

## A. DISTRIBUZIONI E DELTA DI DIRAC

Per ragioni pratiche, ispirate dalla necessità di considerare autofunzioni improprie appartenenti alla parte continua dello spettro di operatori che intervengono nel formalismo della meccanica quantistica, Dirac fece ricorso a una funzione generalizzata, detta poi *delta di Dirac*, così definita <sup>1</sup>:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1. \quad (\text{A.2})$$

La delta di Dirac non è una funzione nel senso proprio del termine; in realtà essa rientra nella classe di oggetti che i matematici hanno poi studiato e definito come *distribuzioni* <sup>2</sup>. Essa acquista significato solo in espressioni integrali del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(x) = f(0), \quad (\text{A.3})$$

o, in generale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\delta(x - a) = f(a). \quad (\text{A.4})$$

Nel formalismo della meccanica quantistica, che è basato sulla valutazione di prodotti scalari tra funzioni, queste espressioni integrali intervengono tutte le volte che si

---

<sup>1</sup> P.A.M. Dirac: *The physical interpretation of the quantum mechanics [L'interpretazione fisica della meccanica quantistica]*, Proceedings of the Royal Society of London **A113** (1926) 621–641.

<sup>2</sup> Laurent Schwartz (n. 1915): *Théorie des distributions*, Hermann, Parigi, 1950, vol. 1, 1951, vol. 2.

abbia a che fare con autofunzioni improprie, appartenenti cioè alla parte continua dello spettro di un operatore quantistico.

In questa appendice, dopo un breve richiamo alla teoria delle distribuzioni, vengono ricordate le proprietà più rilevanti che ne derivano per la delta di Dirac. In particolare si illustrano i vantaggi dell'uso della delta di Dirac come generalizzazione formale della delta di Kronecker e come ausilio nel calcolo delle trasformate di Fourier.

### A.1. Distribuzioni

Le distribuzioni sono dei *funzionali lineari e continui*  $\phi(f)$  su un dominio di funzioni  $\mathcal{D}$  opportunamente scelto. La linearità implica

$$\phi(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \phi(f_1) + a_2 \phi(f_2), \quad \forall f_1, f_2 \in \mathcal{D}, \quad (\text{A.5})$$

dove  $a_1$  e  $a_2$  possono essere in generale numeri complessi. La continuità indica che, per una successione qualsiasi di funzioni  $\{f_n\} \in \mathcal{D}$ , convergente in senso opportuno a  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{D}$ , si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(f_n) = \phi(f). \quad (\text{A.6})$$

L'insieme dei funzionali lineari così costruiti costituisce dunque uno *spazio lineare*, che si chiama *spazio duale* di  $\mathcal{D}$ .

La denominazione di *distribuzione* è più propriamente riservata ai funzionali lineari e continui, definiti sull'insieme di funzioni a valori non nulli in un dominio finito delle loro variabili e che posseggono derivata di ogni ordine rispetto a queste variabili, cioè l'insieme  $C_0^\infty$  delle *funzioni infinitamente derivabili a supporto compatto*.

Si chiamano *distribuzioni temperate* i funzionali lineari e continui, definiti sull'insieme  $\mathcal{S}$  delle *funzioni infinitamente derivabili e a decrescenza rapida*, cioè l'insieme delle funzioni che sono continue con tutte le loro derivate e che si annullano all'infinito con tutte le loro derivate più rapidamente di ogni potenza costruita con le loro variabili. Per funzioni a una sola variabile,  $x \in \mathbb{R}$ , ciò significa l'insieme  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  per cui

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^r \frac{d^s}{dx^s} f(x) = 0 \quad (r, s = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{A.7})$$

Evidentemente risulta  $C_0^\infty \subset \mathcal{S}$ . D'altra parte la convergenza a  $f \in C_0^\infty$  di una successione  $\{f_n\}$  implica anche la convergenza della stessa successione a  $f \in \mathcal{S}$ . Perciò restringendo una distribuzione temperata a  $C_0^\infty$  si ottiene una distribuzione: in questo senso si può dire che le distribuzioni temperate sono una sottoclasse delle distribuzioni.

