

# Riassunto della lezione precedente

- regole di somma :  
GDH  
Bjorken polarizzata
- regola di somma GDH : test di proprietà fondamentali dell'ampiezza di scattering; versione generalizzata → esplorazione del passaggio da regime perturbativo a nonperturbativo
- necessità di introdurre correzioni radiative a QPM  
→ IQPM inglobato nella pQCD
- cancellazione divergenze ultraviolette → rinormalizzazione  
→ eq. di Callan-Symanzik → scala  $\mu_R$  → violazioni dello scaling
- cancellazione divergenze infrarosse reali e virtuali, divergenze collineari  
→ vertice di Altarelli-Parisi

# Eq. di Altarelli-Parisi

divergenze collineari e infrarosse + fattorizzazione collineare  
sono presenti a tutti gli ordini perturbativi  
sono indipendenti dal processo elementare hard

ad es. in e+e- ISR

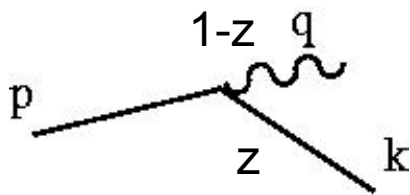
$$d\sigma^{(n\gamma)} \sim d\sigma_0 \alpha^n \log^n \left( \frac{s}{m_e^2} \right) \log^n E$$



approccio universale (QED/QCD) probabilistico  
senza diagrammi di Feynman, a livello partonico



vertice di Altarelli Parisi



$$\text{QED} \quad \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dk^2}{k^2} \frac{1 + (1-z)^2}{z} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dk^2}{k^2} \frac{1 + z'^2}{1 - z'}$$

$$\text{QCD} \quad \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{dk^2}{k^2} \frac{1 + z'^2}{1 - z'}$$

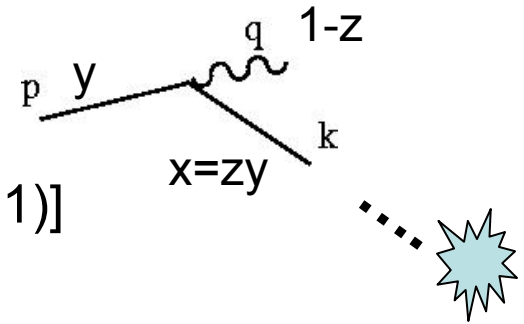
conserva frazione z di energia  
variando virtualità di  $dk^2$

quasi-coll. kin.  $p = (E, 0, 0, E), p^2 = 0$   
 $p_{\perp}/E \ll 1$   $k = \left( zE, k_{\perp}, 0, zE - \frac{k_{\perp}^2}{2zE} \right), k^2 = o(k_{\perp}^3)$   
 $q^2 = (p - k)^2 = -\frac{k_{\perp}^2}{z} + o(k_{\perp}^3)$

$$\text{N.B.} \quad \int_{m_e^2}^s \frac{dk^2}{k^2} \longrightarrow \log \left( \frac{s}{m_e^2} \right)$$

$D(x, s+ds)$  = densità di probabilità di trovare elettrone (partone) in elettrone (partone) con frazione  $x$  di energia e virtualità  $s+ds$

=  $s \rightarrow s+ds$  senza irraggiamento ( $x$  inalterato) +  
 $s \rightarrow s+ds$  passando da  $y$  a  $x=zy$   $0 \leq z < 1$



=  $[1 - (\text{contributo virtuale} + \text{reale soffice } z \sim 1)]$   
 + contributo "duro"  $z \geq 0$

evita singolarità di  $P(z)$  in  $z=1$   $\rightarrow$

$$= \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \lim_{x_+ \rightarrow 1} \int_0^{x_+} dz P(z) \right\} D(x, s) + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \int_x^1 dy \lim_{x_+ \rightarrow 1} \int_0^{x_+} dz P(z) D(y, s) \delta(zy - x)$$

$$\boxed{\frac{dD(x, s)}{d \log s} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_+(z) D\left(\frac{x}{z}, s\right)}$$



