

# Riassunto della lezione precedente

- regola di somma GDH : test di proprietà fondamentali dell'ampiezza di scattering; versione generalizzata → esplorazione del passaggio da regime perturbativo a nonperturbativo
- necessita` di introdurre correzioni radiative a QPM → IQPM inglobato nella pQCD :
  - rinormalizzazione → eq. di Callan-Symanzik → scala  $\mu_R$
  - teoremi di fattorizzazione → coeff. di Wilson e PDF → scala  $\mu_F$
- calcolo dei coeff. di Wilson → trattazione delle singularita` :
  - cancellazione delle divergenze virtuali → fattorizzazione collineare
  - assorbimento divergenze reali → schemi di fattorizzazione  
→ evoluzione → vertice AP ed eq. DGLAP

$$e^+e^- \text{ (DIS) inclusivo } W^{\mu\nu} = \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle 0|[J^\mu(\xi), J^\nu(0)]|0\rangle \quad \xi \rightarrow 0$$

ma prodotto di operatori nello stesso punto spazio-temporale non e' sempre ben definito in teoria di campo !

Esempio: campo scalare neutro libero  $\phi(x) \rightarrow$  propagatore libero  $\Delta(x-y)$

$$\begin{aligned} \langle 0|\mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle &= -i\Delta(x-y) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{m}{4\pi^2} \frac{K_1\left(m\sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon}\right)}{\sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon}} - \frac{i}{4\pi} \delta((x-y)^2) \xrightarrow{x \rightarrow y} \infty \end{aligned}$$

$K_1$  funz. Bessel modificata del 2° tipo

Esempio: campo scalare neutro interagente  $\phi(x)$

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi(x)^2|0\rangle &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_n \langle 0|\phi(0)|p, n\rangle \langle p, n|\phi(0)|0\rangle & \hat{P}|p, n\rangle &= p|p, n\rangle \\ & & \phi(x) &= e^{i\hat{P}\cdot x} \phi(0) e^{-i\hat{P}\cdot x} \\ &\geq \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} |\langle 0|\phi(0)|p, 1\rangle|^2 \equiv N \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

dipende solo da  $p^2=m^2 \rightarrow$  e' una costante  $N$

# Operator Product Expansion

(Wilson, '69 prima congettura; Zimmermann, '73 dimostrazione in teoria perturbazioni;  
Collins, '84 dimostrazione diagrammatica )

definizione (anche operativa) di operatore composito:

$$\hat{A}(x) \hat{B}(y) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x-y) \hat{O}_i \left( \frac{x+y}{2} \right)$$

- gli operatori locali  $\hat{O}_i$  sono regolari in  $x$  per ogni  $i=0,1,2\dots$
- la divergenza per  $x \rightarrow y$  e' assorbita nei coefficienti  $C_i$
- i termini sono ordinati per singularita' decrescenti in  $C_i$ ,  $i=0,1,2\dots$
- di solito  $\hat{O}_0 = \mathbf{I}$ , ma espressione esplicita dell'espansione va trovata separatamente per ogni tipo di processo
- OPE e' anche una definizione operativa perche' puo' essere usata per definire un operatore composito regolare. Esempio : teoria  $\phi^4$  ;  
l'operatore composito  $\phi(x)^2$  puo' essere costruito come

$$\phi(x)^2 \equiv \lim_{x \rightarrow y} \frac{\phi(x) \phi(y) - C_0(x-y)}{C_1(x-y)} = \hat{O}_1(x)$$

# il teorema di Wick

campo scalare  $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} [a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}]$

ordine “normale” : : = spostare  $^\dagger$  a sinistra,  $a$  a destra  $\rightarrow$  annichilano su  $|0\rangle$   
 ordine “temporale”  $\mathcal{T}$  = ordinare campi a tempi crescenti verso sinistra

**Step 1**  $\mathcal{T}\phi(x) = : \phi(x) :$

**Step 2**  $[\mathcal{T}\phi(x_1)]\phi(x_2) = \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] = : \phi(x_1) : \phi(x_2)$