A ogni funzione  $\psi(x)$  localmente integrabile, cioè tale che esista il suo integrale (nel senso di Lebesgue) su ogni intervallo finito della sua variabile  $x \in \mathbb{R}$ , corrisponde una distribuzione  $\phi(f)$ , definita dalla relazione

$$\phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x) f(x). \quad (\text{A.8})$$

Due funzioni localmente integrabili definiscono la stessa distribuzione se differiscono al più su un insieme di misura nulla. Se il tipo di funzioni  $\psi$  che intervengono nella (A.8) è a *crescenza algebrica*, cioè  $|\psi(x)| < c|x|^k$  per  $|x| > a$  con  $a, c$  e  $k$  numeri positivi, la distribuzione definita dalla (A.8) è una distribuzione temperata.

Le funzioni  $f$  della meccanica quantistica, che intervengono nella valutazione di un prodotto scalare, sono in generale funzioni a quadrato sommabile,  $f \in \mathcal{L}^2$ . Grazie alla (A.8), queste funzioni definiscono delle distribuzioni temperate. Precisamente si ha

$$\langle \psi | f \rangle \equiv \phi^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi^*(x) f(x). \quad (\text{A.9})$$

Le distribuzioni che soddisfano la (A.8) sono dette *distribuzioni regolari*, per distinguerle da quelle non riducibili alla forma (A.8), che vengono dette *distribuzioni singolari*. Un esempio di distribuzione (temperata) singolare è proprio la delta di Dirac, che in questo contesto è definita dal funzionale lineare e continuo

$$\phi(f) = f(0), \quad (\text{A.10})$$

in accordo con la (A.3).

Una successione di distribuzioni (o di distribuzioni temperate) converge a una distribuzione (o a una distribuzione temperata) quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(f) = \phi(f), \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathcal{S}). \quad (\text{A.11})$$

Si dimostra che *ogni distribuzione può essere sempre ottenuta come limite di una successione di distribuzioni regolari* del tipo (A.8), cioè  $\forall \phi(f)$  si può trovare una successione di funzioni  $\{\psi_n(x)\}$  tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi_n(x) f(x) = \phi(f). \quad (\text{A.12})$$

In particolare tale successione può essere sempre realizzata con funzioni  $\psi_n(x) \in C_0^\infty$ .

Questo teorema, la cui dimostrazione viene qui omessa, è fondamentale nell'uso pratico e permette di visualizzare tutte le distribuzioni, e quindi anche la delta di Dirac, come *funzioni generalizzate*. Unito alla completezza rispetto alle operazioni di passaggio al limite, definite nello spazio dei funzionali lineari e continui che costituisce l'insieme delle distribuzioni, questo teorema consente infatti di estendere

alle distribuzioni molte delle operazioni caratteristiche sulle funzioni ordinarie, quali per esempio quelle di sostituzione di variabile, di derivazione e di integrazione.

In particolare, ricorrendo alla (A.8), si verificano le seguenti relazioni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(-x)f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x)f(-x), \quad (\text{A.13})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(ax)f(x) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x)f\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(y(x))f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \psi(y) \frac{f(x(y))}{|dy/dx|}, \quad (\text{A.15})$$

che corrispondono rispettivamente alle sostituzioni

$$x \rightarrow -x, \quad (\text{A.16})$$

$$x \rightarrow ax, \quad a > 0, \quad (\text{A.17})$$

$$x \rightarrow g(x). \quad (\text{A.18})$$

Analogamente si giustifica la definizione di derivata di una distribuzione,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left( \frac{d\psi(x)}{dx} \right) f(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x) \frac{df(x)}{dx}, \quad (\text{A.19})$$

e la validità, anche per le distribuzioni, di tutte le proprietà della derivata di una funzione. Pertanto le distribuzioni sono derivabili a tutti gli ordini e la derivazione, in quanto agente su funzionali lineari e continui, è un'operazione lineare e continua nello spazio delle distribuzioni.

