# Introduzione al rumore in elettronica

**Valerio Re**

- Dipartimento di Ingegneria Industriale
- Università di Bergamo

- INFN - Pavia

**Corso nazionale di Formazione: "Elettronica di Front-end per i rivelatori di particelle", INFN – Pavia, 25 – 29 ottobre 2004**

# Outline

- Elettronica di front-end per rivelatori di particelle
- Rumore stocastico e trattamento matematico
- Sorgenti di rumore

# Elettronica di front-end per rivelatori

- Acquisizione di segnali elettrici dal rivelatore
  (tipicamente un breve impulso di corrente)

- Formatura del segnale in modo da ottimizzare:
  minimo segnale rivelabile (detect hit/no hit)
  misura di energia (ampiezza del segnale)
  event rate
  misura del tempo di arrivo

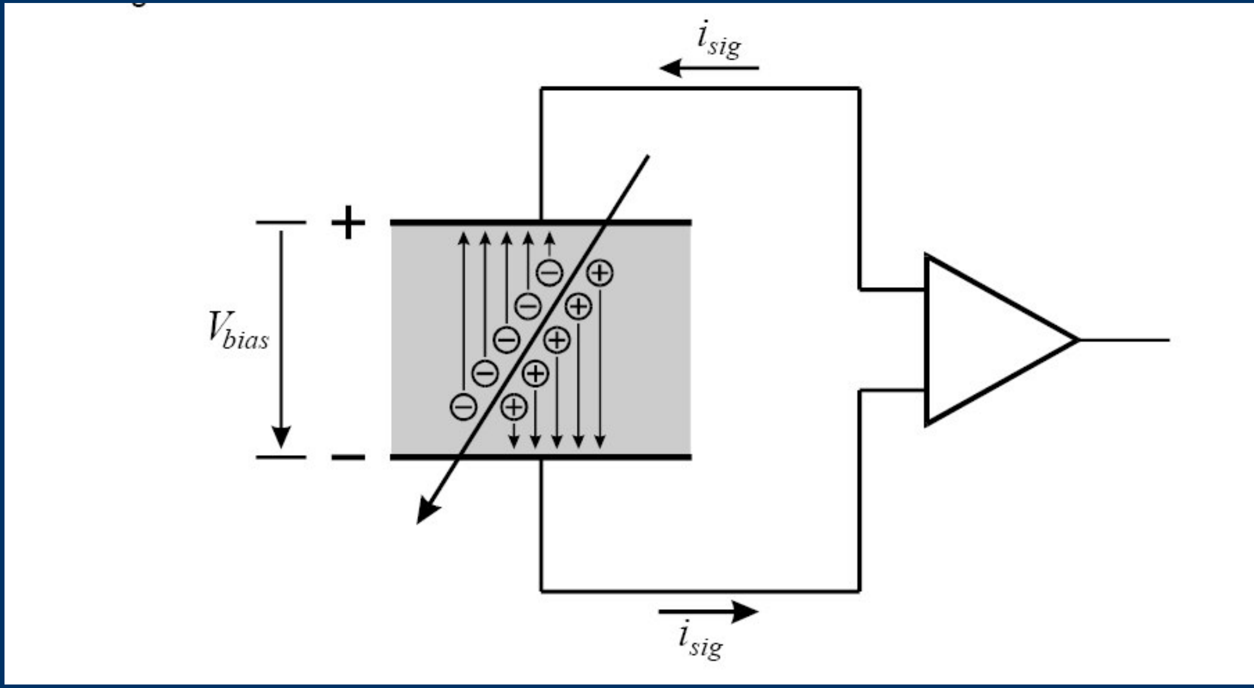
- Conversione analogico-digitale

- Memorizzazione, digital processing

# Camera a ionizzazione

Sono basate sullo stesso principio:

- Le particelle depositano energia in un assorbitore e creano portatori di carica mobili (coppie di cariche positive e negative)
- Il campo elettrico applicato al rivelatore muove i portatori di carica verso gli elettrodi e induce un segnale di corrente



# Rumore

L’accuratezza nella misura del segnale è limitata da fluttuazioni.

- Fluttuazioni statistiche della carica generata nel rivelatore
- Rumore elettronico nella catena di elaborazione del segnale

Il rumore elettronico influenza tutti i tipi di misura:

- Rivelazione della presenza di un hit.

