

## Riassunto della lezione precedente

- misura sperimentale di asimmetrie di elicità → distribuzione di elicità → 1° momento di Mellin → contributo dei vari flavour all'elicità
- Ellis-Jaffe sum rule e l'esperimento EMC: la “spin crisis”
- regole di somma :
  - GDH
  - Bjorken polarizzata
- regola di somma GDH : test di proprietà fondamentali dell'ampiezza di scattering; versione generalizzata → esplorazione del passaggio da regime perturbativo a nonperturbativo

correzioni QCD		1	$\alpha_s$	$\alpha_s^2$	...
correzioni di potenze	1	QPM	→	IQPM	→
	1/Q	Improved <b>Q</b> uark <b>P</b> arton <b>M</b> odel			
	1/Q <sup>2</sup>				
	1/Q <sup>3</sup>				
	...				

## Breve riassunto

1° passo : rinormalizzazione della teoria  $\rightarrow$  cancellazione delle divergenze ultraviolette (UV)

- ad una certa scala  $\mu_R$  si definiscono le quantità fisiche come massa, coupling e intensità del campo attraverso la procedura di rinormalizzazione  $\rightarrow$  controtermini nella  $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned}\phi_0 &\rightarrow \phi = Z_1^{-1} \phi_0 \\ m_0 &\rightarrow m = Z_2^{-1} m_0 \\ g_0 &\rightarrow g = Z_3^{-1} g_0\end{aligned}$$

- invarianza della fisica dalla scala  $\mu_R \rightarrow$  equazioni di Callan-Symanzik

$$\mu_R \frac{d}{d\mu_R} G = 0 \quad \longrightarrow \quad \left[ \mu_R \frac{\partial}{\partial \mu_R} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma(g) \frac{\partial}{\partial g} \right] G = 0$$

$G = \text{funzione di Green a } n \text{ punti}$

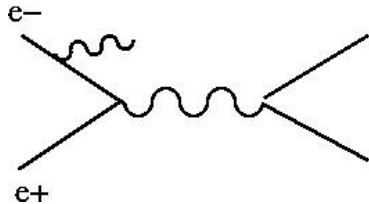
$$\frac{d}{d \log Q^2} \alpha_s(Q^2) = \beta(\alpha_s) \rightarrow \text{running } \alpha_s$$

$\gamma$  dimensione anomala dei campi

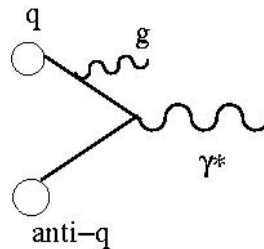
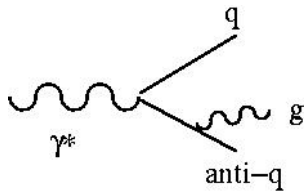
2° passo : cancellare le divergenze infrarosse (IR) e/o inglobarle in funzioni incognite che generalizzano le distribuzioni partoniche

Tutte le teorie di gauge rinormalizzabili e con quanti massless  
(QED  $\rightarrow$  fotoni, QCD  $\rightarrow$  gluoni)  
contengono divergenze infrarosse e collineari

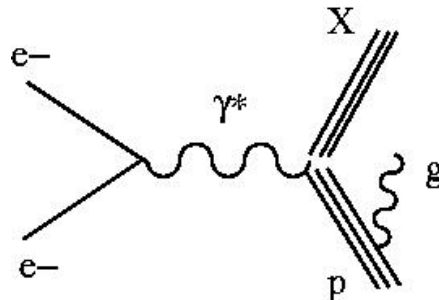
$\Rightarrow e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow f \text{ anti-}f + \gamma$  (Initial **S**tate **R**adiation)