Se una distribuzione  $\phi(f, t)$  dipende da un parametro  $t$  che varia in modo continuo nel dominio  $\mathcal{T}$  e se l'integrale  $\Phi(f)$  di questa distribuzione esiste su  $\mathcal{T}$  per qualunque funzione  $f$  del dominio di definizione del funzionale lineare e continuo associato,  $\Phi(f)$  risulta ancora una distribuzione:

$$\Phi(f) = \int_{\mathcal{T}} dt \phi(f, t). \quad (\text{A.20})$$

In particolare, se  $\psi(x, t)$  è una funzione localmente integrabile in  $x$  e integrabile in  $t \in \mathcal{T}$ , la distribuzione

$$\phi(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x, t)f(x)$$

è integrabile in  $t \in \mathcal{T}$  e il suo integrale  $\Phi(f)$  è la distribuzione associata alla funzione

La delta di Dirac

$$\Psi(x) = \int_{\mathcal{T}} dt \psi(x, t).$$

A.2. La delta di Dirac

L'uso comune, che segue la definizione data da Dirac, prevede la notazione  $\delta(x)$  per indicare la distribuzione definita nella (A.10). Per soddisfare le proprietà (A.1) e (A.2), la delta di Dirac può essere pensata come limite di una successione di funzioni  $\{\psi_n(x)\}$ , dipendenti da un parametro e tali da essere significativamente diverse da zero solo su un piccolo intervallo intorno a  $x = 0$ , con un picco che diventa sempre più pronunciato per  $n \rightarrow \infty$ . Se si mantiene uguale a 1, l'integrale (A.8), calcolato con  $\psi = \psi_n$ , nel limite  $n \rightarrow \infty$  definisce una distribuzione che soddisfa i requisiti della delta di Dirac (fig. A.1).

Si considerino, ad esempio, le funzioni del tipo

$$\delta_K(x) = \frac{\sin(Kx)}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-K}^{+K} dk e^{ikx}. \quad (\text{A.21})$$

Tali funzioni permettono di ottenere

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \delta_K(x) = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta_K(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\sin \xi}{\xi} = 1. \quad (\text{A.23})$$

Inoltre per  $K \rightarrow \infty$  le oscillazioni si smorzano e il picco centrale per  $x = 0$  si innalza. Pertanto si ha

$$\delta(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \delta_K(x), \quad (\text{A.24})$$

e quindi

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx}. \quad (\text{A.25})$$

La (A.25) costituisce anche la *rappresentazione di Fourier* della delta di Dirac.

Un'altra possibile successione di funzioni utili per la definizione della delta di Dirac è la seguente:

$$\delta_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-ax^2}, \quad (\text{A.26})$$

con le proprietà

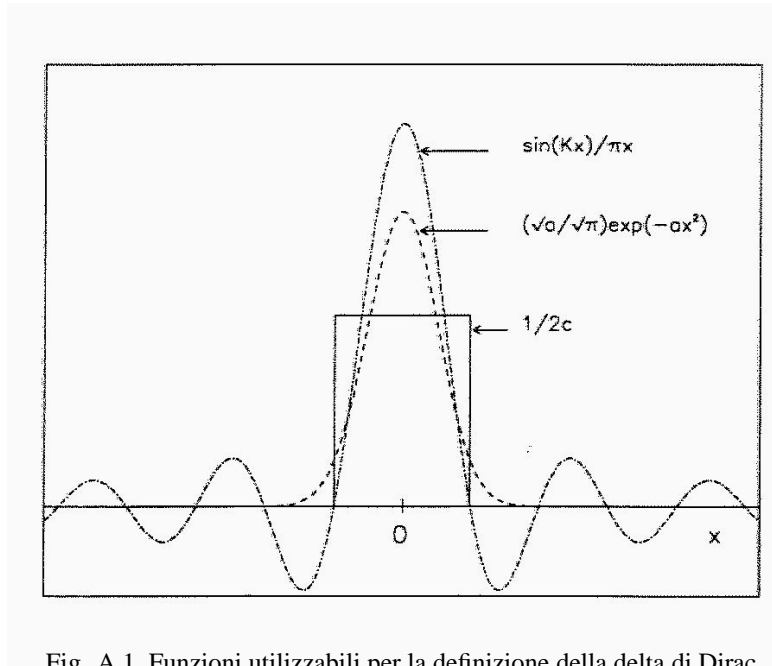


Fig. A.1. Funzioni utilizzabili per la definizione della delta di Dirac.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \delta_a(x) = 0, \quad (\text{A.27})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta_a(x) = 1. \quad (\text{A.28})$$