  Il rumore determina il valore minimo di soglia. Se la soglia è troppo bassa, dominano gli hit spuri.
- Misura di energia

  Per effetto del rumore, l’ampiezza del segnale fluttua in modo statistico.
- Misura di tempo

  Il rumore altera la dipendenza temporale del segnale.

# Rumore elettronico

- Rumore = fluttuazioni spontanee che si verificano in alcuni componenti circuitali attivi e passivi e che si presentano come tensioni o correnti la cui evoluzione temporale è regolata da leggi statistiche
- E' un processo stocastico continuo a parametro continuo (il tempo) che ha origine da alcuni fenomeni fisici fondamentali quali l'agitazione termica dei portatori di carica nei conduttori o la struttura granulare della carica elettrica.
- La sua esistenza non può essere negata senza negare leggi fondamentali della fisica (Secondo principio della termodinamica, natura discreta della carica elettrica, ecc…)

# Rumore elettronico

- Il rumore non va confuso con i disturbi indotti sul circuito dall'ambiente circostante (disturbi introdotti dalle alimentazioni, disturbi dovuti a induzione elettromagnetica, ecc…) che, almeno idealmente, possono essere rimossi con l'impiego di tecniche di filtraggio e schermatura.

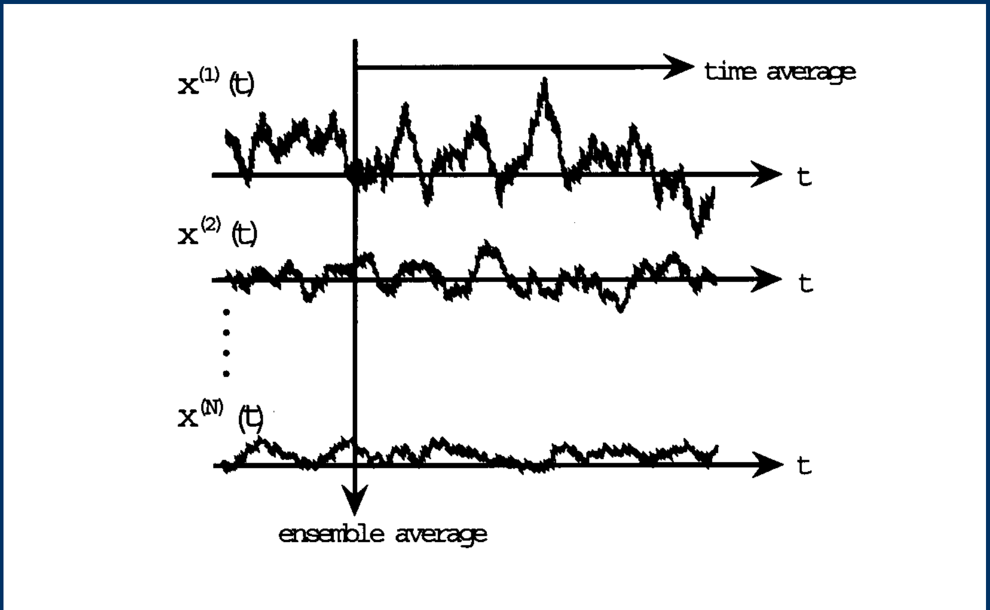
- Il rumore limita la precisione con cui si può misurare l'ampiezza istantanea di un segnale e, come situazione estrema, può mettere in dubbio la sua rivelabilità, inoltre il rumore limita il valore massimo dell'amplificazione utilizzabile, prima che intervenga la saturazione.

# Rumore elettronico

- Poiché il rumore è un fenomeno puramente casuale, non si può predire per ogni istante il valore istantaneo della sua forma d’onda, pertanto le variabili di rumore vengono descritte quantitativamente attraverso proprietà statistiche come il valore quadratico medio o la densità spettrale di potenza.

# Processo stocastico

- E' possibile definire le proprietà statistiche di un singolo sistema su un certo intervallo di tempo (media temporale) oppure di molti sistemi identici a un certo istante di tempo (media di insieme).



# Processi stazionari ed ergodici

- **Processo stazionario:** le proprietà statistiche (valor medio, valore quadratico medio, ecc…) sono invarianti nel tempo.

- **Processo ergodico:** le proprietà statistiche di un processo possono essere determinate da una singola funzione che rappresenta una possibile realizzazione del processo

  (media d'insieme = media temporale).