# evoluzione $\Leftrightarrow$ fattorizzazione: DIS inclusivo

Teorema : (Collins, Soper, Sterman, '89)

$$F_{1/2/3}(x_B, Q^2) = \sum_{i=f, \bar{f}, a} \int_{x_B}^1 \frac{dx}{x} C_{1/2/3} \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F^2}{\mu_R^2}, \alpha_s(\mu_R^2) \right) \phi_i(x, \mu_F, \mu_R)$$

somma su quark,  
antiquark e gluoni

$$\phi(x, \mu_F, \mu_R)$$

generalizzazione delle  
distribuzioni partoniche in QPM

$\mu_R$  scala di rinormalizzazione

$\mu_F$  scala di fattorizzazione : definisce  
ciò che è a brevi distanze  $\rightarrow C$

da ciò che è a lunghe distanze  $\rightarrow \phi$

N.B. può essere  $\mu_F = \mu_R (=Q)$

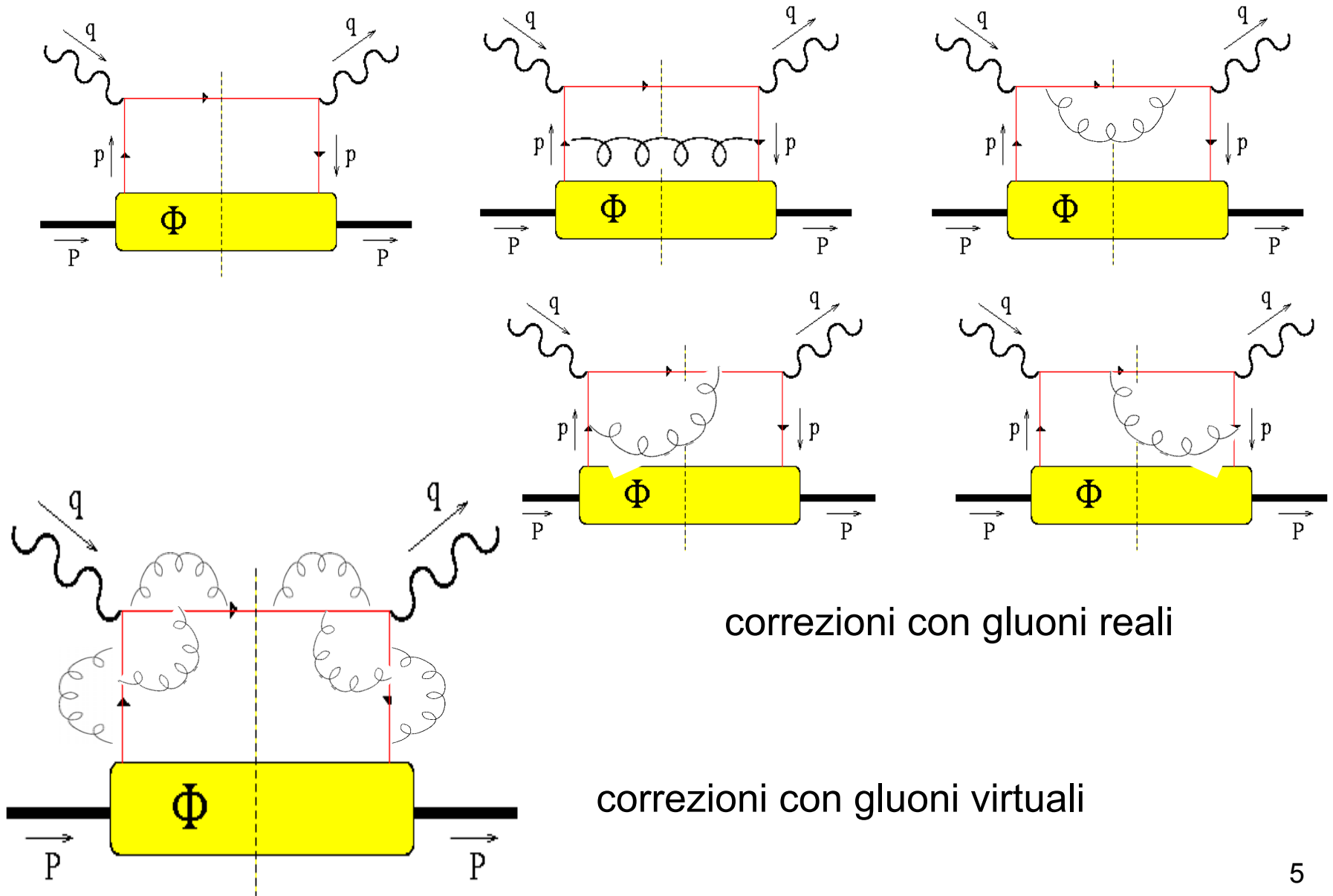
$$C = \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F}{\mu_R}, \alpha_s(\mu_R) \right)$$

