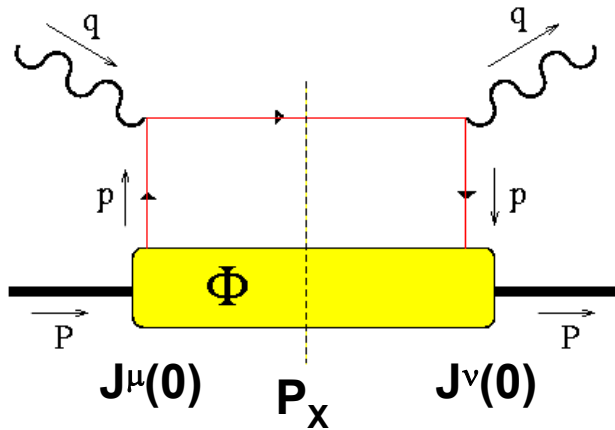


# Schema

- riassunto precedente lezione
- tensore adronico : teorema ottico e “light-cone dominance”
- divergenza di operatori composti sul light-cone : Operator Product Expansion (OPE)
- esempi: teorema di Wick,  $e^+e^-$  e DIS inclusivi
- evoluzione di QCD : legame tra momenti di funzioni di struttura, dimensioni anomale ed elementi di matrice adronici
- evoluzione e rinormalizzazione : “operator mixing” e connessione con il vertice di Altarelli-Parisi

- generalizzazione dei risultati di QPM  $\rightarrow$  teoremi di fattorizzazione in  $e^+e^-$  e DIS (semi-)inclusivo e DY
- identificazione di una scala di fattorizzazione  $\mu_F$  (schema di fattorizzazione) che separa i contributi perturbativi con off-shellness  $Q^2 > \mu_F$  dipendenti dal processo, da quelli universali con  $Q^2 < \mu_F$  (incluse le divergenze infrarosse regolarizzabili con varie prescrizioni), dipendenti dal tipo di adrone e riassorbibili nella definizione di distribuzione partonica alla scala  $\mu_F$
- contenuto della parte hard ( $Q^2 > \mu_F$ ) e della parte soft ( $Q^2 < \mu_F$ ) cambia al variare di  $\mu_F$  secondo le equazioni DGLAP  $\rightarrow$  evoluzione delle distribuzioni partoniche  $\rightarrow$  rottura dello scaling di QPM nelle funzioni di struttura ; universalita` + evoluzione  $\rightarrow$  potere predittivo enorme di QCD
- esempio (a grandi linee) di calcolo di correzioni al 1<sup>o</sup> ordine perturbativo di DIS inclusivo : classificazione delle divergenze IR, cancellazione tra divergenze soft reali e virtuali, fattorizzazione collineare, schemi di fattorizzazione DIS e  $\overline{MS}$
- momenti di Mellin delle funzioni di struttura evolvono con dimensione anomala legata al vertice di Altarelli-Parisi  $\rightarrow$  distribuzioni partoniche si “schiacciano” a  $x_B$  piu` piccoli per  $Q^2 \rightarrow \infty$

## Esempio: tensore adronico per DIS inclusivo



$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \underbrace{(2\pi)^4 \delta(P + q - P_X)}_{\langle P | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | P \rangle}$$

$$\int d^4\xi e^{i\xi \cdot (P + q - P_X)}$$

$$J^\mu(\xi) = e^{i\hat{P} \cdot \xi} J^\mu(0) e^{-i\hat{P} \cdot \xi}$$

$$\langle P | J^\mu(\xi) | P_X \rangle = e^{i(P - P_X) \cdot \xi} \langle P | J^\mu(0) | P_X \rangle$$

$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle P | J^\mu(\xi) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | P \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle P | J^\mu(\xi) J^\nu(0) | P \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle P | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | P \rangle \quad \leftarrow$$

abbiamo aggiunto un termine ininfluyente:

$$\int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P|J^\nu(0) J^\mu(\xi)|P\rangle$$

$$= \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \delta^4(q - P + P_X) \langle P|J^\nu(0)|P_X\rangle \langle P_X|J^\mu(0)|P\rangle = 0$$

perche'  $q - P + P_X \neq 0$ . Se per assurdo si assume invece il contrario

$$q - P + P_X = 0 \quad \longrightarrow \quad P_X^2 = M_X^2 = M^2 + q^2 - 2P \cdot q$$

$$\longrightarrow \quad q^0 \stackrel{TRF}{=} \frac{M^2 + q^2 - M_X^2}{2M} \leq 0$$

perche'  $M_X^2 \geq M^2$  e  $0 \geq q^2$

## “Light-cone dominance”

$$2MW^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | \underbrace{[J^\mu(\xi), J^\nu(0)]}_{\text{Teorema}} | P \rangle$$

Teorema: contributo dominante nel limite di Bjorken viene dalla regione  
 $\text{const.} / Q^2 \geq \xi^2 \geq 0$

La zona  $\xi^2 < 0$  è esclusa dal principio di causalità dei commutatori.  
 La zona di integrazione con  $|q \cdot \xi| \rightarrow \infty$  per  $Q^2 \rightarrow \infty$  ( $x_B$  fisso), non contribuisce  
 perché l'esponenziale oscilla senza limiti (teorema di Riemann-Lebesgue).