  Le proprietà statistiche che derivano dall'osservazione simultanea di amplificatori identici sono uguali a quelle derivate dall'osservazione a istanti successivi dell'evoluzione di una variabile di rumore relativa a un solo amplificatore.

  Perché un processo sia ergodico, deve essere stazionario (non vale l'inverso).

# Medie temporali

- **Valor medio:**

$$\overline{v(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} v(t)\, dt$$

- **Valore quadratico medio:**

$$\overline{v^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} v^2(t)\, dt$$

- **Funzione di autocorrelazione:**

$$R_V(\tau) = \overline{v(t)v(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} v(t)\, v(t+\tau)\, dt$$

Più rapida è l'evoluzione temporale del processo, più rapidamente la funzione di autocorrelazione diminuisce al crescere di $\tau$ rispetto al massimo per $\tau = 0$.

# Funzione di autocorrelazione

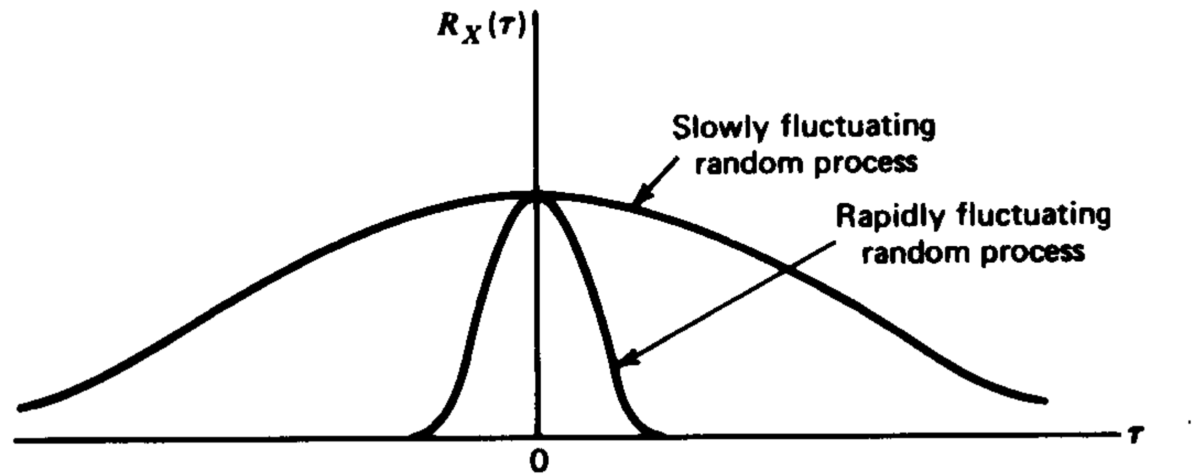



**Figure 8.13**
*The autocorrelation functions of slowly and rapidly fluctuating random processes.*

# Rapporto segnale-rumore

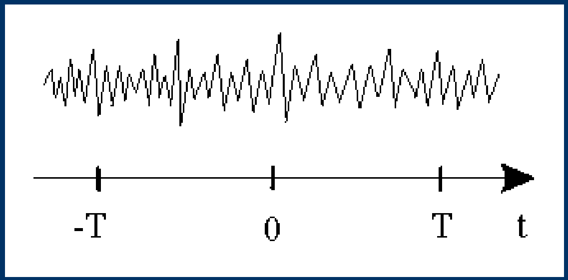
All'uscita di un amplificatore è presente rumore e un segnale di ampiezza S.

$$\frac{S}{N} = \frac{S}{\sqrt{\overline{v^2(t)}}}$$

Il rumore v(t) non viene descritto attraverso la dipendenza temporale a priori ignota, ma attraverso la densità spettrale di potenza nel dominio delle frequenze.