Pertanto

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \delta_a(x). \quad (\text{A.29})$$

Un'altra definizione della delta di Dirac è legata alla funzione gradino di Heaviside, così definita:

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= 0, & x < 0, \\ \Theta(x) &= 1, & x > 0. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

La derivata della funzione gradino ha ovviamente una discontinuità per  $x = 0$ , altrimenti è identicamente nulla. Pertanto

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} \Theta(x). \quad (\text{A.31})$$

Anche la successione delle funzioni costanti su un intervallo finito converge a una delta di Dirac quando si restringe l'intervallo mantenendo l'integrale costante:

$$\delta_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{2c}, & |x| \leq c, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

*La delta di Dirac*

Sono utili le seguenti proprietà della delta di Dirac:

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (\text{A.33})$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x), \quad a > 0, \quad (\text{A.34})$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)], \quad a > 0. \quad (\text{A.35})$$

Queste proprietà derivano tutte dalle proprietà generali (A.13), (A.14) e (A.15). Anzi, la (A.35) è un caso particolare della relazione

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|df(x)/dx|_{x=x_i}}, \quad (\text{A.36})$$

dove  $x_i$  sono gli zeri dell'equazione:  $f(x) = 0$ .

Altre proprietà utili sono:

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a), \quad (\text{A.37})$$

$$\int dy \delta(x - y) \delta(y - a) = \delta(x - a). \quad (\text{A.38})$$

In particolare, dalla (A.37) segue la possibilità di definire la delta di Dirac mediante l'equazione

$$x \delta(x) = 0. \quad (\text{A.39})$$

Dalla derivabilità della delta seguono inoltre le seguenti proprietà:

$$\delta'(x) = -\delta'(-x), \quad (\text{A.40})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta'(x) = -f'(0), \quad (\text{A.41})$$

e, in generale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta'(x - a) = -f'(a). \quad (\text{A.42})$$

Se nella (A.42) si prende  $f(x) = x$  e  $a = 0$ , si ottiene

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \delta'(x) = 1. \quad (\text{A.43})$$

Ma  $-x \delta'(x)$ , considerata come funzione di  $x$ , si annulla sempre eccetto quando  $|x| \rightarrow 0$ . Perciò  $-x \delta'(x)$  ha tutte le proprietà della  $\delta(x)$  e si può scrivere:

$$-x \delta'(x) = \delta(x). \quad (\text{A.44})$$

Vale infine lo sviluppo di Fourier:

$$\delta'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk k e^{ikx}. \quad (\text{A.45})$$

*Esempio A.1*

Spesso si ha la necessità di valutare integrali del tipo

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon}. \quad (\text{A.46})$$

Utilizzando l'identità

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad (\text{A.47})$$

l'integrale (A.46) può essere riscritto

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon} \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp i \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Il primo addendo a secondo membro della (A.48) può essere decomposto nella somma seguente:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-\infty}^{-\epsilon} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{+\epsilon}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \right] \\ + f(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dx \frac{x}{x^2 + \epsilon^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Ma l'ultimo termine della (A.49) è identicamente nullo perché l'integrando è una funzione dispari. Inoltre si è soliti indicare con  $\mathcal{P}$  la *parte principale* di un integrale, definita come

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-\infty}^{-\epsilon} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{+\epsilon}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \right]. \quad (\text{A.50})$$

Perciò la (A.49) diventa

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x}. \quad (\text{A.51})$$



*La delta di Dirac*

Il secondo addendo della (A.48) coinvolge funzioni del tipo

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad (\text{A.52})$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = 1, \quad (\text{A.53})$$

che per  $\epsilon \rightarrow 0+$  costituiscono una successione di funzioni utile per la definizione della delta di Dirac:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \delta_\epsilon(x) = \delta(x). \quad (\text{A.54})$$

Perciò il secondo addendo della (A.48) diventa

$$\mp i \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \mp i \pi f(0). \quad (\text{A.55})$$