Inoltre

$$q \cdot \xi = \nu \xi^0 - \sqrt{\nu^2 - q^2} r \quad \text{con } r = \frac{\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{q}|}$$

$$\sim \nu \xi^0 - \nu r - M x_B r + o\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad \sqrt{1 - \frac{q^2}{\nu^2}} \sim 1 + \frac{M x_B}{\nu} + o\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

$$< \text{const.} \quad \Rightarrow \quad |\xi^0 - r| \leq \frac{\text{const.}}{\nu} ; |r| \leq \frac{\text{const.}}{x_B}$$

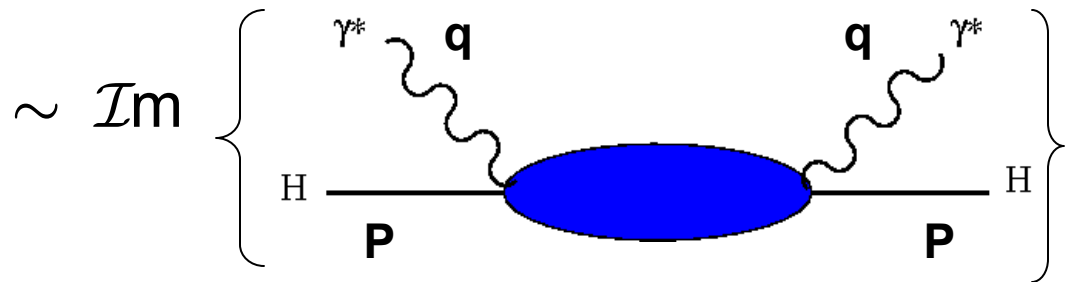
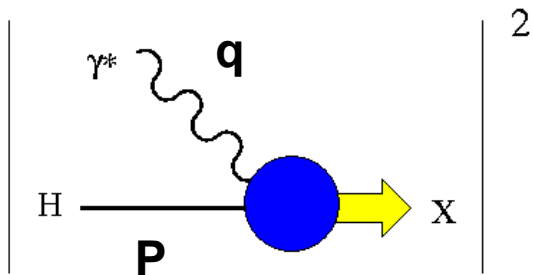
$$(\xi^0)^2 \leq \left(r + \frac{\text{const.}}{\nu}\right)^2 \sim r^2 + \frac{\text{const.}}{\nu} < \xi^2 + \frac{\text{const.}}{x_B \nu} = \xi^2 + \frac{\text{const.}}{(-q^2)}$$

# Teorema ottico per DIS inclusivo

sezione d'urto totale  
per assorbimento di  $\gamma^*$

=

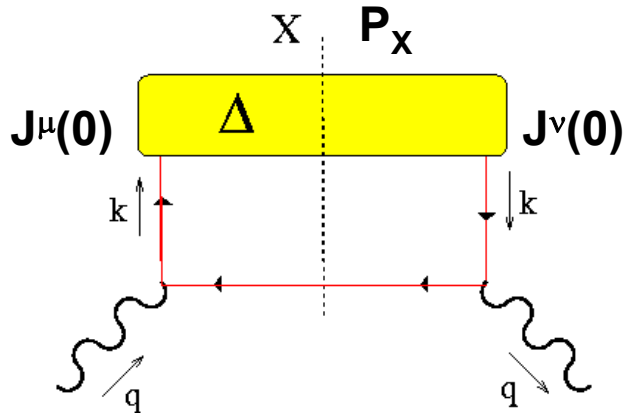
ampiezza di scattering  
Compton in avanti virtuale



$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{\pi} \text{Im} \int d^4\xi e^{iq\cdot\xi} \langle P | \mathcal{T} [J^\mu(\xi) J^\nu(0)] | P \rangle$$

dominante sul light-cone  $\xi^2 \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0$

## Esempio : tensore adronico per $e^+e^-$ inclusivo



$$W^{\mu\nu} = \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} (2\pi)^4 \delta(q - P_X) \langle 0 | J^\mu(0) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | 0 \rangle$$

$$\int d^4\xi e^{i\xi \cdot (q - P_X)} J^\mu(\xi) = e^{i\hat{P} \cdot \xi} J^\mu(0) e^{-i\hat{P} \cdot \xi}$$

$$\langle 0 | J^\mu(\xi) | P_X \rangle = e^{-iP_X \cdot \xi} \langle 0 | J^\mu(0) | P_X \rangle$$

$$W^{\mu\nu} = \int \frac{d\mathbf{P}_X}{(2\pi)^3 2P_X^0} \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle 0 | J^\mu(\xi) | P_X \rangle \langle P_X | J^\nu(0) | 0 \rangle$$

$$= \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle 0 | J^\mu(\xi) J^\nu(0) | 0 \rangle = \int d^4\xi e^{iq \cdot \xi} \langle 0 | [J^\mu(\xi), J^\nu(0)] | 0 \rangle$$