# Densità spettrale di potenza

Supponiamo che il rumore sia rappresentato da una funzione x(t) e consideriamo tale x(t) troncata nell'intervallo –T, T:




$$x_T(t) = x(t) \qquad |t| < T$$

$$x_T(t) = 0 \qquad |t| > T$$

$$\overline{x_T^2(t)} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_T^2(t)dt$$

Esprimendo $x_T(t)$ come antitrasformata di Fourier:

$$\overline{x_T^2(t)} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_T(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} v_T(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right\}dt =$$

# Densità spettrale di potenza

$$\overline{x_T^2(t)} = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} v_T(\omega)\left(\int_{-T}^{T} x_T(t)e^{j\omega t}dt\right)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|v_T(\omega)\right|^2}{2T}df$$

$$v_T(\omega) = \int_{-T}^{T} x_T(t)e^{-j\omega t}df$$

Poiché $x_T(t)$ è reale: $v_T(-\omega) = v_T^*(\omega)$

Il valore quadratico medio di x(t) si calcola passando al limite (se esiste) per $T\rightarrow\infty$ :

$$\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\rightarrow\infty} \frac{\left|v_T(\omega)\right|^2}{2T} df$$

# Densità spettrale di potenza

Si definisce densità spettrale di potenza della variabile di rumore x(t):

$$\frac{\overline{dx^2}}{df} = \lim_{T\to\infty} \frac{|v_T(\omega)|^2}{2T} = N_x(\omega)$$

Data la densità spettrale di potenza il valore quadratico medio è dato da:

$$\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} N_x(\omega)df$$

# Densità spettrale di potenza

La densità spettrale di potenza è una funzione pari:

$$N_x(\omega) = N_x(-\omega)$$

Quindi:

$$\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} N_x(\omega)df = 2\int_0^{\infty} N_x(\omega)df = \int_0^{\infty} S_x(\omega)df$$

$N_x(\omega)$ = densità spettrale bilatera

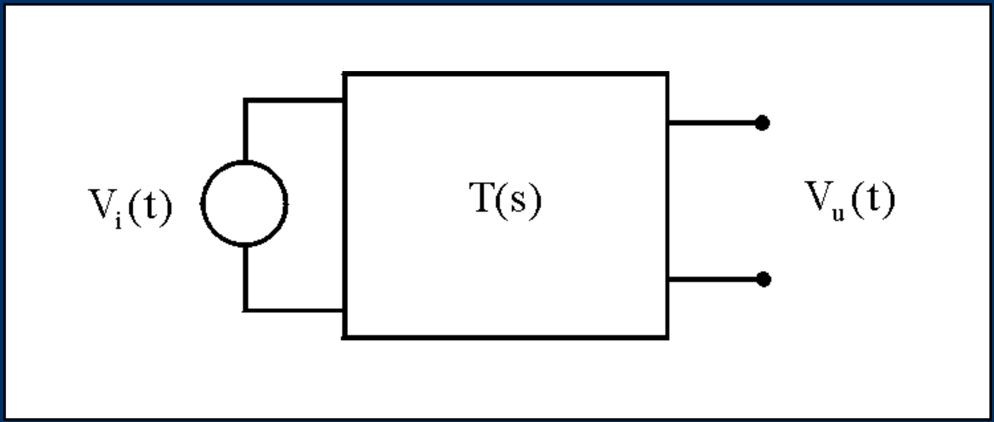
$S_x(\omega) = 2\,N_x(\omega)$ = densità spettrale unilatera

# Sorgenti di rumore

$$\frac{\overline{de^2}}{df} \quad \left[V^2/Hz\right]$$

$$\frac{\overline{di^2}}{df} \quad \left[A^2/Hz\right]$$

# Trasformazione della densità spettrale di rumore attraverso una rete lineare




$V_i(t)$: grandezza di rumore all'ingresso della rete lineare con funzione di trasferimento T(s), con densità spettrale di potenza $S_i(\omega)$

$V_u(t)$: grandezza di rumore in uscita alla rete lineare, con densità spettrale di potenza $S_u(\omega)$

Si ripete il ragionamento che ha portato alla definizione di densità spettrale di potenza per la variabile x(t), applicandolo a $V_u(t)$.