$t_2 < t_1$   $= \phi(x_1)\phi^+(x_2) + \phi(x_1)\phi^-(x_2) = \phi(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^-(x_2)$   
 $+ \phi^+(x_1)\phi^-(x_2)$

analogo per  $t_2 > t_1$

$+ \phi^-(x_2)\phi^+(x_1) + [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)]$

Quindi

$\mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)] = : \phi(x)\phi(y) : + \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)] | 0 \rangle$   
 $= \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] | 0 \rangle$

$\lim_{x \rightarrow y}$

$\lim_{x \rightarrow y}$

$= 1 \cdot \hat{O}_1(x) + C_0(x - y) \cdot \mathbb{I}$



generalizzazione  
ricorsiva

analogamente per campi fermionici non interagenti

$$\mathcal{T} [\psi(x)\bar{\psi}(y)] = : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \langle 0 | \mathcal{T} [\psi(x)\bar{\psi}(y)] | 0 \rangle$$

formula generale del teorema di Wick:  $\phi_i \overset{\sqcap}{\phi}_j \equiv \langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x_i)\phi(x_j)] | 0 \rangle$

$$\mathcal{T} [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n] = : \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n :$$

$$+ \sum_{i \neq j=1}^n P_{ij} : \phi_1 \dots \phi_{i-1} \phi_{i+1} \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_n : \phi_i \overset{\sqcap}{\phi}_j$$

$$+ \sum_{i \neq j \neq k \neq l=1}^n : \phi_1 \dots \phi_{i-1} \phi_{i+1} \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_{k-1} \phi_{k+1} \dots \phi_{l-1} \phi_{l+1} \dots \phi_n :$$

$$\left( P_{ijkl} \phi_i \overset{\sqcap}{\phi}_j \overset{\sqcap}{\phi}_k \phi_l + P_{ikjl} \phi_i \overset{\sqcap}{\phi}_k \overset{\sqcap}{\phi}_j \phi_l + P_{iljk} \phi_i \overset{\sqcap}{\phi}_l \overset{\sqcap}{\phi}_j \phi_k \right)$$

+....

$$P_{ij} = (-1)^m$$

m = n° di permutazioni per riportare gli indici nell'ordine naturale 1, ... , i-1, i, ... , j-1, j, ... , n

## Applicazione a $e^+e^-$ e DIS inclusivi

$W^{\mu\nu} \Rightarrow J^\mu(\xi) J^\nu(0)$  con  $J^\mu$  la corrente e.m. di quark

prodotto normale : : utile per definire un operatore composito per  $\xi \rightarrow 0$

$\Rightarrow$  studiare  $\mathcal{T}[J^\mu(\xi) J^\nu(0)]$  per  $\xi \rightarrow 0$  con il teorema di Wick

$$\mathcal{T}[J^\mu(\xi) J^\nu(0)] =$$

$$\begin{aligned} & : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) : + : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \gamma^\nu \psi(0) : \psi(\xi) \bar{\psi}(0) + \\ & : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \gamma^\mu \psi(\xi) : \psi(0) \bar{\psi}(\xi) - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \psi(0) \bar{\psi}(\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] S_F(-\xi) S_F(\xi) - : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \gamma^\nu \psi(0) : i S_F(\xi) \\ & - : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \gamma^\mu \psi(\xi) : i S_F(-\xi) + : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) : \end{aligned}$$

$$\psi(\xi) \bar{\psi}(0) = \langle 0 | \mathcal{T} [\psi(\xi) \bar{\psi}(0)] | 0 \rangle = -i S_F(\xi) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot \xi}}{p - m + i\epsilon}$$

divergente per  $\xi \rightarrow 0 \Rightarrow$  OPE



# Singularita` del propagatore fermionico libero

$$S_F(\xi) = (i \not{\partial} + m) \Delta(\xi)$$

$$\Delta(\xi) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot \xi}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = i \frac{m}{4\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K_1 \left( m \sqrt{-\xi^2 + i\epsilon} \right)}{\sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} + \frac{1}{4\pi} \delta(\xi^2)$$

$$\stackrel{\xi \rightarrow 0}{\sim} \frac{im}{4\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m \sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} + \text{termini meno singolari}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\xi^2 - i\epsilon} + \text{termini meno singolari}$$