$q^\mu \stackrel{c.m.}{=} (q^0, \mathbf{0})$  regime DIS:  $Q^2 \rightarrow \infty \Rightarrow q^0 \rightarrow \infty$

causalità  $\Rightarrow$  [...] definito su  $\xi^2 \geq 0$

contributo principale all'integrale da  $q \cdot \xi$  finito  $\Rightarrow \xi^0 \sim 0 \Rightarrow \xi \sim 0$

tensore adronico dominato dalle corte distanze

ma prodotto di operatori nello stesso punto spazio-temporale ( $\equiv$  operatore composito) non è sempre ben definito in teoria di campo !

Esempio: campo scalare neutro libero  $\phi(x)$

operatore composito = propagatore libero  $\Delta(x-y)$

$$\langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle = -i \Delta(x-y) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{m}{4\pi^2} \frac{K_1 \left( m \sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon} \right)}{\sqrt{-(x-y)^2 + i\epsilon}} - \frac{i}{4\pi} \delta((x-y)^2) \xrightarrow{x \rightarrow y} \infty$$

$K_1$  funz. Bessel modificata del 2° tipo

Esempio: campo scalare neutro interagente  $\phi(x)$

valore di aspettazione sul vuoto di  $\phi(x)^2$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x)^2 | 0 \rangle &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_n \langle 0 | \phi(0) | p, n \rangle \langle p, n | \phi(0) | 0 \rangle & \hat{P} | p, n \rangle &= p | p, n \rangle \\ & & \phi(x) &= e^{i\hat{P} \cdot x} \phi(0) e^{-i\hat{P} \cdot x} \\ &\geq \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} |\langle 0 | \phi(0) | p, 1 \rangle|^2 \equiv N \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

dipende solo da  $p^2=m^2 \rightarrow$  e' una costante  $N$



# Operator Product Expansion

definizione (anche operativa) di operatore composito:

$$\hat{A}(x) \hat{B}(y) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} C_i(x-y) \hat{O}_i\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

(Wilson, '69 prima congettura;  
Zimmermann, '73 dimostrazione  
in teoria perturbazioni;  
Collins, '84 dimostrazione  
diagrammatica )

- gli operatori locali  $\hat{O}_i$  sono regolari in  $x$  per ogni  $i=0,1,2,\dots$
- la divergenza per  $x \rightarrow y$  e' assorbita nei coefficienti  $C_i$
- i termini sono ordinati per singularita' decrescenti in  $C_i$ ,  $i=0,1,2,\dots$
- di solito  $\hat{O}_0 = \mathbf{I}$ , ma espressione esplicita dell'espansione va trovata separatamente per ogni tipo di processo
- OPE e' anche una definizione operativa perche' puo' essere usata per definire un operatore composito regolare. Esempio : teoria  $\phi^4$  ;  
l'operatore composito  $\phi(x)^2$  puo' essere costruito come

$$\phi(x)^2 \equiv \lim_{x \rightarrow y} \frac{\phi(x) \phi(y) - C_0(x-y)}{C_1(x-y)} = \hat{O}_1(x)$$

## OPE in teoria di campo non interagente: il teorema di Wick

campo scalare  $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} [a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}]$

ordine "normale" : : = spostare  $a^\dagger$  a sinistra,  $a$  a destra  $\rightarrow$  annichilano su  $|0\rangle$   
 ordine "temporale"  $\mathcal{T}$  = ordinare campi a tempi crescenti verso sinistra

**Step 1**  $\mathcal{T}\phi(x) = : \phi(x) :$

**Step 2**  $[\mathcal{T}\phi(x_1)]\phi(x_2) = \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] = : \phi(x_1) : \phi(x_2)$

$t_2 < t_1$   $= \phi(x_1)\phi^+(x_2) + \phi(x_1)\phi^-(x_2) = \phi(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^-(x_2)$   
 $+ \phi^+(x_1)\phi^-(x_2)$

analogo per  $t_2 > t_1$

$+ \phi^-(x_2)\phi^+(x_1) + [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)]$

Quindi

$\mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)] = : \phi(x)\phi(y) : + \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)] | 0 \rangle$   
 $= \langle 0 | \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] | 0 \rangle$