# Trasformazione della densità spettrale di rumore attraverso una rete lineare

$$V_u(\omega) = T\left(j\omega\right)\cdot V_i(\omega)$$

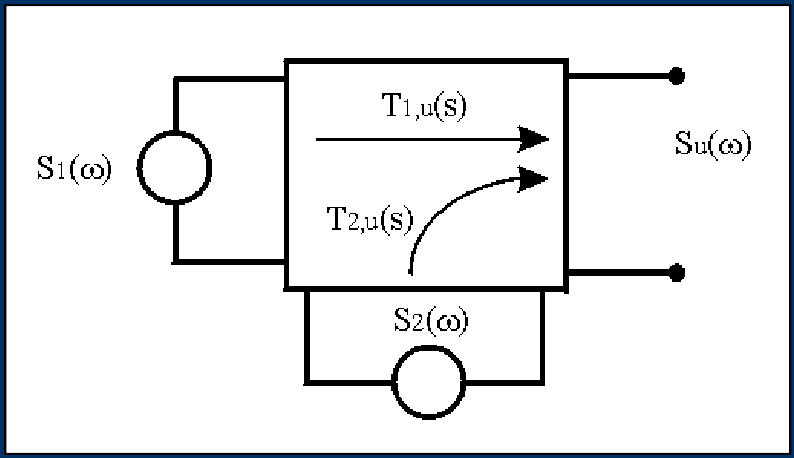
$$\Downarrow$$

$$S_u(\omega) = \left|T\left(j\omega\right)\right|^2 \cdot S_i(\omega)$$

Una volta che si sia calcolata $S_u(\omega)$, la tensione quadratica media di rumore in uscita si valuta attraverso l'integrale:

$$\overline{V_u^2(t)} = \int_0^{\infty} S_u(\omega)df$$

# Due sorgenti di rumore in una rete lineare



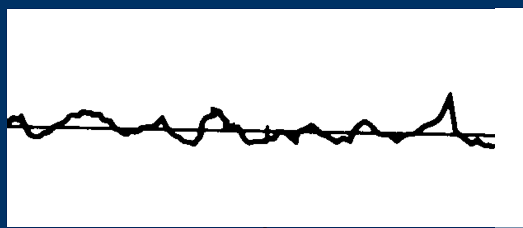

Sorgenti incorrelate (statisticamente indipendenti):

$$S_u(\omega) = \left|T_{1,u}(j\omega)\right|^2 \cdot S_1(\omega) + \left|T_{2,u}(j\omega)\right|^2 \cdot S_2(\omega)$$

Sorgenti correlate ($W_{12}(\omega)$ = densità spettrale mutua):

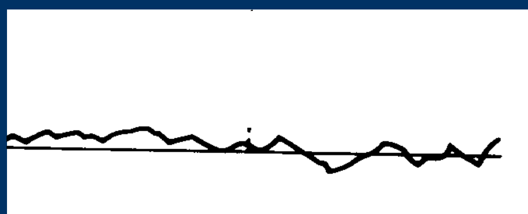
$$S_u(\omega) = \left|T_{1,u}(j\omega)\right|^2 \cdot S_1(\omega) + \left|T_{2,u}(j\omega)\right|^2 \cdot S_2(\omega) +$$
$$+ \; 2\mathrm{Re}\left[W_{12}(\omega) \cdot T_{1,u}(j\omega) \cdot T^*_{2,u}(j\omega)\right]$$

# Correlazione fra sorgenti di rumore



$V_1(t)$

$$\overline{(V_1 + V_2)^2} = \overline{V_1^{\,2}} + \overline{V_2^{\,2}} + 2\,\overline{V_1 V_2}$$



$V_2(t)$

Variabili incorrelate: $\overline{(V_1 + V_2)^2} = \overline{V_1^{\,2}} + \overline{V_2^{\,2}} \qquad \left(\overline{V_1 V_2} = 0\right)$

Correlazione totale: $\overline{(V_1 + V_2)^2} = 4\,\overline{V_1^{\,2}}$
$(V_1 = V_2)$

Correlazione parziale: $\overline{V_1^{\,2}} + \overline{V_2^{\,2}} \le \overline{(V_1 + V_2)^2} \le 4\,\overline{V_1^{\,2}}$

# Sorgenti di rumore

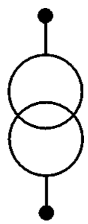
- Rumore granulare (Shot noise)
- Rumore termico
- Rumore 1/f
- Rumore Lorentziano

# Rumore granulare

La causa prima è costituita dalla quantizzazione della carica elettrica.

E' presente in tutti i dispositivi percorsi da corrente quando sia coinvolto un numero relativamente piccolo di portatori che devono superare una barriera di potenziale (tipicamente corrente dovuta a portatori minoritari), come la regione di svuotamento di una giunzione P-N.