↑  
singularita` light-cone

↓  
grado di singularita` proporzionale a potenza di q in trasformata di Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{iq \cdot x}}{(x - i\epsilon)^\alpha} = \frac{2\pi e^{i\alpha\pi/2}}{\Gamma(\alpha)} \theta(q) q^{\alpha-1}$$

singularita` piu` alta in  
coefficienti di OPE

↓  
contributo dominante di  $J^\mu$  in  $W^{\mu\nu}$

(continua)

$$\begin{aligned} S_F(\xi) &= (i\gamma \cdot \partial + m) \Delta(\xi) \sim (i\gamma \cdot \partial + m) \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{\xi^2 - i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{-2\gamma \cdot \xi}{(\xi^2 - i\epsilon)^2} \frac{i}{4\pi^2 i} + \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{m}{\xi^2 - i\epsilon} + \text{termini meno singolari} \end{aligned}$$



termine piu' singolare in  $\mathcal{T}[J^\mu(\xi) J^\nu(0)]$

$$\begin{aligned} \text{Tr} [S_F(-\xi) \gamma^\mu S_F(\xi) \gamma^\nu] &\sim -\frac{4}{16\pi^4 (\xi^2 - i\epsilon)^4} \text{Tr} [\not{\xi} \gamma^\mu \not{\xi} \gamma^\nu] + \dots \\ &= \frac{\xi^2 g^{\mu\nu} - 2\xi^\mu \xi^\nu}{\pi^4 (\xi^2 - i\epsilon)^4} + \dots \end{aligned}$$



termine meno singolare in  $\mathcal{T}[J^\mu(\xi) J^\nu(0)]$

$$: \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) : = \hat{O}(\xi, 0) \quad \text{operatore bilocale regolare}$$



(continua)

termini intermedi

$$\begin{aligned} & - : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu i S_F(\xi) \gamma^\nu \psi(0) : - : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu i S_F(-\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) : \\ & \sim \frac{i \xi_\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \psi(0) - \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu \psi(\xi) : + \dots \\ & = \frac{i \xi^\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} \left( \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) + i \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) \right) \end{aligned}$$



$$\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu = \left( \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} + i \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \gamma_5 \right) \gamma^\rho$$

$$\gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu = \left( \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} - i \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \gamma_5 \right) \gamma^\rho$$

$$\sigma_{\mu\lambda\nu\rho} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}$$

$$\Rightarrow \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) = : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\rho \psi(0) - \bar{\psi}(0) \gamma^\rho \psi(\xi) :$$

$$\hat{O}_A^\rho(\xi, 0) = : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\rho \gamma_5 \psi(0) + \bar{\psi}(0) \gamma^\rho \gamma_5 \psi(\xi) :$$

operatori bilocali regolari

(continua)

riassumendo :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} [J_\mu(\xi) J_\nu(0)] = & \frac{\xi^2 g_{\mu\nu} - 2\xi_\mu \xi_\nu}{\pi^4 (\xi^2 - i\epsilon)^4} + \frac{i\xi^\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) \\ & - \frac{\xi^\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) + \hat{O}_{\mu\nu}(\xi, 0) \end{aligned}$$

- $\hat{O}_{V/A}^\mu(\xi, 0)$  e  $\hat{O}^{\mu\nu}(\xi, 0)$  sono operatori bilocali regolari per  $\xi \rightarrow 0$  ;  
contengono informazioni sul comportamento a lunghe distanze
- i coefficienti sono singolari per  $\xi \rightarrow 0$  (ordinati per singolarita` decrescente);  
contengono informazioni sul comportamento a corte distanze
- fattorizzazione tra corte e lunghe distanze rigorosa ad ogni ordine
- formula contiene il comportamento di quark liberi a corte distanze  
→ portata generale per ritrovare i risultati di QPM
- sia in DIS che  $e^+e^-$  inclusivi appare  $[J^\mu(\xi), J^\nu(0)] \Rightarrow$  trasformazione della  
formula di cui sopra