coefficiente di Wilson

generalizzazione delle  $F^{\text{el}}$  in scattering elastico in QPM

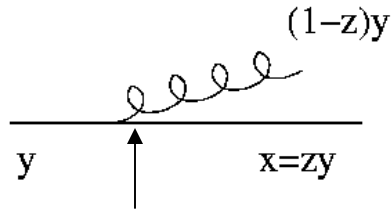
$$C_1^i = \frac{1}{2} \delta_{iq} e_q^2 \delta \left( 1 - \frac{x_B}{x} \right) \rightarrow F_1(x_B) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 \phi_q(x_B)$$

## DIS inclusivo : processi oltre il tree level



# Calcolo di C

gluoni reali



quark con momento  $y$  può irraggiare un gluone e riscaldare il suo momento a  $x$

**divergenze collineari** per  $z \rightarrow 1$

**da riassorbire in  $\phi$** , perché connesse all'evoluzione del singolo  $q$ , indipendenti dall'interazione

vertice di Altarelli-Parisi

determina l'evoluzione in  $Q^2$  di  $\phi$ , determina cioè il suo contenuto partonico

$$s = (p + q)^2 \sim 2p \cdot q - Q^2 = Q^2 \frac{1 - x_B}{x_B} \quad \text{divergenze soft per } x_B \rightarrow 1 \text{ (} s \rightarrow 0 \text{)}$$

non riassorbibili in  $\phi$ , perché riguardano gluone nello stato finale

non riassorbibili in  $C$  perché  $C$  è I.R.-safe e si romperebbe fattorizzazione

gluoni virtuali

quark on-shell nel taglio  $\rightarrow \delta((p+q)^2) \approx x_B/Q^2 \delta(x_B - 1)$

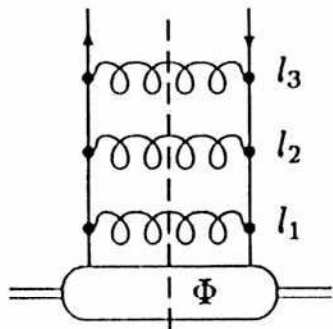
**in approssimazione collineare, cancellazione sistematica delle divergenze soft con gluone reale = "fattorizzazione collineare"**

calcolo dei diagrammi con regolarizzazione dimensionale  $d = 4 - 2\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ )

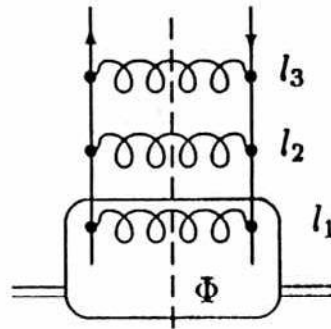
$\rightarrow$  scala fittizia  $\mu_d$  e compaiono poli  $\sim 1/\varepsilon$

# Evoluzione

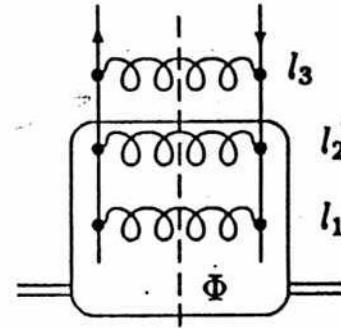
scala  $Q^2 = \mu_F^2 \rightarrow$  al variare di  $\mu_F$  la funzione di splitting determina il contenuto partonico della distribuzione  $\phi$ , discrimina cioè ciò che va inglobato in  $\phi$  (essendo off-shell  $< \mu_F$ ) da ciò che va inglobato in  $C$  (essendo off-shell  $> \mu_F$ )