In definitiva dunque l'integrale (A.46) risulta

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \mp i \pi f(0). \quad (\text{A.56})$$

Questo risultato può essere riassunto ricorrendo alla formula simbolica

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i \pi \delta(x). \quad (\text{A.57})$$

*Esempio A.2*

La delta di Dirac si può considerare una generalizzazione a indici continui della delta di Kronecker<sup>3</sup>,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

che viene usata per esempio per indicare gli elementi  $(\mathbb{1})_{ij}$  della matrice identità e che più in generale viene coinvolta nella scrittura degli elementi di una matrice  $M_{ij}$  diagonale (cfr. Appendice C):

$$M_{ij} = f_i \delta_{ij}. \quad (\text{A.59})$$

Quando si usano matrici con indici continui per le righe e le colonne, come succede nella rappresentazione matriciale di operatori quantistici che abbiano uno spettro continuo, diventa necessario esprimere gli elementi di matrice della matrice identità mediante la delta di Dirac. Infatti la matrice identità  $\mathbb{1}$  per definizione è la matrice che, moltiplicata per una qualsiasi matrice  $M$ , di elementi  $M(\alpha, \alpha')$ , secondo la regole del prodotto di matrici righe per colonne, deve riprodurre la matrice  $M$ , cioè

---

<sup>3</sup> Leopold Kronecker (1823–1891).

$$\int d\alpha'' \mathbb{1}(\alpha, \alpha'') M(\alpha'', \alpha') = M(\alpha, \alpha'). \quad (\text{A.60})$$

Perciò si vede che gli elementi della matrice identità sono

$$\mathbb{1}(\alpha, \alpha') = \delta(\alpha - \alpha'). \quad (\text{A.61})$$

In generale una matrice  $M(\alpha, \alpha')$  a indici continui è diagonale se ha diversi da zero solo gli elementi diagonali, che risultano del tipo  $f(\alpha) \delta(\alpha - \alpha')$ . A tale matrice sono per esempio riconducibili la relazione di chiusura (IV.2.9) e la condizione di ortonormalizzazione tra autofunzioni improprie (IV.2.15).

### A.3. Trasformate di Fourier

Per una qualsiasi funzione (reale o complessa)  $f(x)$  della variabile  $x \in \mathbb{R}$ , l'espressione

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-ikx}, \quad (\text{A.62})$$

se esiste, è detta *trasformata di Fourier* di  $f(x)$ <sup>4</sup>. Sotto opportune condizioni di convergenza,  $f(x)$  può a sua volta essere dedotta da  $\tilde{f}(k)$  per mezzo della *trasformata di Fourier inversa*:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}. \quad (\text{A.63})$$

La (A.63) è detta anche *rappresentazione di Fourier* della  $f(x)$ . Questa definizione di trasformata di Fourier può essere considerata una generalizzazione degli sviluppi in serie di Fourier validi per funzioni a quadrato sommabile su un intervallo finito. Per  $f(x) \in \mathcal{L}^2(-a, a)$ , si ha infatti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\pi x/a}, \quad (\text{A.64})$$

con i coefficienti di Fourier dati dalla relazione

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-a}^{+a} dx f(x) e^{-in\pi x/a}. \quad (\text{A.65})$$

Se si pone

---

<sup>4</sup> Si veda, per esempio, il testo di Georgi P. Tolstov: *Fourier Series*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962 (traduzione inglese di Richard A. Silverman).

$$k = k_n = n\pi/a, \quad \Delta k = k_{n+1} - k_n = \pi/a, \quad \tilde{f}(k_n) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} f_n, \quad (\text{A.66})$$

la (A.64) e la (A.65) diventano

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta k \tilde{f}(k_n) e^{ik_n x}, \quad (\text{A.67})$$

$$\tilde{f}(k_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} dx f(x) e^{-ik_n x}. \quad (\text{A.68})$$

Nel passaggio al limite per  $a \rightarrow \infty$ , in modo che la distanza  $\Delta k$  che separa i valori di  $k_n$  tenda a zero lasciando  $k$  costante, la (A.67) e la (A.68) diventano rispettivamente la (A.63) e la (A.62). Tra sviluppi di Fourier e trasformate di Fourier si può così stabilire formalmente il seguente limite:

$$\frac{1}{\sqrt{2a}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk. \quad (\text{A.69})$$