(continua)

$$\mathcal{T}[J^\mu(\xi)J^\nu(0)] - \mathcal{T}[J^\mu(\xi)J^\nu(0)]^\dagger = \epsilon(\xi^0) [J^\mu(\xi), J^\nu(0)]$$

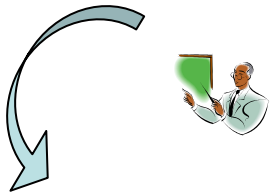
$$\epsilon(x^0) = \frac{x^0}{|x^0|} \quad J^\mu \text{ hermitiana}$$

inoltre  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - i\epsilon} = PV \frac{1}{x^2} + i\pi\delta(x^2)$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^n} = PV \frac{1}{(x^2)^n} + i\pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \partial^{n-1}(x^2)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^n} - \frac{1}{(x^2 + i\epsilon)^n} = 2\pi i \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \partial^{n-1}(x^2)$$

$$\text{con } \partial^n(x^2) = \frac{d^n}{d(x^2)^n} \delta(x^2)$$



$$\begin{aligned} \epsilon(\xi^0) [J_\mu(\xi), J_\nu(0)] &= \frac{i(2\xi_\mu\xi_\nu - \xi^2 g_{\mu\nu})}{3\pi^3} \partial^3(\xi^2) + \frac{\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) \\ &+ \frac{i\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) + \hat{O}_{\mu\nu}(\xi, 0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0, \xi) \end{aligned}$$

## Applicazione: e<sup>+</sup>e<sup>-</sup> inclusivo

$$\sigma_{tot} = \frac{1}{2} \frac{e^4}{2s^3} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$



$$\begin{aligned} I_n(q) &= \int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon(x^0) \partial^n(x^2) \\ &= \frac{i\pi^2}{4^{n-2}(n-1)!} (q^2)^{n-1} \epsilon(q^0) \theta(q^2) \end{aligned}$$

$$\int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | 0 \rangle$$

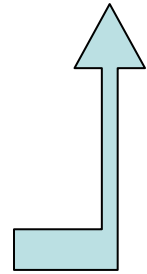
$$\sim \int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon(x^0) \langle 0 | \frac{i}{3\pi^3} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \partial^3(x^2) | 0 \rangle$$

$$= \frac{i}{3\pi^3} \left( g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial q} - 2 \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right) \underbrace{\int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon(x^0) \partial^3(x^2)}_{I_3(q)}$$

$$= \frac{1}{6\pi} \epsilon(q^0) \theta(q^2) (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})$$



$$= \frac{e^4}{4\pi} \frac{1}{3s^3} L^{\mu\nu} (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \epsilon(q^0) \theta(q^2) \rightarrow \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

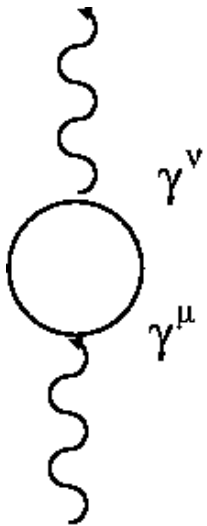


(continua)

partendo da corrente di quark  $\sum_f e_f^2 \sum_c : \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu \psi_f(x) :$   
 $\longrightarrow \sigma_{tot} = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum_f e_f^2$  risultato di QPM !

