radiative  $\rightarrow \sim (\log x^2 \mu_R^2)^n$  quindi si ritrova risultato di OPE

$$\epsilon(\xi^0) [J_\mu(\xi), J_\nu(0)] =$$

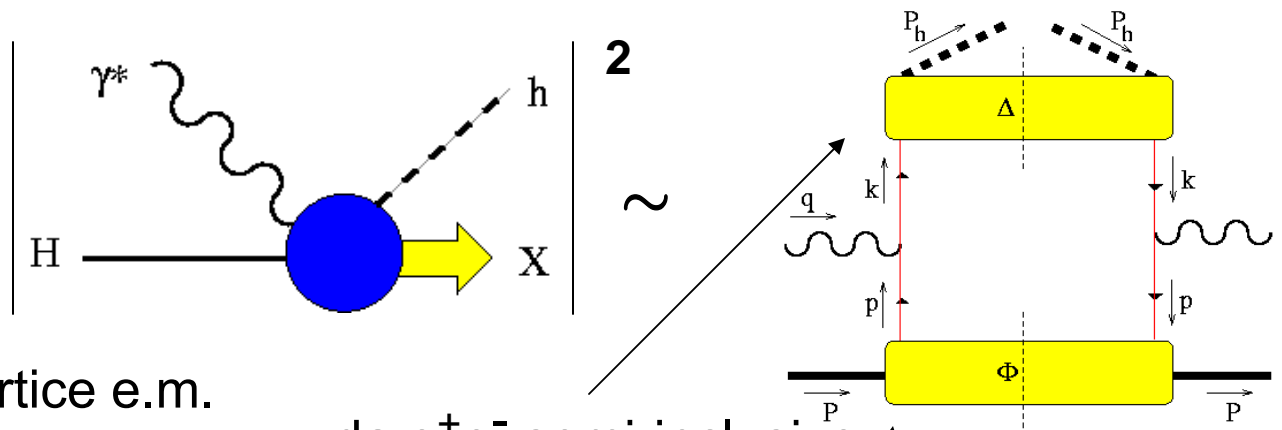


$$\begin{aligned} & \frac{i(2\xi_\mu \xi_\nu - \xi^2 g_{\mu\nu})}{3\pi^3} \partial^3(\xi^2) \\ & + \frac{\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) \\ & + \frac{i\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) \\ & + \hat{O}_{\mu\nu}(\xi, 0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0, \xi) \end{aligned}$$



(continua)

## DIS semi-inclusivo



fattorizzazione tra vertice e.m.

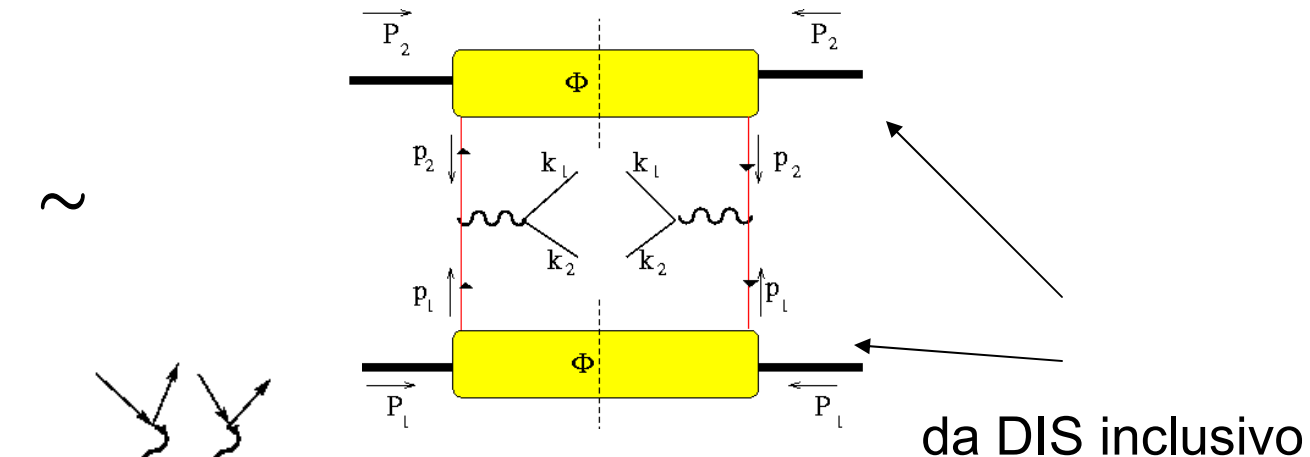
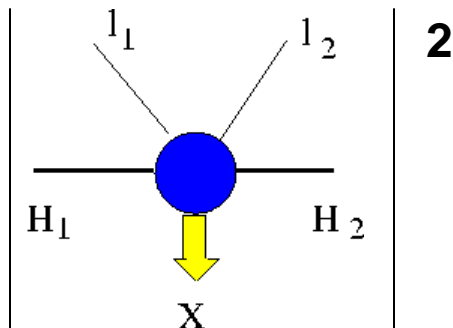
hard e funzioni di distribuzione e