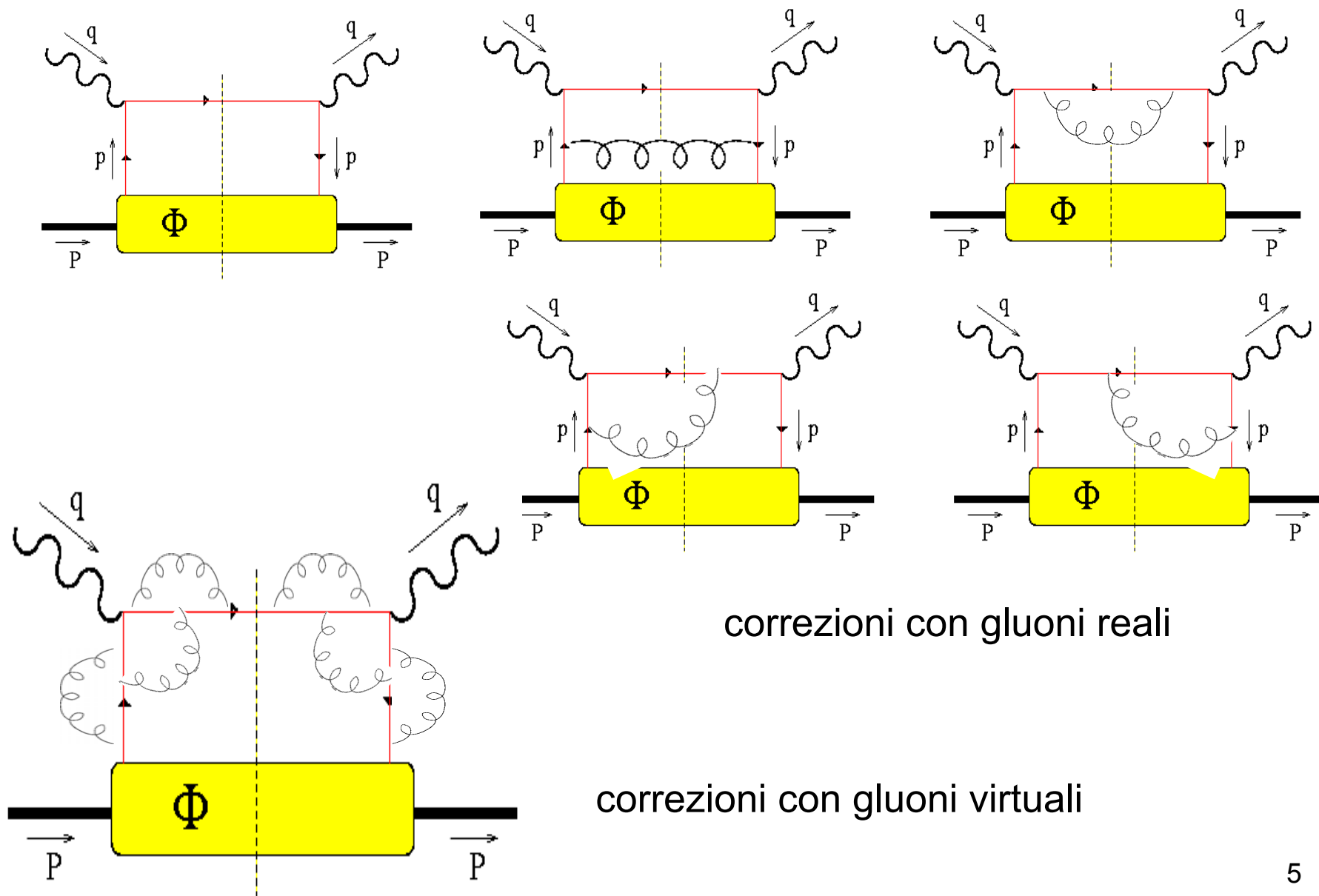
$\Rightarrow \gamma^* \rightarrow q \text{ anti-}q + g$  oppure  $q \text{ anti-}q \rightarrow \gamma^* + g$  (**ISR** in QCD)



$\Rightarrow e^-p \rightarrow e^- X$

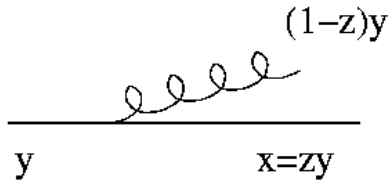


# DIS inclusivo



## Divergenze in DIS inclusivo

gluoni reali



quark con momento  $y$  può irraggiare un gluone e riscaldare il suo momento a  $x$

divergenze collineari per  $z \rightarrow 1$

$$s = (p + q)^2 \sim 2p \cdot q - Q^2 = Q^2 \frac{1 - x_B}{x_B} \quad \text{divergenze soft per } x_B \rightarrow 1 \text{ (} s \rightarrow 0 \text{)}$$

gluoni virtuali

quark on-shell nel taglio  $\rightarrow \delta((p+q)^2) \approx x_B/Q^2 \delta(x_B - 1)$

in approssimazione collineare, cancellazione sistematica delle divergenze soft con gluone reale = “fattorizzazione collineare”