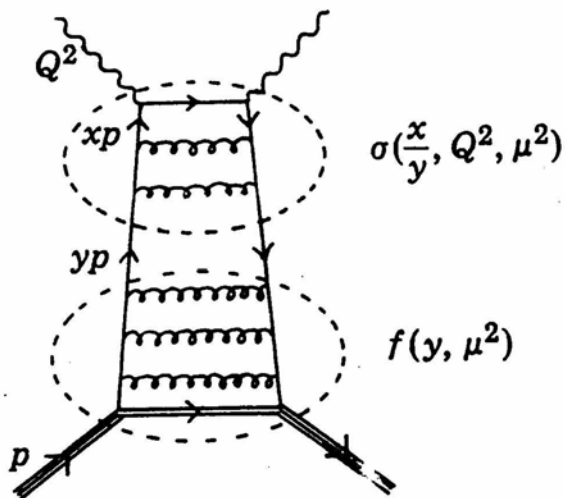
$$\boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{1T}^2 \leq \tilde{l}_{2T}^2 \leq \tilde{l}_{3T}^2$$



$$\tilde{l}_{1T}^2 \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{2T}^2 \leq \tilde{l}_{3T}^2$$



$$\tilde{l}_{1T}^2 \leq \tilde{l}_{2T}^2 \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{3T}^2$$



al variare di  $\mu_F$  la situazione cambia  
 $\rightarrow$  Evoluzione DGLAP  
**(Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi)**

assorbiti in  $\phi < \mu_F <$  assorbiti in  $C$



$$F_1(x, Q^2) \sim \int_x^1 \frac{dz}{z} f_1^{bare} \otimes \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \log \left( \frac{Q^2}{\mu_d^2} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F P_{qq} \left( \frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \right) + \dots \right\} \otimes \phi$$



cancellazione singolarità e dipendenza da  $\mu_d$

$$f_1 \equiv f_1^{bare} \otimes \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \log \left( \frac{\mu_F^2}{\mu_d^2} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F P_{qq} \left( \frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \right) + \dots \right\}$$

**DIS**

**$\overline{\text{MS}}$**

la scala di partenza dell'evoluzione (ad es.  $Q_0^2$ ) è arbitraria

→ assegnare contributi a  $\phi$  o a  $C$  è arbitrario

→ necessità di definire uno schema in cui calcolare l'evoluzione e confrontarsi con i dati consistentemente

diverse scelte: **schema DIS** (Altarelli, Ellis, Martinelli, '79) QPM esatto a  $Q_0^2$

**schema  $\overline{\text{MS}}$**  (Bardeen *et al.*, '78 ; Furmanski & Petronzio, '82 ; Collins & Soper, '82)

potere predittivo di DGLAP:

noto il risultato a  $Q_0^2 \rightarrow$  DGLAP danno risultato alla scala  $Q^2 \neq Q_0^2$