$\lim_{x \rightarrow y} \lim_{x \rightarrow y} = 1 \cdot \hat{O}_1(x) + C_0(x - y) \cdot \mathbb{I}$

analogamente per campi fermionici non interagenti

$$\mathcal{T} [\psi(x)\bar{\psi}(y)] = : \psi(x)\bar{\psi}(y) : + \langle 0 | \mathcal{T} [\psi(x)\bar{\psi}(y)] | 0 \rangle$$

formula generale del teorema di Wick:  $\phi_i \overset{\square}{\phi}_j \equiv \langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x_i)\phi(x_j)] | 0 \rangle$

$$\mathcal{T} [\phi_1\phi_2\dots\phi_n] = : \phi_1\phi_2\dots\phi_n :$$

$$+ \sum_{i \neq j=1}^n P_{ij} : \phi_1 \dots \phi_{i-1} \phi_{i+1} \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_n : \overset{\square}{\phi}_i \overset{\square}{\phi}_j$$

$$+ \sum_{i \neq j \neq k \neq l=1}^n : \phi_1 \dots \phi_{i-1} \phi_{i+1} \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_{k-1} \phi_{k+1} \dots \phi_{l-1} \phi_{l+1} \dots \phi_n :$$

$$\left( P_{ijkl} \overset{\square}{\phi}_i \overset{\square}{\phi}_j \overset{\square}{\phi}_k \overset{\square}{\phi}_l + P_{ikjl} \overset{\square}{\phi}_i \overset{\square}{\phi}_k \overset{\square}{\phi}_j \overset{\square}{\phi}_l + P_{iljk} \overset{\square}{\phi}_i \overset{\square}{\phi}_l \overset{\square}{\phi}_j \overset{\square}{\phi}_k \right)$$

+....

$$P_{ij} = (-1)^m$$

m = n<sup>0</sup> di permutazioni per riportare gli indici nell'ordine naturale 1, ..., i-1, i, ..., j-1, j, ..., n

$W^{\mu\nu}$  per DIS inclusivo  
 $W^{\mu\nu}$  per  $e^+e^-$  inclusivo
 }  $\Rightarrow J^\mu(\xi) J^\nu(0)$  con  $J^\mu$  la corrente e.m. di quark

prodotto normale : : utile per definire un operatore composito per  $\xi \rightarrow 0$

$\Rightarrow$  studiare  $\mathcal{T}[J^\mu(\xi) J^\nu(0)]$  per  $\xi \rightarrow 0$  con il teorema di Wick

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}[J^\mu(\xi) J^\nu(0)] &= : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) : + \\
 & : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \gamma^\nu \psi(0) : \psi(\xi) \bar{\psi}(0) + : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \gamma^\mu \psi(\xi) : \psi(0) \bar{\psi}(\xi) \\
 & - \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \psi(0) \bar{\psi}(\xi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] S_F(-\xi) S_F(\xi) - : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \gamma^\nu \psi(0) : i S_F(\xi) \\
 &- : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \gamma^\mu \psi(\xi) : i S_F(-\xi) + : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \psi(0) :
 \end{aligned}$$

$$\psi(\xi) \bar{\psi}(0) = \langle 0 | \mathcal{T}[\psi(\xi) \bar{\psi}(0)] | 0 \rangle = -i S_F(\xi) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot \xi}}{\not{p} - m + i\epsilon}$$

divergente per  $\xi \rightarrow 0 \Rightarrow$  OPE

## Singularita` del propagatore fermionico libero

$$S_F(\xi) = (i \not{\partial} + m) \Delta(\xi)$$

$$\Delta(\xi) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot \xi}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = i \frac{m}{4\pi^2} \frac{K_1 \left( m \sqrt{-\xi^2 + i\epsilon} \right)}{\sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} + \frac{1}{4\pi} \delta(\xi^2)$$

$$\underset{\xi \rightarrow 0}{\sim} \frac{im}{4\pi^2} \frac{1}{m \sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{-\xi^2 + i\epsilon}} + \text{termini meno singolari}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{\xi^2 - i\epsilon} + \text{termini meno singolari}$$

singularita` light-cone

grado di singularita` proporzionale a potenza di q in trasformata di Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{iq \cdot x}}{(x - i\epsilon)^\alpha} = \frac{2\pi e^{i\alpha\pi/2}}{\Gamma(\alpha)} \theta(q) q^{\alpha-1}$$

singularita` piu` alta in  
coefficienti di OPE

contributo dominante di  $J^\mu$  in  $W^{\mu\nu}$

continua

$$\begin{aligned} S_F(\xi) &= (i\gamma \cdot \partial + m) \Delta(\xi) \sim (i\gamma \cdot \partial + m) \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{1}{\xi^2 - i\epsilon} + \dots \\ &= \frac{-2\gamma \cdot \xi}{(\xi^2 - i\epsilon)^2} \frac{i}{4\pi^2 i} + \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{m}{\xi^2 - i\epsilon} + \text{termini meno singolari} \end{aligned}$$

termine piu` singolare

$$\begin{aligned} \text{Tr} [S_F(-\xi)\gamma^\mu S_F(\xi)\gamma^\nu] &\sim -\frac{4}{16\pi^4(\xi^2 - i\epsilon)^4} \text{Tr} [\not{\xi}\gamma^\mu \not{\xi}\gamma^\nu] + \dots \\ &= \frac{\xi^2 g^{\mu\nu} - 2\xi^\mu \xi^\nu}{\pi^4(\xi^2 - i\epsilon)^4} + \dots \end{aligned}$$