# Eq. di Altarelli-Parisi

divergenze collineari e infrarosse + fattorizzazione collineare  
sono presenti a tutti gli ordini perturbativi  
sono indipendenti dal processo elementare hard

ad es. in e+e- ISR

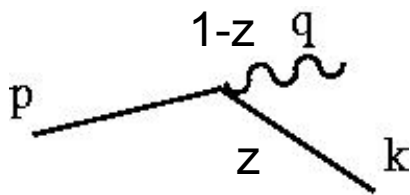
$$d\sigma^{(n\gamma)} \sim d\sigma_0 \alpha^n \log^n \left( \frac{s}{m_e^2} \right) \log^n E$$



approccio universale (QED/QCD) probabilistico  
senza diagrammi di Feynman



vertice di Altarelli Parisi



$$\text{QED} \quad \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dk^2}{k^2} \frac{1 + (1-z)^2}{z} = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dk^2}{k^2} \frac{1 + z'^2}{1 - z'}$$

$$\text{QCD} \quad \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{dk^2}{k^2} \frac{1 + z'^2}{1 - z'}$$

conserva frazione z di energia  
variando virtualità di  $dk^2$

quasi-coll. kin.  $p = (E, 0, 0, E)$   
 $p_{\perp}/E \ll 1$   $k = \left( zE, p_{\perp}, 0, zE - \frac{p_{\perp}^2}{2zE} \right)$   
 $q^2 = (p - k)^2 = -\frac{p_{\perp}^2}{z} + o(p_{\perp}^4)$

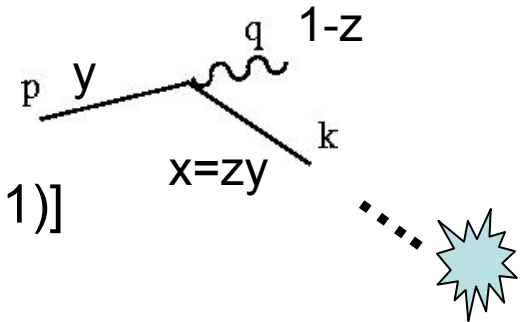
N.B.  $\int_{m_e^2}^s \frac{dk^2}{k^2} \longrightarrow \log \left( \frac{s}{m_e^2} \right)$

25-nov-09

cambio di virtualità elementare dopo emissione

$D(x, s+ds)$  = densità di probabilità di trovare elettrone (partone) in elettrone (partone) con frazione  $x$  di energia e virtualità  $s+ds$

=  $s \rightarrow s+ds$  senza irraggiamento ( $x$  inalterato) +  
 $s \rightarrow s+ds$  passando da  $y$  a  $x=zy$   $0 \leq z < 1$



=  $[1 - (\text{contributo virtuale} + \text{reale soffice } z \sim 1)]$   
 + contributo "duro"  $z \geq 0$

evita singolarità di  $P(z)$  in  $z=1$   $\rightarrow$

$$= \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \lim_{x_+ \rightarrow 1} \int_0^{x_+} dz P(z) \right\} D(x, s) + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{ds}{s} \int_x^1 dy \lim_{x_+ \rightarrow 1} \int_0^{x_+} dz P(z) D(y, s) \delta(zy - x)$$

$$\boxed{\frac{dD(x, s)}{d \log s} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_+(z) D\left(\frac{x}{z}, s\right)}$$





# evoluzione $\Leftrightarrow$ fattorizzazione: DIS inclusivo

Teorema : (Collins, Soper, Sterman, '89)

$$F_{1/2/3}(x_B, Q^2) = \sum_{i=f, \bar{f}, a} \int_{x_B}^1 \frac{dx}{x} C_{1/2/3} \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F^2}{\mu_R^2}, \alpha_s(\mu_R^2) \right) \phi_i(x, \mu_F, \mu_R)$$

somma su quark,  
antiquark e gluoni

$$\phi(x, \mu_F, \mu_R)$$

generalizzazione delle  
distribuzioni partoniche in QPM

$\mu_R$  scala di rinormalizzazione

$\mu_F$  scala di fattorizzazione : definisce  
cio' che e' a brevi distanze  $\rightarrow C$