**Rumore bianco**
**(densità spettrale indipendente dalla frequenza)**

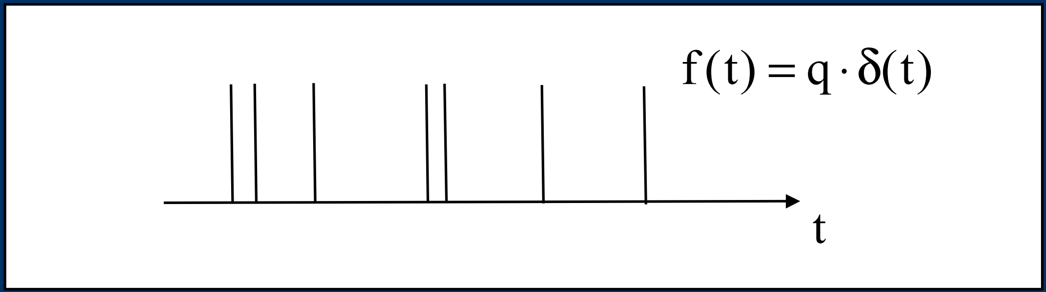


$$\frac{\overline{di^2}}{df} = 2qI$$

I = corrente del dispositivo
q = carica dell'elettrone ($q = 1.6 \cdot 10^{-19}$C)

# Rumore granulare

Il passaggio di ciascun portatore di carica attraverso una giunzione è un evento casuale. La corrente attraverso la giunzione è data da una sequenza casuale di eventi elementari $q \cdot \delta(t)$.




$$I = \overline{i(t)} = q \cdot \lambda$$

$\lambda$ = frequenza media di arrivo dei portatori = I/q

Le fluttuazioni di i(t) intorno al valor medio costituiscono il rumore granulare. Lo spettro di potenza è dato da (teorema di Carson):

$$S(\omega) = 2\lambda \cdot |F(j\omega)|^2 = 2\lambda \cdot q^2 = 2q \cdot I$$

# Rumore termico

In un resistore metallico è presente un gas di elettroni che per effetto dell'agitazione termica hanno valore quadratico medio della velocità diverso da zero. Il loro moto, per effetto degli urti elettrone-reticolo ed elettrone-elettrone è irregolare.

Si genera una f.e.m. di rumore che può essere schematizzata con un generatore di tensione in serie al resistore.

L'espressione della densità spettrale di potenza del rumore termico può essere ricavata come conseguenza del II° Principio della Termodinamica e del principio di equipartizione dell'energia di Boltzmann.

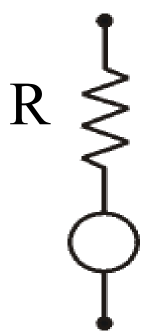
# Rumore termico

E' dovuto al moto termico casuale degli elettroni ed è indipendente dalla presenza o meno di una corrente diretta.

(ai valori ordinari di corrente la velocità media degli elettroni acquisita sotto l'azione del campo elettrico è piccola in confronto alla velocità dovuta all'agitazione termica).

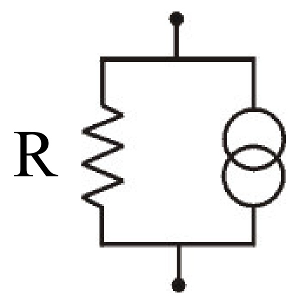
E' l'unica forma di rumore presente in un resistore metallico.

Modello di Thevenin




$$\frac{\overline{de_R^2}}{df} = 4kTR$$

Modello di Norton



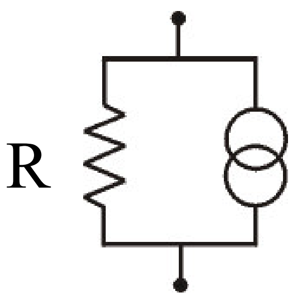

$$\frac{\overline{di_R^2}}{df} = \frac{4kT}{R}$$

T = temperatura assoluta

k = costante di Boltzmann ($k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K)

# Rumore in eccesso in resistenze a impasto

Resistori non metallici quando siano percorsi da corrente possono presentare rumore in eccesso rispetto a quello termico. Questo rumore è dovuto a fluttuazioni casuali della resistenza di contatto fra granuli ed è un esempio di rumore con densità spettrale 1/f.




$$\frac{\overline{di_R^2}}{df} = \frac{4kT}{R} + \alpha\frac{I^2}{f}$$

# Rumore termico in condensatori con perdite

Si verifica in condensatori (anche capacità parassite associate ad es. al package dei dispositivi ) il cui dielettrico presenta delle perdite.