termine meno singolare

$$: \bar{\psi}(\xi)\gamma^\mu\psi(\xi) \bar{\psi}(0)\gamma^\nu\psi(0) : = \hat{O}(\xi, 0) \quad \text{operatore bilocale regolare}$$

termini intermedi

$$\begin{aligned}
 & - : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu iS_F(\xi) \gamma^\nu \psi(0) : - : \bar{\psi}(0) \gamma^\nu iS_F(-\xi) \gamma^\mu \psi(\xi) : \\
 & \sim \frac{i\xi_\lambda}{2\pi^2(\xi^2 - i\epsilon)^2} : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \psi(0) - \bar{\psi}(0) \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\mu \psi(\xi) : + \dots \\
 & = \frac{i\xi^\lambda}{2\pi^2(\xi^2 - i\epsilon)^2} \left( \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) + i\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) \right)
 \end{aligned}$$

$$\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu = \left( \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} + i\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \gamma_5 \right) \gamma^\rho$$

$$\gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu = \left( \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} - i\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \gamma_5 \right) \gamma^\rho$$

$$\sigma_{\mu\lambda\nu\rho} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}$$

$$\Rightarrow \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) = : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\rho \psi(0) - \bar{\psi}(0) \gamma^\rho \psi(\xi) :$$

$$\hat{O}_A^\rho(\xi, 0) = : \bar{\psi}(\xi) \gamma^\rho \gamma_5 \psi(0) + \bar{\psi}(0) \gamma^\rho \gamma_5 \psi(\xi) :$$

operatori bilocali regolari

riassumendo :

$$\mathcal{T} [J_\mu(\xi) J_\nu(0)] = \frac{\xi^2 g_{\mu\nu} - 2\xi_\mu \xi_\nu}{\pi^4 (\xi^2 - i\epsilon)^4} + \frac{i\xi^\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) - \frac{\xi^\lambda}{2\pi^2 (\xi^2 - i\epsilon)^2} \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) + \hat{O}_{\mu\nu}(\xi, 0)$$

- $\hat{O}_{V/A}^\mu(x,0)$  e  $\hat{O}^{\mu\nu}(x,0)$  sono operatori bilocali regolari per  $x \rightarrow 0$  ;  
contengono informazioni sul comportamento a lunghe distanze
- i coefficienti sono singolari per  $x \rightarrow 0$  (ordinati per singolarita` decrescente);  
contengono informazioni sul comportamento a corte distanze
- fattorizzazione tra corte e lunghe distanze rigorosa ad ogni ordine
- sia in DIS che  $e^+e^-$  inclusivi appare  $[J^\mu(\xi), J^\nu(0)] \Rightarrow$  trasformazione della formula di cui sopra



$$\mathcal{T} [J^\mu(\xi) J^\nu(0)] - \mathcal{T} [J^\mu(\xi) J^\nu(0)]^\dagger = \epsilon(\xi^0) [J^\mu(\xi), J^\nu(0)]$$

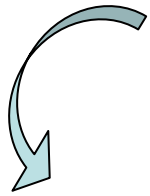
$$\epsilon(x^0) = \frac{x^0}{|x^0|} \quad J^\mu \text{ hermitiana}$$

inoltre  $\frac{1}{x^2 - i\epsilon} = P \frac{1}{x^2} + i\pi \delta(x^2)$

$$\frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^n} = P \frac{1}{(x^2)^n} + i\pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \partial^{n-1}(x^2)$$

$$\frac{1}{(x^2 - i\epsilon)^n} - \frac{1}{(x^2 + i\epsilon)^n} = 2\pi i \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \partial^{n-1}(x^2)$$

$$\text{con } \partial^n(x^2) = \frac{d^n}{d(x^2)^n} \delta(x^2)$$



$$\begin{aligned} \epsilon(\xi^0) [J_\mu(\xi), J_\nu(0)] &= \frac{i(2\xi_\mu \xi_\nu - \xi^2 g_{\mu\nu})}{3\pi^3} \partial^3(\xi^2) + \frac{\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(\xi, 0) \\ &+ \frac{i\xi^\lambda}{\pi} \partial(\xi^2) \epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(\xi, 0) + \hat{O}_{\mu\nu}(\xi, 0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0, \xi) \end{aligned}$$