Morale : OPE per quark liberi a corte distanze e` equivalente a QPM

perche` QPM assume che a corte distanze i quark si comportino come fermioni liberi  $\rightarrow$  asymptotic freedom postulata in QPM si ritrova rigorosamente in OPE



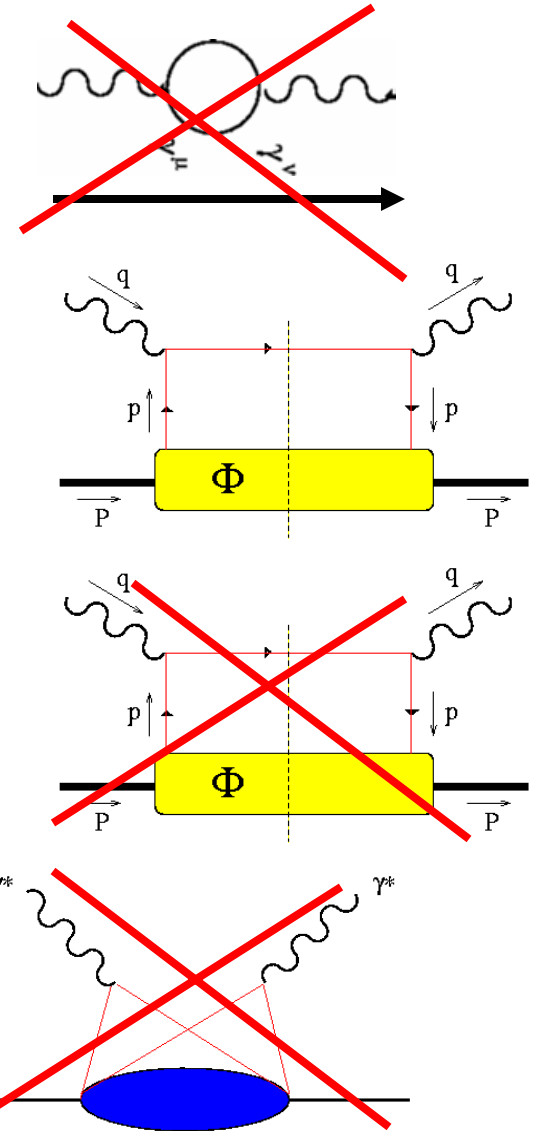
diagrammaticamente :

$$W_{\mu\nu} = \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \frac{i}{3\pi^3} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \partial^3(x^2) | 0 \rangle$$
$$= \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \text{Tr} [S_F(x) \gamma^\mu S_F(-x) \gamma^\nu] | 0 \rangle$$

## Applicazione: DIS inclusivo

$$\begin{aligned}
 2MW_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | P \rangle \\
 &= \frac{i}{6\pi^4} \int d^4x e^{iq \cdot x} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \partial^3(x^2) \langle P | P \rangle \\
 &+ \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \epsilon(x^0) \partial^1(x^2) \langle P | \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(x, 0) | P \rangle \\
 &+ \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \epsilon(x^0) \partial^1(x^2) \langle P | i\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(x, 0) | P \rangle \\
 &+ \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon(x^0) \langle P | \hat{O}_{\mu\nu}(x, 0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0, x) | P \rangle
 \end{aligned}$$

no polarizzazione  $\rightarrow W_S^{\mu\nu}$



(continua)

$[J^\mu(x), J^\nu(0)]$  dominante per  $x^2 \rightarrow 0 \Rightarrow$  espandere  $\hat{O}_V(x,0)$  intorno a  $x=0$   
operatore bilocale regolare  $\rightarrow$  serie infinita di operatori locali regolari

$$\psi(x) = \psi(0) + x^\mu \partial_\mu \psi(x)|_{x=0} + \frac{1}{2!} x^{\mu_1} x^{\mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \psi(x)|_{x=0} + \dots$$

$$\hat{O}_V^\rho(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} : (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \bar{\psi}(x)) \Big|_{x=0} \gamma^\rho \psi(0) - \bar{\psi}(0) \gamma^\rho (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \psi(x)) \Big|_{x=0} :$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\hat{O}_{V \mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0)}$$

poi

$$\sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \dots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} \langle P | \hat{O}_{V \mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0) | P \rangle$$

$$\xrightarrow{\text{DIS}} \frac{F_1(x_B)}{M} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{F_2(x_B)}{\nu} \tilde{P}^\mu \tilde{P}^\nu \quad \text{risultato di QPM}$$