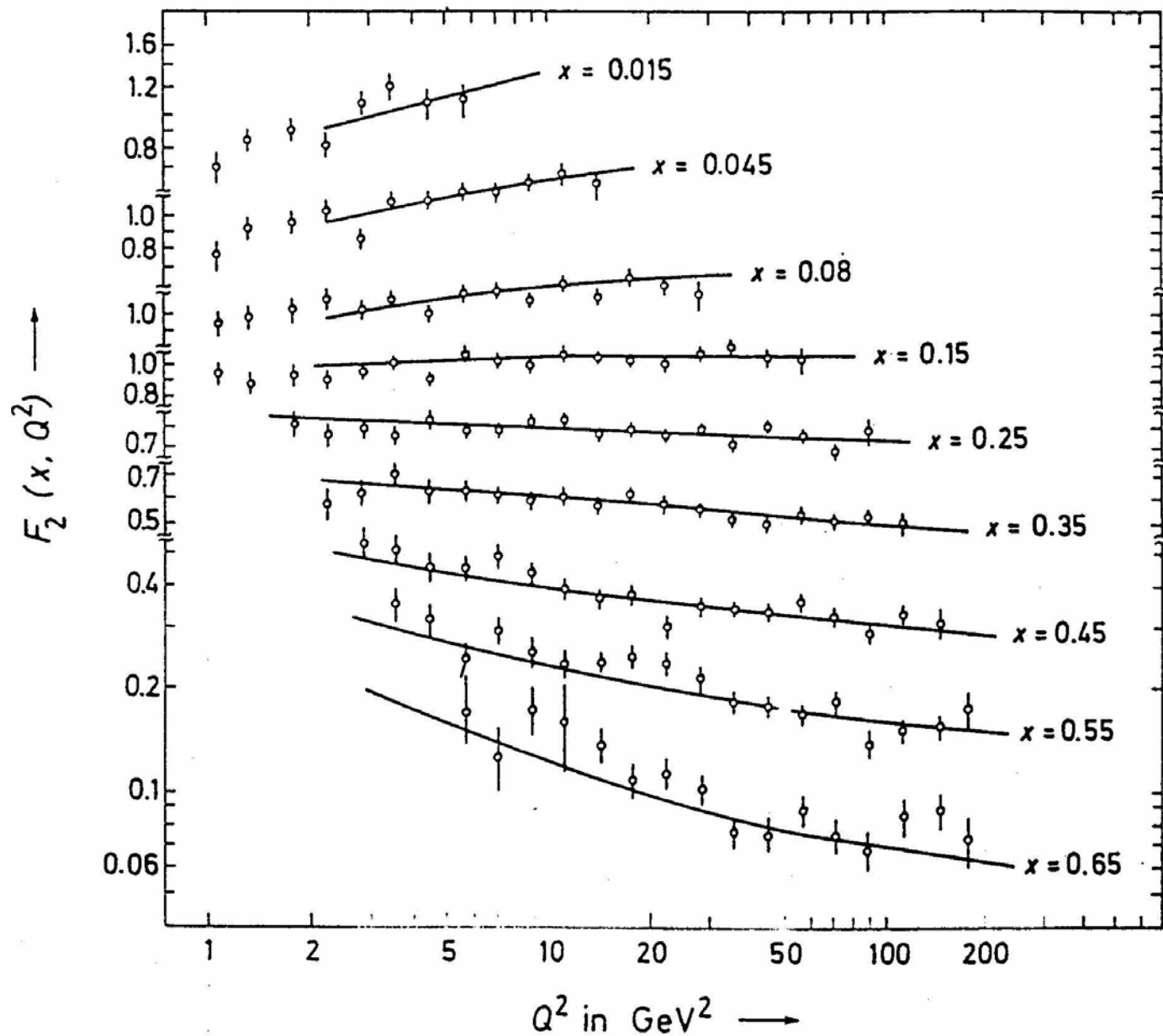
DGLAP + fattorizzazione

→ universalità delle distribuzioni partoniche

(definite ad una stessa scala  $\mu_F$  e nello stesso schema)

⇒ ampio potere predittivo della pQCD !





**Figure 19.9** The structure function  $F_2$  of neutrino–iron scattering. The curves are fits made on the basis of first-order perturbation theory in QCD (after Abramowicz 1983).

# evoluzione $\Leftrightarrow$ fattorizzazione: teorema

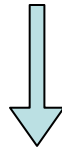
fattorizzazione in DIS inclusivo  $\rightarrow$  convoluzione:

$$F_1(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} C\left(\frac{x}{z}, ..\right) \phi(z, ..) \equiv C \otimes \phi$$

trasformata di Mellin di ordine N  $f_N = \int_0^1 dx x^{N-1} f(x)$

risulta  $(f \otimes g)_N = f_N \cdot g_N$

invarianza della fisica dalla scala di fattorizzazione  $\mu_F$  :  $\frac{dF_1}{d \log \mu_F^2} = 0$



$$\gamma_N[\alpha_s(Q^2)] = (P_+)_N$$



dimensioni anomale sono trasformate di Mellin di ordine N delle splitting functions (kernel delle eq. DGLAP di evoluzione)

## DIS semi-inclusivo

vale un teorema analogo a DIS inclusivo purché non si osservi  $\mathbf{p}_T$  dei partoni

## $e^+e^-$ inclusivo

Teorema : la sezione d'urto totale è finita nel limite di particelle senza massa, cioè è libera da divergenze “infrarosse” (IR)

(Sternan, '76, '78)

[generalizzazione del teorema KLN (Kinoshita-Lee-Nauenberg)]

$$\sigma_{tot} = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \sum_f e_f^2 \sum_n s_n \alpha_s^n(Q^2) \quad s_0 = 1$$