frammentazione (el. di matrice soft)

da  $e^+e^-$  semi-inclusivo

da DIS inclusivo

## Drell-Yan



da DIS inclusivo



correzioni di potenze	correzioni QCD	1	$\alpha_s$	$\alpha_s^2$	...
		QPM	→	IQPM	→
1					
1/Q					
1/Q <sup>2</sup>					
1/Q <sup>3</sup>					
...					

**Operator  
Product  
Expansion**

↕

diagrammatic  
approach

↓

studio sistematico  
delle correzioni di  
potenze (↔ OPE  
per DIS e  $e^+e^-$  inclusivi)  
(Ellis, Furmanski, Petronzio, '82)

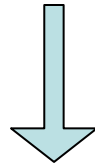
convolution  
approach

....

convoluzione con  
scattering hard  
fattorizzato  
(Efremov, Teryaev, Jaffe,  
Ji, Ralston, Soper, Qiu,  
Sterman, Collins, Leader  
Anselmino...)

(continua)

Per tutti i processi di tipo DIS o  $e^+e^-$  (sia inclusivi che semi-inclusivi) il contributo dominante al tensore adronico viene dalla cinematica light-cone



- definizione e proprietà delle variabili light-cone
- teoria di campo quantizzata sul light-cone
- algebra di Dirac sul light-cone

## Variabili light-cone

dato 4-vettore  $a^\mu$

$$a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^0 \pm a^3) \quad , \quad \mathbf{a}_\perp = (a^1, a^2)$$

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^+, a^-, \mathbf{a}_\perp)$$

prodotto scalare

$$a \cdot b = a^+ b^- + a^- b^+ - \mathbf{a}_\perp \cdot \mathbf{b}_\perp$$

$$a^2 = 2a^+ a^- - \mathbf{a}_\perp^2$$

metrica

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(0,1,2,3)} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$$

“base” light-cone :

$$n_+^\mu = (1, 0, \mathbf{0}_\perp) \quad , \quad n_-^\mu = (0, 1, \mathbf{0}_\perp) \quad ; \quad n_\pm^2 = 0 \quad , \quad n_+ \cdot n_- = 1$$

$$a^\pm = a \cdot n_\mp \longrightarrow a^\mu = (a \cdot n_-) n_+^\mu + (a \cdot n_+) n_-^\mu + \mathbf{a}_\perp$$

metrica “trasversa”

$$g_\perp^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n_+^\mu n_-^\nu - n_+^\nu n_-^\mu = g^{\mu\nu} - n_+^{\{\mu} n_-^{\nu\}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(+,-,1,2)}$$

adrone-bersaglio a riposo  $P^\mu \stackrel{rest frame}{=} (M, 0, 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (M, M, \mathbf{0}_\perp)$