da cio' che e' a lunghe distanze  $\rightarrow \phi$

N.B. puo' essere  $\mu_F = \mu_R (=Q)$

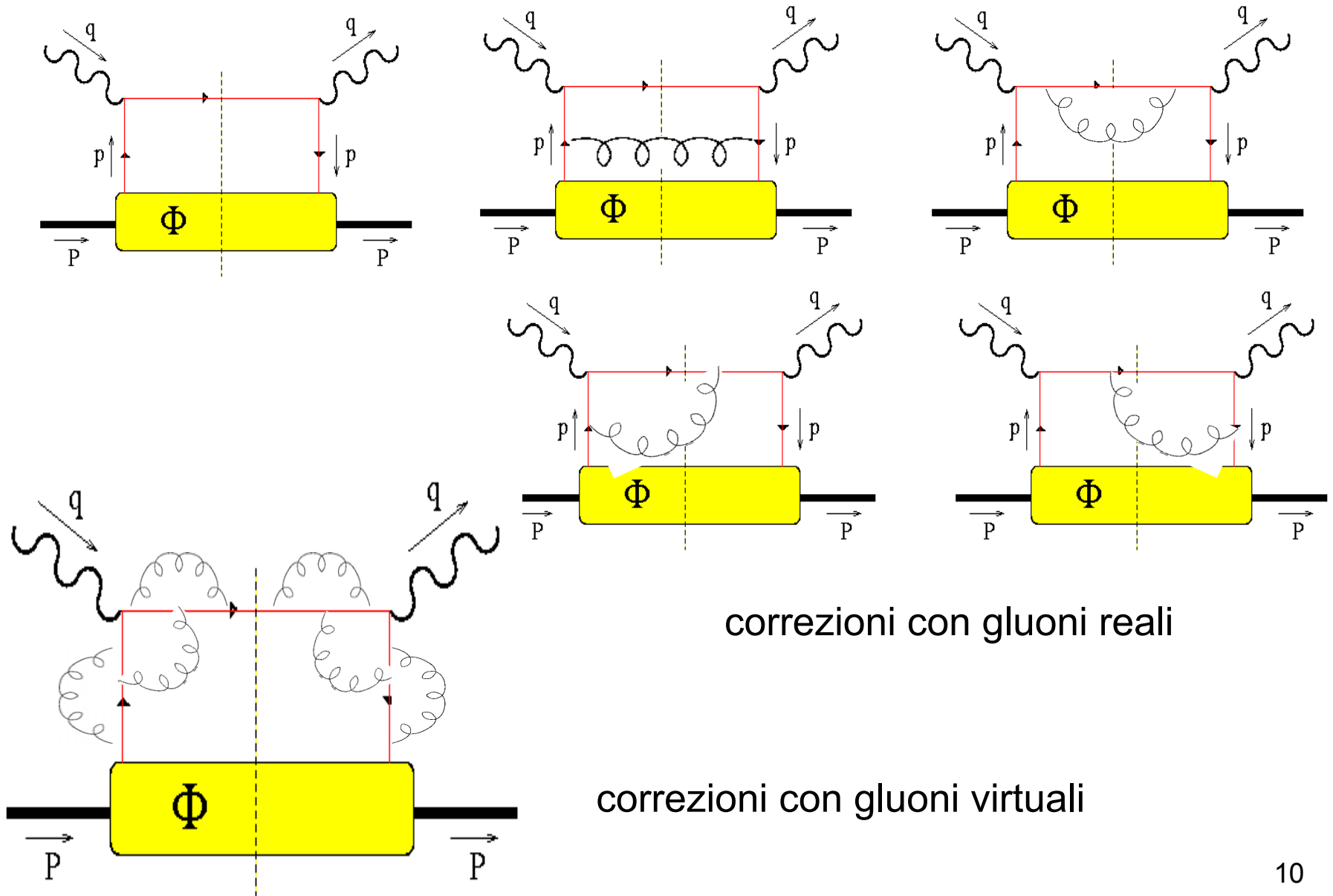
$$C = \left( \frac{x_B}{x}, \frac{Q^2}{\mu_R^2}, \frac{\mu_F}{\mu_R}, \alpha_s(\mu_R) \right)$$

coefficiente di Wilson

generalizzazione delle  $F^{\text{el}}$  in scattering elastico in QPM

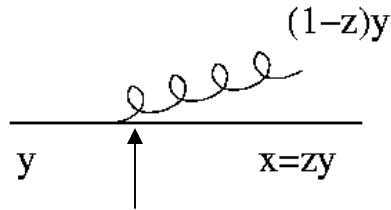
$$C_1^i = \frac{1}{2} \delta_{iq} e_q^2 \delta \left( 1 - \frac{x_B}{x} \right) \rightarrow F_1(x_B) = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 \phi_q(x_B)$$