## Applicazione a e<sup>+</sup>e<sup>-</sup> inclusivo

$$\sigma_{tot} = \frac{e^4}{2s^3} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} I_n(q) &= \int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon(x^0) \partial^n(x^2) \\ &= \frac{i\pi^2}{4^{n-1}(n-1)!} (q^2)^{n-1} \epsilon(q^0) \theta(q^2) \end{aligned}$$

$$\int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | [J^\mu(x), J^\nu(0)] | 0 \rangle$$

$$= \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \frac{i}{3\pi^3} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \partial^3(x^2) | 0 \rangle$$

$$= \frac{i}{3\pi^3} \left( g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial}{\partial q} - 2 \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right) \underbrace{\int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon(x^0) \partial^3(x^2)}_{I_3(q)}$$

$$= \frac{1}{6\pi} \epsilon(q^0) \theta(q^2) q^4 (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})$$

$$= \frac{e^4}{4\pi} \frac{q^4}{3s^3} L^{\mu\nu} (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) \epsilon(q^0) \theta(q^2) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

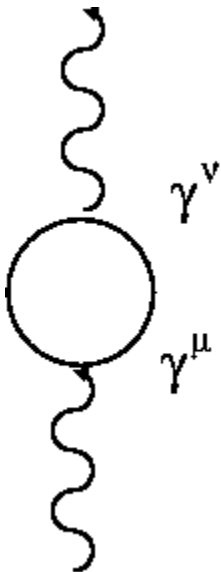
risultato di QPM !

partendo da corrente di quark  $\sum_f e_f^2 \sum_c : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) :$

$$\longrightarrow \sigma_{tot} = N_c \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum_f e_f^2$$

Morale : OPE per quark liberi a corte distanze e` equivalente a QPM


perche` QPM assume che a corte distanze i quark si comportino come fermioni liberi  $\rightarrow$  asymptotic freedom postulata in QPM si ritrova rigorosamente in OPE



diagrammaticamente :

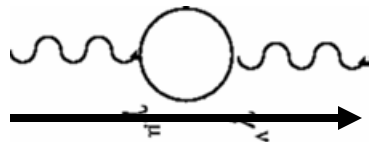
$$\int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \frac{i}{3\pi^3} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \partial^3(x^2) | 0 \rangle$$

$$= \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | \text{Tr} [S_F(x) \gamma^\mu S_F(-x) \gamma^\nu] | 0 \rangle$$

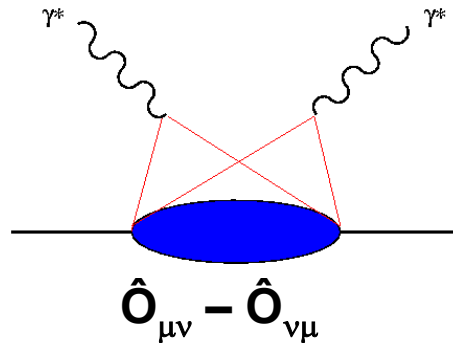
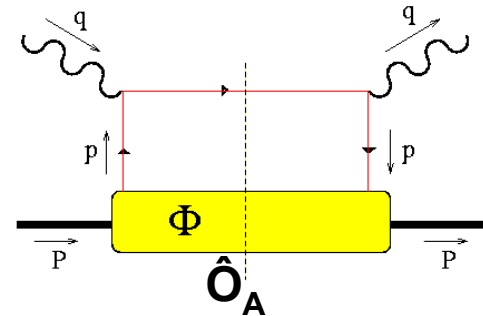
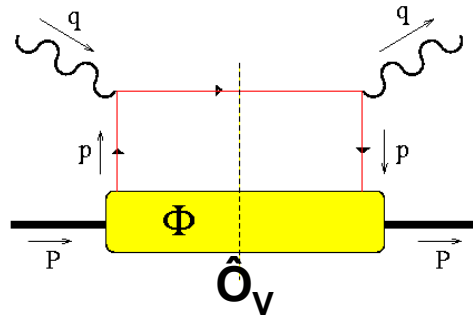
  
 $\mathcal{Im} T_{\mu\nu} \rightarrow \sigma_{tot}$

# Applicazione a DIS inclusivo

$$\begin{aligned}
 2MW_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | 0 \rangle \\
 &= \frac{i}{6\pi^3} \int d^4x e^{iq \cdot x} (2x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}) \partial^3(x^2) \langle P | P \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \epsilon(x^0) \partial^1(x^2) \langle P | \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_V^\rho(x, 0) + i\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho} \hat{O}_A^\rho(x, 0) | P \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x e^{iq \cdot x} \epsilon(x^0) \langle P | \hat{O}_{\mu\nu}(x, 0) - \hat{O}_{\nu\mu}(0, x) | P \rangle
 \end{aligned}$$



non interessano



$[J^\mu(x), J^\nu(0)]$  dominante per  $x^2 \rightarrow 0 \Rightarrow$  espandere  $\hat{O}_{V/A}(x,0)$  intorno a  $x=0$   
operatore bilocale regolare  $\rightarrow$  serie infinita di operatori locali regolari

$$\psi(x) = \psi(0) + x^\mu \partial_\mu \psi(x)|_{x=0} + \frac{1}{2!} x^{\mu_1} x^{\mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \psi(x)|_{x=0} + \dots$$