DIS inclusivo

bersaglio assorbe momento trasferito di  $\gamma^*$ ; ad esempio se  $\mathbf{q} \parallel \mathbf{z}$   $P_z=0 \rightarrow P'_z=q \gg M$  in regime DIS

$$P'^\mu = (\sqrt{M^2 + P_z'^2}, 0, 0, P_z') \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} (P_z', 0, 0, P_z') = (\sqrt{2} P_z', 0, 0, \mathbf{0}_\perp)$$

regime DIS  $\Rightarrow$  direzione “+” dominante  
direzione “-” soppressa

boost di 4-vettore  $a^\mu \rightarrow a'^\mu$  lungo asse z

$$a'^0 = \frac{a^0 + \beta a^3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad a'^3 = \frac{\beta a^0 + a^3}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad a'_\perp = a_\perp$$

$$a'^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1 + \beta)(a^0 + a^3)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = a^+ \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = a^+ e^\psi$$

$$a'^- = a^- \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} = a^- e^{-\psi}$$

N.B. rapidity

$$\psi = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \Rightarrow \beta = \tanh \psi$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (M, M, \mathbf{0}_\perp)$$

boost lungo  
asse z

$$P'^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

$$P^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( A, \frac{M^2}{A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

$A = M \rightarrow$  rest frame dell'adrone

$A = Q \rightarrow$  Infinite **M**omentum **F**rame (IFM)

definizioni :

$$q^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -x_N A, \frac{Q^2}{x_N A}, \mathbf{0}_\perp \right)$$

invariante di Nachtmann  $x_N = -\frac{q^+}{P^+}$

$$q^2 = 2q^+q^- - \mathbf{q}_\perp^2 = -Q^2$$



$$2P \cdot q = \frac{Q^2}{x_N} - x_N M^2 \implies \frac{1}{x_B} = \frac{1}{x_N} - x_N \frac{M^2}{Q^2} \implies x_N x_B^2(..) = x_N x_B^2(..)$$

$$x_B^2 - x_N x_B + \frac{x_N^2}{4} = \frac{x_N^2}{4} \left( 1 + \frac{4x_B^2 M^2}{Q^2} \right) \implies x_N = \frac{2x_B}{1 + \sqrt{1 + \frac{4x_B^2 M^2}{Q^2}}} \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} x_B$$

miglior scaling in  $x_N$  quando  $Q \gtrsim M$

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( xA, \frac{p^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{xA}, \mathbf{p}_\perp \right)$$

frazione light-cone (longitudinale)  
di momento partonico

$$p^2 = 2p^+p^- - \mathbf{p}_\perp^2$$

$$x = \frac{p^+}{P^+}$$



# Quantizzazione di teoria di campo sul light-cone

regole di commutazione  
al tempo  $x^0=t=0$   
evoluzione in  $x^0$

regole di commutazione  
al tempo "light-cone"  $x^+=0$   
evoluzione in  $x^+$

variabili cinematiche  $\mathbf{x}$

$x^-$ ,  $\mathbf{x}_\perp$

momenti coniugati  $\mathbf{k}$

$k^+$ ,  $\mathbf{k}_\perp$

Hamiltoniana  $k^0$

$k^-$

quanto di campo

$$\psi(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2k^0} b_\alpha(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}$$

$$\psi_+(x) = \int \frac{dk^+ d\mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^3 k^+} b_\alpha(\mathbf{k}) u_+(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) v_+(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}$$

$$[b_\alpha(\mathbf{k}), b_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2k^0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\alpha\alpha'}$$

$$[b_\alpha(\mathbf{k}), b_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 k^- \delta(k^+ - k'^+) \delta(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta_{\alpha\alpha'}$$

.....

spazio di Fock

$$b^\dagger|0\rangle \rightarrow q \quad d^\dagger|0\rangle \rightarrow \bar{q}$$

.....

# Algebra di Dirac sul light-cone

rappresentazione usuale delle matrici di Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

↖ così (anti-)particelle hanno solo componenti upper (lower)  
nello spinore di Dirac

nuova rappresentazione per teoria di campo light-cone

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_{\perp} = \begin{pmatrix} i\sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & i\sigma_{\perp} \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \quad \gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad \text{ok}$$

definizioni :  $\gamma^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 \pm \gamma^3)$   $P_{\pm} = \frac{1}{2} \gamma^{\mp} \gamma^{\pm}$