## DIS inclusivo : processi oltre il tree level



## Calcolo di C

gluoni reali



quark con momento  $y$  può irraggiare un gluone e riscaldare il suo momento a  $x$

**divergenze collineari** per  $z \rightarrow 1$

**da riassorbire in  $\phi$** , perché connesse all'evoluzione del singolo  $q$ , indipendenti dall'interazione

vertice di Altarelli-Parisi

determina l'evoluzione in  $Q^2$  di  $\phi$ , determina cioè il suo contenuto partonico

$$s = (p + q)^2 \sim 2p \cdot q - Q^2 = Q^2 \frac{1 - x_B}{x_B} \quad \text{divergenze soft per } x_B \rightarrow 1 \text{ (} s \rightarrow 0 \text{)}$$

non riassorbibili in  $\phi$ , perché riguardano gluone nello stato finale

non riassorbibili in  $C$  perché  $C$  è I.R.-safe e si romperebbe fattorizzazione

gluoni virtuali

quark on-shell nel taglio  $\rightarrow \delta((p+q)^2) \approx x_B/Q^2 \delta(x_B - 1)$

**in approssimazione collineare, cancellazione sistematica delle divergenze soft con gluone reale = "fattorizzazione collineare"**

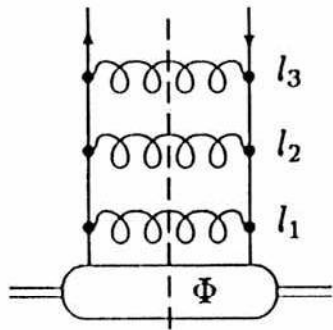
calcolo dei diagrammi con regolarizzazione dimensionale  $d = 4 - 2\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ )

$\rightarrow$  scala fittizia  $\mu_d$  e compaiono poli  $\sim 1/\varepsilon$

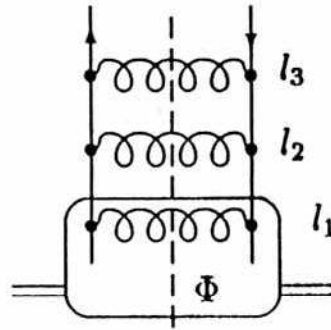


# Evoluzione

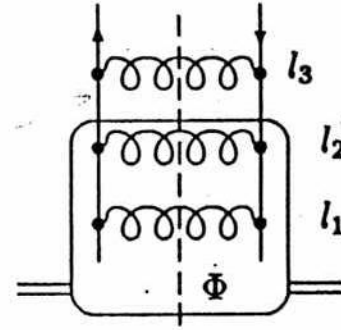
scala  $Q^2 = \mu_F \rightarrow$  al variare di  $\mu_F$  la funzione di splitting determina il contenuto partonico della distribuzione  $\phi$ , discrimina cioè ciò che va inglobato in  $\phi$  (essendo off-shell  $< \mu_F$ ) da ciò che va inglobato in  $C$  (essendo off-shell  $> \mu_F$ )



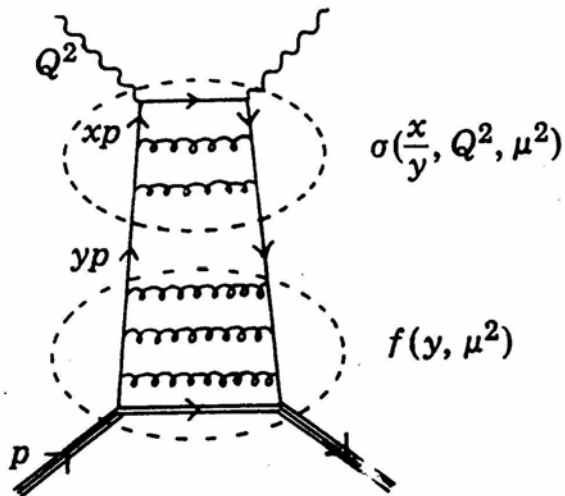
$$\boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{1T}^2 \leq \tilde{l}_{2T}^2 \leq \tilde{l}_{3T}^2$$