$$\hat{O}_V^\rho(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} : (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \bar{\psi}(x)) \Big|_{x=0} \gamma^\rho \psi(0) - \bar{\psi}(0) \gamma^\rho (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \psi(x)) \Big|_{x=0} :$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\hat{O}_{V \mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0)}$$

$$\hat{O}_A^\rho(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} : (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \bar{\psi}(x)) \Big|_{x=0} \gamma^\rho \gamma_5 \psi(0) + \bar{\psi}(0) \gamma^\rho \gamma_5 (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \psi(x)) \Big|_{x=0} :$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\hat{O}_{A \mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0)}$$

pesato con  $\varepsilon_{\mu\lambda\nu\rho}$

$\rightarrow$  contribuisce solo a  $W_A^{\mu\nu}$   
per reazioni polarizzate

$$\langle P | \hat{O}_{V \mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0) | P \rangle$$

$$= a_n(M^2) p^\rho p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} + p^\rho p^2 g_{\mu_1 \mu_2} p_{\mu_3} \dots p_{\mu_n} + \dots$$

$\uparrow$   
provoca termini  $\sim x^2$ , cioè meno singolari  
 $\rightarrow$  vengono trascurati

Quindi

$$2MW_{\mu\nu} \sim \frac{1}{2\pi^2} \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} p^\rho \int d^4x e^{iq \cdot x} x^\lambda \epsilon(x^0) \partial^1(x^2) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(M^2) \frac{(p \cdot x)^n}{n!}}_{f(p \cdot x)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta e^{i\zeta p \cdot x} \tilde{f}(\zeta) \leftarrow \begin{array}{l} f(p \cdot x) \\ \text{somma solo su } n \text{ dispari} \\ \text{per def. di } \hat{O}_{V \mu 1 \dots \mu n}^\rho \end{array}$$

$$2MW_{\mu\nu} \sim \frac{-i}{2\pi^2} \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} p^\rho \frac{\partial}{\partial q_\lambda} \int d\zeta \tilde{f}(\zeta) \underbrace{\int d^4x e^{i(q+\zeta p) \cdot x} \epsilon(x^0) \partial^1(x^2)}_{I_1(q + \zeta p)}$$

$$\downarrow$$

$$g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial}{\partial q^\mu} \theta(q^2) = 2q_\mu \delta(q^2)$$

continua

$$2MW_{\mu\nu} = \int d\zeta \left[ -(p \cdot q + \zeta M^2) g_{\mu\nu} + 2\zeta p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu \right] \\ \times \epsilon(q_0 + \zeta p_0) \delta(q^2 + 2\zeta p \cdot q + \zeta^2 M^2) \tilde{f}(\zeta)$$

$\rightarrow \infty$  con  $x_B = -q^2 / 2p \cdot q$  fissato trascurabile

$$= \frac{1}{2} \tilde{f}(x_B) \left( -g_{\mu\nu} - \frac{q^2}{(p \cdot q)^2} p_\mu p_\nu + \frac{p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu}{p \cdot q} \right) \\ = \frac{1}{2} \tilde{f}(x_B) \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{x_B \tilde{f}(x_B)}{p \cdot q} \left( p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \right) \left( p_\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\nu \right)$$

$F_1(x_B)$

$F_2(x_B)$

risultato del QPM

## OPE per prodotto di correnti (di quark)

$$J_\mu(x) J_\nu(0) = \sum_{i,n} C_{\mu\nu n}^{(i)}(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(i)}(0)$$

light-cone expansion  
valida per  $x^2 \sim 0$

mixing di operatori composti con stessi  
numeri quantici e dimensioni canoniche

qual e' la struttura delle singularita' dei  $C_{\mu\nu n}^{(i)}$  ?

Teoria di campo non interagente: grado di singularita' e' dato da

$$C_n^{(i)}(x^2) \sim (x^2)^{-d_j - n/2 + d_O(n)/2} \equiv (x^2)^{-d_j + t/2}$$

dimensione  
canonica di  $j(x)$

idem per  $\hat{O}$

$t = d_O(n) - n$   
twist

Teoria di campo interagente:  
correzioni  $\log Q^2 \rightarrow$  struttura delle singularita' da  
eq. del gruppo di rinormalizzazione per  $C_n^{(i)}$



risultato generale :

$$C_n(Q^2, g, \mu_F) = \frac{1}{(Q^2)^{t-2}} C_n(\mu_F^2, \bar{g}) \left( \frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(\mu_F^2)} \right)^{\frac{\gamma_0}{2\beta_0}}$$

$$\frac{dg}{d \log Q^2} = \beta(g) \quad g(0) = \bar{g}$$

N.B. dipendenza da  $\mu_F$  si  
cancella con dipendenza  
simile in  $\hat{O}(0, \mu_F)$

$$\beta(g) = -g \left( \beta_0 \frac{\alpha_s}{4\pi} + \dots \right)$$

$$\gamma(g) = \gamma_0 \frac{\alpha_s}{4\pi} + \dots$$

## Teoria di campo interagente: legame tra OPE e funzioni di struttura

ampiezza di Compton virtuale  $T_{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{T} [J_\mu(x) J_\nu(0)]$