In realtà l'esistenza della (A.62) e della sua inversa (A.63) sono garantite per funzioni  $\in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Ma siccome  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è denso in  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  secondo la topologia di  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , si possono estendere le definizioni (A.62) e (A.63) anche alle funzioni  $\in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Precisamente, se  $\{f_n(x)\}$  è una successione  $\in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  che converge in  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  verso  $f(x)$ , si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f_n(x) e^{-ikx}, \quad (\text{A.70})$$

dove il limite va inteso come limite in media, secondo cioè la topologia di  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ .

Queste considerazioni si estendono direttamente al caso tridimensionale. Per una  $f(\mathbf{r}) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$  si definisce la trasformata di Fourier,

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (\text{A.71})$$

e la sua inversa,

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (\text{A.72})$$

Corrispondentemente, la (A.69) nel caso di uno sviluppo di Fourier su un volume finito  $V$  diventa

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k}. \quad (\text{A.73})$$

Con queste premesse, si può anche definire la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata. Se  $\phi(\tilde{f})$  è un funzionale dello stesso tipo di  $\phi(f)$ , la trasformata di Fourier  $\tilde{\phi}(f)$  della distribuzione temperata  $\phi(f)$  si definisce

$$\tilde{\phi}(f) = \phi(\tilde{f}), \quad (\text{A.74})$$

cioè la trasformata di Fourier della distribuzione  $\phi(f)$  è la distribuzione associata alla trasformata di Fourier della funzione  $f$ .

A parte l'eventuale diversità con la definizione (A.63) per un fattore  $\sqrt{2\pi}$ , la (A.25) costituisce la rappresentazione di Fourier della delta di Dirac:

$$\sqrt{2\pi} \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx}. \quad (\text{A.75})$$

Essa può interpretarsi come la trasformata inversa della funzione costante  $f(x) = 1$ . E infatti per la (A.62) la sua trasformata di Fourier risulta

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \sqrt{2\pi} \delta(x) \right] e^{-ikx} = 1, \quad (\text{A.76})$$

in accordo d'altra parte con la definizione della delta di Dirac.

### Esempio A.3

Come prima applicazione della delta di Dirac si consideri un pacchetto di onde piane,

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk' A(k') e^{i(k'x - \omega t)}, \quad (\text{A.77})$$

e si supponga che  $A(k)$  abbia una delle forme indicate in (A.21) oppure (A.26). Nel limite in cui  $K \rightarrow \infty$  (eq. (A.24)) oppure  $a \rightarrow \infty$  (eq. (A.29)), il corrispondente pacchetto di onde (A.77) diventa, in virtù della (A.4), un'onda piana con  $k' = k$  corrispondente al valore centrale della delta di Dirac:

$$\begin{aligned} A(k') &\rightarrow \delta(k - k'), \\ \Psi(x, t) &\rightarrow e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

L'onda piana dunque, che pure non appartiene a  $\mathcal{L}^2$ , si può considerare come limite di un pacchetto di onde ( $\in \mathcal{L}^2$ ) quando i coefficienti di Fourier  $A(k')$  convergono a una delta di Dirac, quando cioè in termini fisici i contributi delle varie onde piane nel pacchetto sono dominati da quello di una singola onda. Questo aspetto dell'onda piana, unito alla proprietà di locale integrabilità (III.3.32), permette di usarla anche in luogo del pacchetto di onde, pur di sottintendere un processo di limite del tipo (A.78).

Esempio A.4

Si considerino due funzioni  $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  e il loro prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x)g(x). \quad (\text{A.79})$$

Vale la proprietà

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x)g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k). \quad (\text{A.80})$$

Anche se si può dimostrare la (A.80) con metodi elementari, può essere utile farlo ricorrendo alle proprietà della delta di Dirac. Per definizione di trasformata di Fourier, (A.62), si ha

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}^*(k)\tilde{g}(k) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x) e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' g(x') e^{-ikx'} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f^*(x)g(x') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x-x')}. \end{aligned}$$

La (A.80) è dunque dimostrata se si tiene conto della rappresentazione di Fourier (A.25) e della proprietà (A.4) della delta di Dirac.