$$\tilde{l}_{1T}^2 \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{2T}^2 \leq \tilde{l}_{3T}^2$$



$$\tilde{l}_{1T}^2 \leq \tilde{l}_{2T}^2 \leq \boxed{\mu_F^2} \leq \tilde{l}_{3T}^2$$



al variare di  $\mu_F$  la situazione cambia  
 $\rightarrow$  Evoluzione DGLAP  
**(Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi)**

assorbiti in  $\phi < \mu_F <$  assorbiti in  $C$



$$F_1(x, Q^2) \sim \int_x^1 \frac{dz}{z} f_1^{bare} \otimes \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \log \left( \frac{Q^2}{\mu_d^2} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F P_{qq} \left( \frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \right) + \dots \right\} \otimes \phi$$



cancellazione singolarità e dipendenza da  $\mu_d$

$$f_1 \equiv f_1^{bare} \otimes \left\{ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq} \log \left( \frac{\mu_F^2}{\mu_d^2} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F P_{qq} \left( \frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \log 4\pi \right) + \dots \right\}$$

**DIS**

**$\overline{\text{MS}}$**

la scala di partenza dell'evoluzione (ad es.  $Q_0^2$ ) è arbitraria

→ assegnare contributi a  $\phi$  o a  $C$  è arbitrario

→ necessità di definire uno schema in cui calcolare l'evoluzione e confrontarsi con i dati consistentemente

diverse scelte: **schema DIS** (Altarelli, Ellis, Martinelli, '79) QPM esatto a  $Q_0^2$

**schema  $\overline{\text{MS}}$**  (Bardeen *et al.*, '78 ; Furmanski & Petronzio, '82 ; Collins & Soper, '82)

potere predittivo di DGLAP:

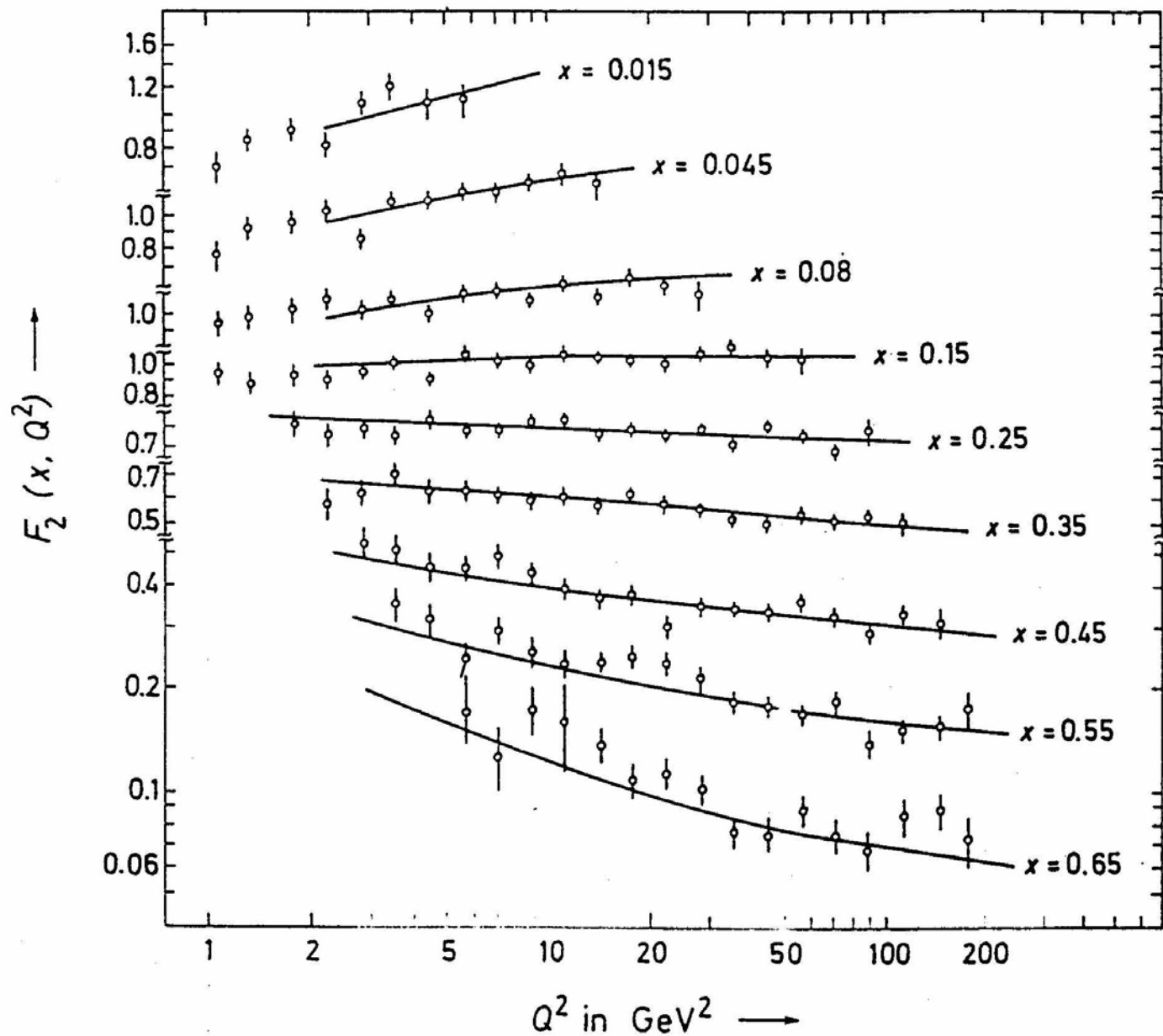
noto il risultato a  $Q_0^2 \rightarrow$  DGLAP danno risultato alla scala  $Q^2 \neq Q_0^2$