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

In un dielettrico con perdite (δ = angolo di perdita):

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r'' \qquad \mathrm{tg}\,\delta = \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'}$$

# Rumore termico in condensatori con perdite

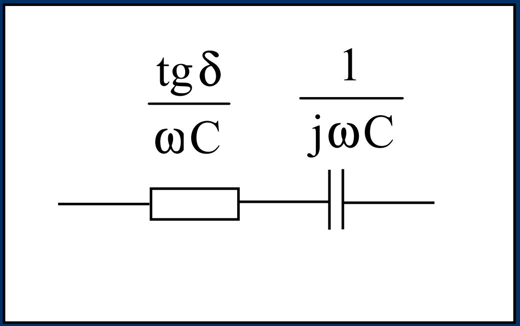
Quindi l'impedenza del condensatore con perdite è:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon'_r\frac{S}{d} + \omega\varepsilon_0\varepsilon''_r\frac{S}{d}} = \frac{1}{j\omega C + \omega\cdot \mathrm{tg}\,\delta\cdot C}$$

Se tgδ << 1:

$$Z_C = \frac{\mathrm{tg}\,\delta}{\omega C} + \frac{1}{j\omega C}$$

Modello del condensatore con perdite:



# Rumore termico
# in condensatori con perdite:
# Rumore dielettrico (densità spettrale di tipo 1/f)

Al termine resistivo si associa un generatore di tensione di rumore termico, con densità spettrale di potenza:

$$\frac{\overline{de^2}}{df} = 4kT\,\frac{tg\,\delta}{\omega C}$$

# Rumore 1/f

Contributi di rumore 1/f derivano da effetti superficiali nei dispositivi a stato solido, da effetti di contatto fra granuli in resistori a impasto, ecc.

Il rumore 1/f è sempre associato ad un flusso di corrente e la sua densità spettrale ha un'espressione della forma:

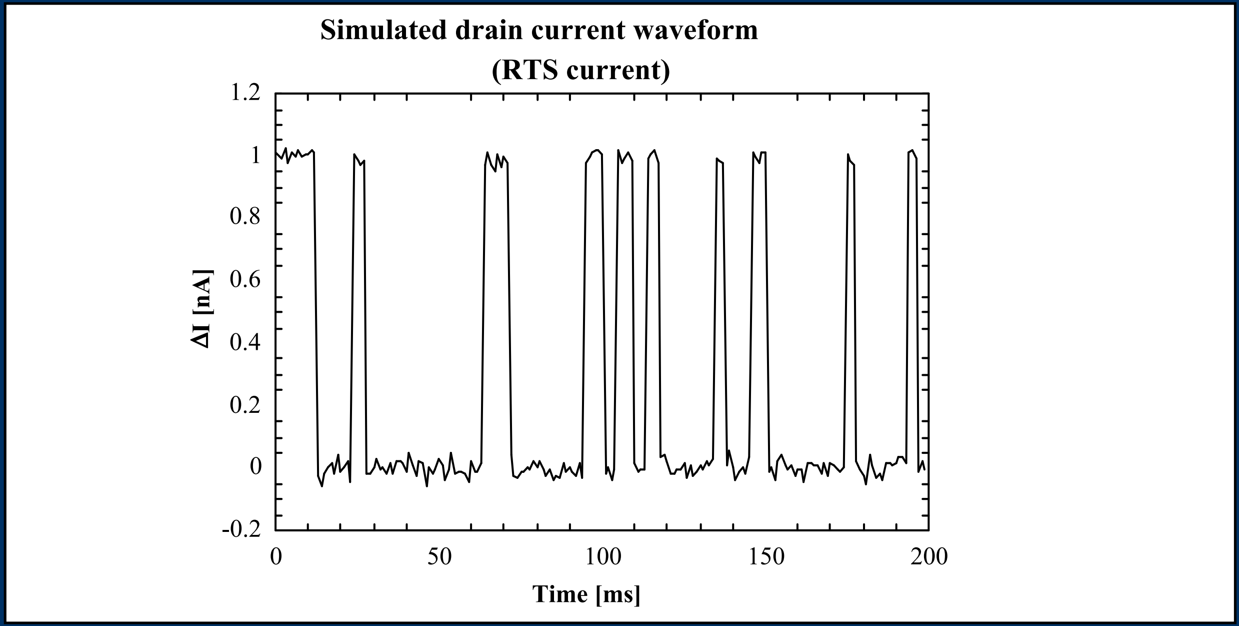
$$\frac{\overline{di^2}}{df} = k_f \frac{I^b}{f^\alpha}$$

in cui I è la corrente diretta, $k_1$ è una costante per un particolare dispositivo, $\alpha$ è una costante con un valore prossimo a 1.