QPM

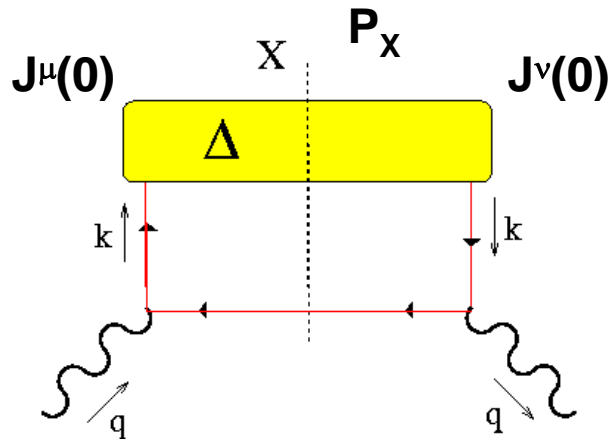
correzioni di pQCD

## Drell-Yan

Teorema di fattorizzazione

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dy d\Omega} = \sum_{f_1, f_2} \int_{x_1}^1 d\xi_1 \int_{x_2}^1 d\xi_2 \phi_{f_1}(\xi_1, \mu_F) \frac{d\sigma^{el}}{dQ^2 dy d\Omega} \left( \frac{x_1}{\xi_1}, \frac{x_2}{\xi_2}, \Omega, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(\mu_F) \right) \phi_{f_2}(\xi_2, \mu_F) + o\left(\frac{1}{Q^2}\right)$$

# $e^+e^-$ inclusivo



$$W^{\mu\nu} = \int \frac{dP_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(q - P_X) \langle 0 | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | 0 \rangle$$

$$= \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle$$

Teorema: contributo dominante nel limite di Bjorken viene da corte distanze  
 $\xi \rightarrow 0$



ma prodotto di operatori nello stesso punto spazio-temporale non è sempre ben definito in teoria di campo!

(continua)

Esempio: campo scalare neutro libero  $\phi(x) \rightarrow$  propagatore libero  $\Delta(x-y)$

$$\begin{aligned}\langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle &= -i \Delta(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{m}{4\pi^2} \frac{K_1 \left( m \sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon} \right)}{\sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon}} - \frac{i}{4\pi} \delta((x-y)^2) \xrightarrow{x \rightarrow y} \infty\end{aligned}$$


$K_1$  funz. Bessel modificata del 2° tipo

Esempio: campo scalare neutro interagente  $\phi(x)$

$$\begin{aligned}\langle 0 | \phi(x)^2 | 0 \rangle &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_n \langle 0 | \phi(0) | p, n \rangle \langle p, n | \phi(0) | 0 \rangle \\ &\geq \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} |\langle 0 | \phi(0) | p, 1 \rangle|^2 \equiv N \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \rightarrow \infty\end{aligned}$$

$$\hat{P} |p, n\rangle = p |p, n\rangle$$

$$\phi(x) = e^{i\hat{P} \cdot x} \phi(0) e^{-i\hat{P} \cdot x}$$


 dipende solo da  $p^2=m^2 \rightarrow$  e' una costante  $N$

# Operator Product Expansion

(Wilson, '69 prima congettura; Zimmermann, '73 dimostrazione in teoria perturbazioni;  
Collins, '84 dimostrazione diagrammatica )

definizione (anche operativa) di operatore composito:

$$\hat{A}(x) \hat{B}(y) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x-y) \hat{O}_i\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

- gli operatori locali  $\hat{O}_i$  sono regolari nell'argomento per ogni  $i=0,1,2,\dots$
- la divergenza per  $x \rightarrow y$  e' assorbita nei coefficienti  $C_i$
- i termini sono ordinati per singularita' decrescenti in  $C_i$ ,  $i=0,1,2,\dots$
- di solito  $\hat{O}_0 = \mathbf{I}$ , ma espressione esplicita dell'espansione va trovata separatamente per ogni tipo di processo
- OPE e' anche una definizione operativa perche' puo' essere usata per definire un operatore composito regolare. Esempio : teoria  $\phi^4$  ;  
l'operatore composito  $\phi(x)^2$  puo' essere costruito come

$$\phi(x)^2 \equiv \lim_{x \rightarrow y} \frac{\phi(x) \phi(y) - C_0(x-y)}{C_1(x-y)} = \hat{O}_1(x)$$

# il teorema di Wick

campo scalare  $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} [a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}]$

ordine “normale” : : = spostare  $a^\dagger$  a sinistra,  $a$  a destra  $\rightarrow$  annichilano su  $|0\rangle$   
 ordine “temporale”  $\mathcal{T}$  = ordinare campi a tempi crescenti verso sinistra

**Step 1**  $\mathcal{T}\phi(x) = : \phi(x) :$

**Step 2**  $[\mathcal{T}\phi(x_1)]\phi(x_2) = \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] = : \phi(x_1) : \phi(x_2)$