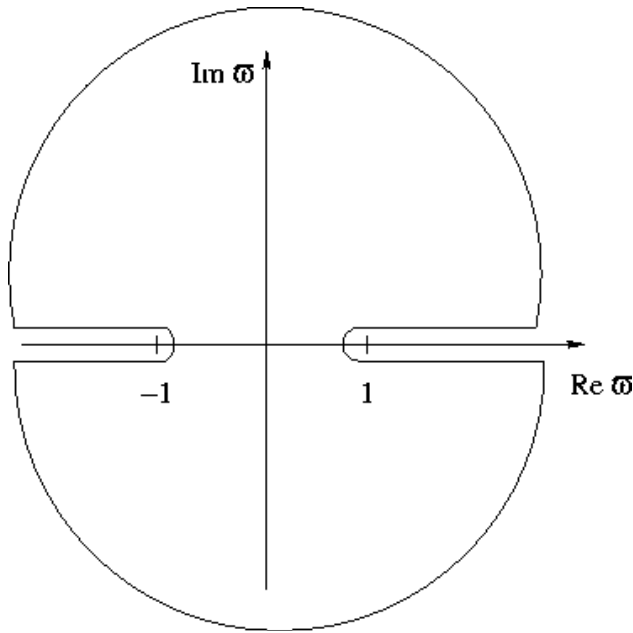
$$\begin{aligned} \langle P | \mathcal{T} [J_\mu(x) J_\nu(0)] | P \rangle &= \sum_{i,n} C_{\mu\nu n}^{(i)}(x^2, g, \mu_F^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} \langle P | \hat{O}_{\mu_1 \dots \mu_n}^{(i)}(0, \mu_F^2) | P \rangle \\ &= \sum_{i,n} C_{\mu\nu n}^{(i)}(x^2, g, \mu_F^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} a_n^{(i)}(\mu_F^2) [P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n} + \text{termini meno singolari}] \end{aligned}$$

↓ trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(Q^2, \nu) &\sim \sum_{i,n} C_{\mu\nu n}^{(i)}(Q^2, g, \mu_F^2) \frac{q^{\mu_1} \dots q^{\mu_n}}{(Q^2)^n} a_n^{(i)}(\mu_F^2) P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n} \\ &= \sum_{i,n} \frac{C_{\mu\nu n}^{(i)}(\log Q^2, \mu_F^2)}{(Q^2)^{t-2}} a_n^{(i)}(\mu_F^2) \left[ \left( \frac{1}{2x_B} \right)^n + o\left( \frac{1}{Q^2} \right) \right] \end{aligned}$$

serie converge per  $1/x_B < 1 \rightarrow$  regione non fisica!

piano complesso di  $\omega = 1 / x_B$



$$T_{\mu\nu}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{-1} d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' + i\epsilon)}{\omega' - \omega} + \int_{-1}^{\infty} d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' - i\epsilon)}{\omega - \omega'} + \int_{\infty}^1 d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' - i\epsilon)}{\omega - \omega'} + \int_1^{\infty} d\omega' \frac{T_{\mu\nu}(\omega' + i\epsilon)}{\omega - \omega'} \right\}$$

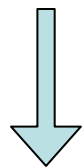
$$= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega' \left[ \frac{\text{Im} T_{\mu\nu}(\omega' + i\epsilon)}{\omega' + \omega} + \frac{\text{Im} T_{\mu\nu}(\omega' - i\epsilon)}{\omega' - \omega} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \text{Im} T_{\mu\nu}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}$$

$$T(\omega) = T(-\omega)$$

$$T^*(\omega^*) = T(\omega)$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(\omega) \quad \omega/\omega' \sim 0 & \quad \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ pari}} \int_1^\infty \frac{d\omega'}{\omega'} \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^n \text{Im} T_{\mu\nu}(\omega') \\
y = \frac{1}{\omega'} & \quad = \quad 2 \sum_n \frac{1}{\pi} \int_0^1 dy y^{n-1} \text{Im} T_{\mu\nu}(Q^2, \nu) \left(\frac{1}{x_B}\right)^n \\
& \quad = \quad 2 \sum_n \int_0^1 dy y^{n-1} F(\nu, Q^2) \left(\frac{1}{x_B}\right)^n \\
\text{teorema ottico} & \quad \equiv \quad 2 \sum_n M_F^n(Q^2) \left(\frac{1}{x_B}\right)^n
\end{aligned}$$



$$M_F^n(Q^2) \leftrightarrow \sum_i \frac{C_n^{(i)}(\log Q^2, \mu_F^2)}{(Q^2)^{t-2}} a_n^{(i)}(\mu_F^2)$$

misurabili

calcolabili in pQCD

incognite (calcolabili su reticolo)