Il risultato (A.80) è interessante per il formalismo della meccanica quantistica, in quanto nella teoria il prodotto scalare risulta in generale legato ai valori di aspettazione degli operatori quantistici; la (A.80) indica la possibilità di descrivere lo stesso prodotto scalare secondo rappresentazioni diverse, per esempio nello spazio diretto delle posizioni o nello spazio reciproco delle trasformate di Fourier, che, per il legame  $p = \hbar k$ , è lo spazio degli impulsi.



## B. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE DEL SECONDO ORDINE

In questa appendice sono richiamati alcuni risultati generali della teoria delle equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine, di interesse per la risoluzione dell'equazione di Schrödinger <sup>1</sup>. Un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine si può porre nella forma

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + p(z) \frac{du}{dz} + q(z)u(z) = 0, \quad (\text{B.1})$$

dove la funzione  $u(z)$ , integrale della (B.1), è una funzione (in generale a valori complessi) della variabile complessa  $z$  nel dominio  $S$  e le funzioni  $p(z)$  e  $q(z)$  sono funzioni analitiche in  $S$ , con eccezione al più di un numero finito di punti isolati.

Tutti i punti di  $S$  in cui  $p(z)$  e  $q(z)$  sono analitiche vengono detti *punti regolari*. L'integrale della (B.1) in un punto regolare è una funzione analitica. Ogni altro punto di  $S$  che non sia regolare viene detto *punto singolare*. Si dimostra che i soli punti singolari possibili al finito per l'integrale  $u(z)$  sono quelli individuati dalle singolarità di  $p(z)$  e  $q(z)$ . È opportuno distinguere, tra le possibili singolarità di  $p(z)$  e  $q(z)$ , quelle denominate *singolarità fuchsiane* (o inessenziali) <sup>2</sup>, caratterizzate dal fatto che in tali punti  $p(z)$  presenta al più un polo del primo ordine e  $q(z)$  al più un polo del secondo ordine. Pertanto, se  $z_0$  è un punto di singolarità fuchsiana per la (B.1), in un intorno di  $z_0$  deve essere

$$p(z) = \frac{P(z)}{z - z_0}, \quad q(z) = \frac{Q(z)}{(z - z_0)^2}, \quad (\text{B.2})$$

---

<sup>1</sup> Dimostrazioni di teoremi enunciati e ulteriori dettagli si possono trovare in testi classici, quali ad esempio quelli di Francesco Giacomo Tricomi (*Equazioni differenziali*, Einaudi, Torino, 1953) e di Edmund Taylor Whittaker (1873–1956) e George Neville Watson (1886–1965) (*A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, 4. ed., 1927).

<sup>2</sup> Il nome deriva da quello del matematico Immanuel Lazarus Fuchs (1833–1902).

dove  $P(z)$  e  $Q(z)$  sono funzioni analitiche in  $z_0$ .

Ogni altro punto di singolarità che non soddisfi le condizioni (B.2) è detto punto di *singolarità essenziale*.

Se il dominio comprende il punto all'infinito, è utile eseguire la trasformazione di variabile

$$z = \frac{1}{z'} \quad (\text{B.3})$$

e studiare il comportamento per  $z' = 0$ . Con la trasformazione (B.3), l'equazione (B.1) diventa

$$z'^4 \frac{d^2 u}{dz'^2} + \left[ 2z'^3 - z'^2 p\left(\frac{1}{z'}\right) \right] \frac{du}{dz'} + q\left(\frac{1}{z'}\right) u = 0. \quad (\text{B.4})$$

Allora la condizione perché il punto all'infinito sia regolare è che  $2z - z^2 p(z)$  e  $z^4 q(z)$  siano analitiche all'infinito; si ha una singolarità fuchsiana se  $z p(z)$  e  $z^2 q(z)$  sono analitiche all'infinito oppure se  $p(z)$  vi ha uno zero del primo ordine e  $q(z)$  uno zero del secondo ordine.