$t_2 < t_1$   $= \phi(x_1)\phi^+(x_2) + \phi(x_1)\phi^-(x_2) = \phi(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^-(x_2)$   
 $+ \phi^+(x_1)\phi^-(x_2)$

analogo per  $t_2 > t_1$

$+ \phi^-(x_2)\phi^+(x_1) + [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)]$

Quindi

$\mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)] = : \phi(x)\phi(y) : + \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)] | 0 \rangle$   
 $= \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] | 0 \rangle$   
 $\lim_{x \rightarrow y} \lim_{x \rightarrow y} = 1 \cdot \hat{O}_1(x) + C_0(x - y) \cdot \mathbb{I}$



generalizzazione  
ricorsiva

analogamente per campi fermionici non interagenti

$$\mathcal{T} [\psi(x)\bar{\psi}(y)] = : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \langle 0 | \mathcal{T} [\psi(x)\bar{\psi}(y)] | 0 \rangle$$

formula generale del teorema di Wick:  $\phi_i \overset{\sqcap}{\phi_j} \equiv \langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x_i)\phi(x_j)] | 0 \rangle$

$$\mathcal{T} [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n] = : \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n :$$

$$+ \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j=1}}^n P_{ij} : \phi_1 \dots \phi_{i-1} \phi_{i+1} \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_n : \phi_i \overset{\sqcap}{\phi_j}$$

$$+ \sum_{\substack{i \neq j \neq k \neq l \\ i,j,k,l=1}}^n : \phi_1 \dots \phi_{i-1} \phi_{i+1} \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_{k-1} \phi_{k+1} \dots \phi_{l-1} \phi_{l+1} \dots \phi_n :$$

$$\left( P_{ijkl} \phi_i \overset{\sqcap}{\phi_j} \phi_k \overset{\sqcap}{\phi_l} + P_{ikjl} \phi_i \overset{\sqcap}{\phi_k} \phi_j \overset{\sqcap}{\phi_l} + P_{iljk} \phi_i \overset{\sqcap}{\phi_l} \phi_j \overset{\sqcap}{\phi_k} \right)$$

+....

$$P_{ij} = (-1)^m$$

$m = n^0$  di permutazioni per riportare gli indici nell'ordine naturale 1, ..., i-1, i, ..., j-1, j, ..., n



## Applicazione a $e^+e^-$ e DIS inclusivi

$W^{\mu\nu} \Rightarrow J^\mu(\xi) J^\nu(0)$  con  $J^\mu$  la corrente e.m. di quark

prodotto normale : : utile per definire un operatore composito per  $\xi \rightarrow 0$

$\Rightarrow$  studiare  $\mathcal{T}[J^\mu(\xi) J^\nu(0)]$  per  $\xi \rightarrow 0$  con il teorema di Wick

$$\mathcal{T}[J^\mu(\xi) J^\nu(0)] =$$

$$\begin{aligned} & : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) : + : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \gamma^\nu \psi(0) : \psi(\xi) \bar{\psi}(0) + \\ & : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \gamma^\mu \psi(\xi) : \psi(0) \bar{\psi}(\xi) - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \psi(0) \bar{\psi}(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] S_F(-\xi) S_F(\xi) - : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \gamma^\nu \psi(0) : i S_F(\xi) \\ & - : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \gamma^\mu \psi(\xi) : i S_F(-\xi) + : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) : \end{aligned}$$

$$\psi(\xi) \bar{\psi}(0) = \langle 0 | \mathcal{T} [\psi(\xi) \bar{\psi}(0)] | 0 \rangle = -i S_F(\xi) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot \xi}}{p - m + i\epsilon}$$

divergente per  $\xi \rightarrow 0 \Rightarrow$  OPE



# Singularita` del propagatore fermionico libero

$$S_F(\xi) = (i \not{\partial} + m) \Delta(\xi)$$

$$\Delta(\xi) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot \xi}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = i \frac{m}{4\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K_1 \left( m \sqrt{-\xi^2 + i\epsilon} \right)}{\sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} + \frac{1}{4\pi} \delta(\xi^2)$$

$$\stackrel{\xi \rightarrow 0}{\sim} \frac{im}{4\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m \sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} + \text{termini meno singolari}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\xi^2 - i\epsilon} + \text{termini meno singolari}$$