DGLAP + fattorizzazione

→ universalità delle distribuzioni partoniche

(definite ad una stessa scala  $\mu_F$  e nello stesso schema)

⇒ ampio potere predittivo della pQCD !



**Figure 19.9** The structure function  $F_2$  of neutrino–iron scattering. The curves are fits made on the basis of first-order perturbation theory in QCD (after Abramowicz 1983).

# evoluzione $\Leftrightarrow$ fattorizzazione: teorema

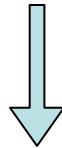
fattorizzazione in DIS inclusivo  $\rightarrow$  convoluzione:

$$F_1(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} C\left(\frac{x}{z}, \dots\right) \phi(z, \dots) \equiv C \otimes \phi$$

trasformata di Mellin di ordine N  $f_N = \int_0^1 dx x^{N-1} f(x)$

risulta  $(f \otimes g)_N = f_N \cdot g_N$

invarianza della fisica dalla scala di fattorizzazione  $\mu_F$  :  $\frac{dF_1}{d \log \mu_F^2} = 0$



$$\gamma_N[\alpha_s(Q^2)] = (P_+)_N$$



dimensioni anomale sono trasformate di Mellin di ordine N delle splitting functions (kernel delle eq. DGLAP di evoluzione)

## DIS semi-inclusivo

vale un teorema analogo a DIS inclusivo purché non si osservi  $\mathbf{p}_T$  dei partoni

## $e^+e^-$ inclusivo

Teorema : la sezione d'urto totale è finita nel limite di particelle senza massa, cioè è libera da divergenze “infrarosse” (IR)

(Sternan, '76, '78)

[generalizzazione del teorema KLN (Kinoshita-Lee-Nauenberg)]

$$\sigma_{tot} = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \sum_f e_f^2 \sum_n s_n \alpha_s^n(Q^2)$$

$$s_0 = 1$$



QPM

correzioni di pQCD

## Drell-Yan

Teorema di fattorizzazione

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dy d\Omega} = \sum_{f_1, f_2} \int_{x_1}^1 d\xi_1 \int_{x_2}^1 d\xi_2 \phi_{f_1}(\xi_1, \mu_F) \frac{d\sigma^{el}}{dQ^2 dy d\Omega} \left( \frac{x_1}{\xi_1}, \frac{x_2}{\xi_2}, \Omega, \frac{Q^2}{\mu_F^2}, \alpha_s(\mu_F) \right) \phi_{f_2}(\xi_2, \mu_F) + o\left(\frac{1}{Q^2}\right)$$