# Rumore Lorentziano

In alcuni sistemi i portatori di carica elettrica possono venire intrappolati in posizioni da dove possono modulare il flusso di corrente. La carica intrappolata provoca una variazione $\Delta i$ della corrente.

Una singola trappola che agisce sulla corrente con questo meccanismo produce un treno di impulsi di durata variabile chiamato Random Telegraph Signal (RTS). Ogni trappola è caratterizzata da una costante di tempo $\tau_Z = 1/2\nu$, dove $\nu$ è il numero medio di transizioni al secondo fra i due livelli.

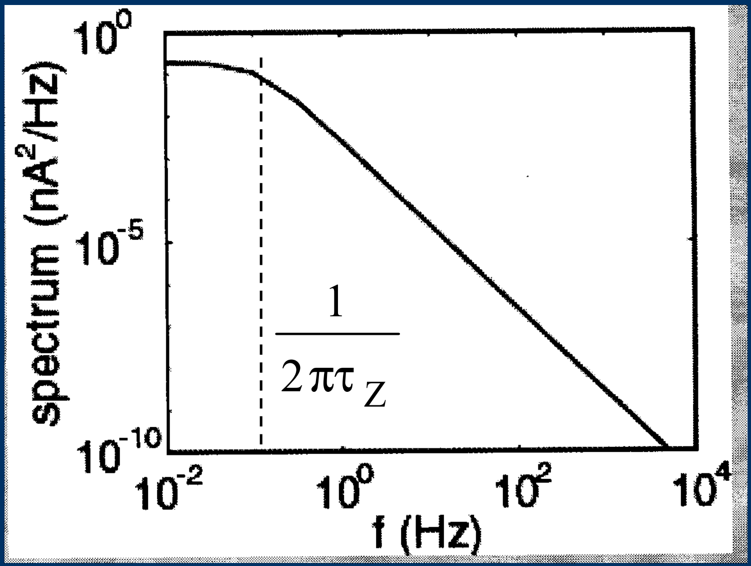


# Rumore Lorentziano

La densità spettrale di potenza di rumore per la corrente RTS ha la forma:

$$\frac{\overline{di_L^2}}{df} = \Delta i^2 \frac{4\tau_Z}{\left(1+\omega^2\tau_Z^2\right)} = \Delta i^2 \frac{4\tau_Z}{\left(1+4\pi^2 f^2 \tau_Z^2\right)}$$

Questo tipo di comportamento in frequenza è spesso osservato in dispositivi dove un solo tipo di trappola causa fluttuazioni della corrente (JFET, MOSFET di piccola area).



# Rumore 1/f come sovrapposizione di processi Lorentziani

In un sistema come l'ossido di gate di un MOSFET il processo di intrappolamento avviene per tunneling dei portatori di carica dal semiconduttore alle trappole all'interno dello strato di ossido a una profondità w. La costante di tempo obbedisce alla legge ($\tau_0$ e $\gamma$ sono costanti dipendenti dal materiale):

$$\tau_Z = \tau_0 e^{\gamma w}$$

In questo caso la densità spettrale di rumore si ottiene sommando i contributi di trappole a diverse profondità (corrispondenti a diverse costanti di tempo). Supponendo che la densità di trappole sia costante con la profondità ($N_t$ = densità di trappole, A = area dove si ha intrappolamento):

$$\frac{\overline{di_{1/f}^2}}{df} = \frac{\Delta i^2 A N_t}{4\pi\gamma} \int_0^\infty \frac{1}{\left(1 + \omega^2 \tau_Z^2\right)} d\tau_Z = \frac{\Delta i^2 A N_t}{4\gamma} \cdot \frac{1}{f}$$

# Rumore 1/f come sovrapposizione di processi Lorentziani