↑  
singularita` light-cone

↓  
grado di singularita` proporzionale a potenza di q in trasformata di Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{iq \cdot x}}{(x - i\epsilon)^\alpha} = \frac{2\pi e^{i\alpha\pi/2}}{\Gamma(\alpha)} \theta(q) q^{\alpha-1}$$

singularita` piu` alta in  
coefficienti di OPE

↓  
contributo dominante di  $J^\mu$  in  $W^{\mu\nu}$

(continua)

$$\begin{aligned} S_F(\xi) &= (i\gamma \cdot \partial + m) \Delta(\xi) \sim (i\gamma \cdot \partial + m) \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{\xi^2 - i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{-2\gamma \cdot \xi}{(\xi^2 - i\epsilon)^2} \frac{i}{4\pi^2 i} + \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{m}{\xi^2 - i\epsilon} + \text{termini meno singolari} \end{aligned}$$



termine piu' singolare in  $\mathcal{T}[J^\mu(\xi) J^\nu(0)]$

$$\begin{aligned} \text{Tr} [S_F(-\xi) \gamma^\mu S_F(\xi) \gamma^\nu] &\sim -\frac{4}{16\pi^4 (\xi^2 - i\epsilon)^4} \text{Tr} [\not{\xi} \gamma^\mu \not{\xi} \gamma^\nu] + \dots \\ &= \frac{\xi^2 g^{\mu\nu} - 2\xi^\mu \xi^\nu}{\pi^4 (\xi^2 - i\epsilon)^4} + \dots \end{aligned}$$



termine meno singolare in  $\mathcal{T}[J^\mu(\xi) J^\nu(0)]$

$$: \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) : = \hat{O}(\xi, 0) \quad \text{operatore bilocale regolare}$$

(continua)

termini intermedi

$$\begin{aligned} & - : \bar{\psi}(\xi) \gamma_\mu i S_F(\xi) \gamma_\nu \psi(0) : - : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu i S_F(-\xi) \gamma_\mu \psi(\xi) : \\ & \sim \frac{i \xi^\lambda}{2\pi^2(\xi^2 - i\epsilon)^2} : \bar{\psi}(\xi) \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \psi(0) - \bar{\psi}(0) \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu \psi(\xi) : + \dots \\ & = \frac{i \xi^\lambda}{2\pi^2(\xi^2 - i\epsilon)^2} \left( \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) + i \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) \right) \end{aligned}$$



$$\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu = \left( \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} + i \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \gamma_5 \right) \gamma^\rho$$

$$\gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu = \left( \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} - i \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \gamma_5 \right) \gamma^\rho$$

$$\sigma_{\mu\lambda\nu\rho} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}$$

$$\Rightarrow \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) = : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\rho \psi(0) - \bar{\psi}(0) \gamma^\rho \psi(\xi) :$$

$$\hat{O}_A^\rho(\xi, 0) = : \bar{\psi}(\xi) \gamma_5 \gamma^\rho \psi(0) + \bar{\psi}(0) \gamma_5 \gamma^\rho \psi(\xi) :$$

operatori bilocali regolari

(continua)

riassumendo :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} [J_\mu(\xi) J_\nu(0)] = & \frac{\xi^2 g_{\mu\nu} - 2\xi_\mu \xi_\nu}{\pi^4 (\xi^2 - i\epsilon)^4} + \frac{i\xi^\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) \\ & - \frac{\xi^\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) + \hat{O}_{\mu\nu}(\xi, 0) \end{aligned}$$

- $\hat{O}_{V/A}^\mu(\xi, 0)$  e  $\hat{O}^{\mu\nu}(\xi, 0)$  sono operatori bilocali regolari per  $\xi \rightarrow 0$  ;  
contengono informazioni sul comportamento a lunghe distanze
- i coefficienti sono singolari per  $\xi \rightarrow 0$  (ordinati per singolarita` decrescente);  
contengono informazioni sul comportamento a corte distanze
- fattorizzazione tra corte e lunghe distanze rigorosa ad ogni ordine
- formula contiene il comportamento di quark liberi a corte distanze  
→ portata generale per ritrovare i risultati di QPM
- sia in DIS che  $e^+e^-$  inclusivi appare  $[J^\mu(\xi), J^\nu(0)] \Rightarrow$  trasformazione della  
formula di cui sopra