# OPE procedura generale per campi (non) interagenti

$$J_\mu(x) J_\nu(0) = \sum_{\{\alpha\}} C_{\mu\nu\{\alpha\}}(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_{n_\alpha}} \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_{n_\alpha}}(0)$$

light-cone expansion valida per  $x^2 \sim 0$

$$W_{\mu\nu} \propto \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | P \rangle$$

$W_{\mu\nu}$  dimensionless  
 analisi dimensionale
  $\left. \vphantom{\int} \right\}$ 
 struttura delle singolarita` dei  $C_{\mu\nu\{\alpha\}}(x^2 \rightarrow 0)$

$$[d^4x] = 4$$

$$[x^{\mu_1} \dots x^{\mu_{n_\alpha}}] = n_\alpha \text{ "spin" dell'operatore } \hat{O}$$

$$[\langle P | P' \rangle = 2E (2\pi)^3 \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}')] = 2$$

$$\left[ \langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_{n_\alpha}}(0) | P \rangle = P_{\mu_1} \dots P_{\mu_{n_\alpha}} M^{d-n_\alpha-2} c_{\hat{O}} + o\left(\frac{M^2}{Q^2}\right) \right] = -d+2$$

$$\Rightarrow C_{\{\alpha\}}(x^2) \sim \frac{1}{x^{6+n_\alpha-d}}$$

dimensione canonica  
dell'operatore  $\hat{O}$



(continua)

Teoria di campo interagente:

correzioni radiative  $\rightarrow$  struttura delle singolarita` da eq. del gruppo di rinormalizzazione per C

$$C_{\{\alpha\}}(x^2) \stackrel{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{6+n_\alpha-d}} (\log^{\gamma_{\hat{O}}}(\mu_F x) + \dots)$$

$\gamma_{\hat{O}}$  dimensione anomala di  $\hat{O}$

N.B. dipendenza da  $\mu_F$  si cancella con dipendenza simile in  $\hat{O}(0, \mu_F)$

risultato generale :

$$C_n(Q^2, g, \mu_F) = \frac{1}{(Q^2)^{t-2}} C_n(\mu_F^2, \bar{g}) \left( \frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\mu_F^2)} \right)^{\frac{\gamma_0}{2\beta_0}}$$

$$\frac{dg}{d \log Q^2} = \beta(g) \quad g(0) = \bar{g}$$

N.B. dipendenza da  $\mu_F$  si  
cancella con dipendenza  
simile in  $\hat{O}(0, \mu_F)$

$$\beta(g) = -g \left( \beta_0 \frac{\alpha_s}{4\pi} + \dots \right)$$

$$\gamma(g) = \gamma_0 \frac{\alpha_s}{4\pi} + \dots$$

Teoria di campo interagente:  
correzioni  $\log Q^2 \rightarrow$  struttura delle singolarita' da  
eq. del gruppo di rinormalizzazione per  $C_n^{(i)}$

(continua)



$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu} &\propto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int d^4x e^{iq \cdot x} \\
 &\times \sum_{\{\alpha\}} \left( \frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^{3 + \frac{n_\alpha - d}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + i\epsilon)^{3 + \frac{n_\alpha - d}{2}}} \right) \\
 &\times x^{\mu_1} \dots x^{\mu_{n_\alpha}} P_{\mu_1} \dots P_{\mu_{n_\alpha}} M^{d - n_\alpha - 2} c_{\hat{O}} \\
 &\sim c_{\hat{O}} \sum_{\{\alpha\}} c'_{\{\alpha\}} \left( \frac{M}{\sqrt{q^2}} \right)^{d - n_\alpha - 2} \left( \frac{1}{x_B} \right)^{n_\alpha}
 \end{aligned}$$

per  $x \rightarrow 0$  (i.e.,  $q^2 \rightarrow \infty$ ) importanza di  $\hat{O}$  determinata da **twist**  $t = d - n_\alpha$   
 $t \geq 2$  ( $t=2 \rightarrow$  scaling in regime DIS)