### B.1. Soluzione nell'intorno di un punto regolare

Nell'intorno di un punto regolare,  $z = c$ , esiste ed è unica la soluzione analitica della (B.1) che per  $z = c$  assume il valore  $u(c) = a_0$ , con  $(du/dz)|_c = a_1$ , dove  $a_0$  e  $a_1$  sono due costanti arbitrarie.

Questa soluzione può essere cercata sotto forma di sviluppo in serie di potenze:

$$u(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (z - c)^r. \quad (\text{B.5})$$

Dato che  $z = c$  è un punto regolare, anche  $p(z)$  e  $q(z)$  possono essere sviluppate in serie di potenze nell'intorno di  $c$ :

$$p(z) = \sum_{s=0}^{\infty} p_s (z - c)^s, \quad q(z) = \sum_{s=0}^{\infty} q_s (z - c)^s. \quad (\text{B.6})$$

Sostituendo gli sviluppi (B.5) e (B.6) nella (B.1) si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{r=2}^{\infty} r(r-1) a_r (z-c)^{r-2} + \sum_{s=0}^{\infty} p_s (z-c)^s \sum_{r=1}^{\infty} r a_r (z-c)^{r-1} \\ + \sum_{s=0}^{\infty} q_s (z-c)^s \sum_{r=0}^{\infty} a_r (z-c)^r = 0. \end{aligned}$$

Eseguendo i prodotti tra serie e raccogliendo i termini di uguale potenza, si ha



$$\sum_{r=0}^{\infty} \left\{ (r+2)(r+1)a_{r+2} + \sum_{k=0}^r \left[ p_k(r+1-k)a_{r+1-k} + q_k a_{r-k} \right] \right\} (z-c)^r = 0.$$

Si può pertanto uguagliare a zero i coefficienti delle varie potenze,

$$(r+2)(r+1)a_{r+2} + \sum_{k=0}^r \left[ p_k(r+1-k)a_{r+1-k} + q_k a_{r-k} \right] = 0, \quad (\text{B.7})$$

stabilendo una relazione di ricorrenza che permette di determinare il coefficiente  $a_{r+2}$  a partire da  $a_0, a_1, \dots, a_{r+1}$ . In tal modo, noti  $a_0$  e  $a_1$ , si possono determinare tutti i coefficienti  $a_r$  della serie (B.5).

Dato che la relazione di ricorrenza (B.7) è lineare, le due soluzioni  $u_1(z)$  e  $u_2(z)$ , ottenute rispettivamente ponendo  $a_0 = 1, a_1 = 0$  e  $a_0 = 0, a_1 = 1$ , sono tra di loro linearmente indipendenti. Esse costituiscono un *sistema fondamentale di integrali* della (B.1). La soluzione generale della (B.1) può ottenersi nella forma

$$u(z) = c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z), \quad (\text{B.8})$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono costanti arbitrarie.

Prolungando analiticamente la soluzione (B.8), si può trovare la soluzione della (B.1) per ogni altro punto regolare che appartiene all'intersezione dei domini di analiticità delle funzioni  $p(z)$  e  $q(z)$ . Tale soluzione è dunque analitica, con un raggio di convergenza della serie (B.5) non inferiore alla distanza di  $c$  dal più vicino punto singolare di  $p(z)$  o di  $q(z)$ .

### B.2. Eventuale polidromia degli integrali

La presenza di punti di singolarità in  $S$  impedisce di prolungare analiticamente, con risultato univoco in tutto  $S$ , la soluzione  $u(z)$  trovata nell'intorno del punto regolare  $z = c$ . In presenza di singolarità, il prolungamento analitico può fornire risultati diversi a seconda del cammino percorso da  $c$  fino al generico punto  $z$ ; si dice in tal caso che la funzione ottenuta è *polidroma* e la singolarità costituisce un punto di *diramazione* della funzione.

Le eventuali polidromie degli integrali di un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine sono però di natura semplice. Si supponga di conoscere il sistema fondamentale  $u_1(z)$  e  $u_2(z)$  di integrali della (B.1) nell'intorno del punto singolare  $z = z_0$  e siano  $U_1(z)$  e  $U_2(z)$  il risultato del prolungamento analitico di  $u_1(z)$  e  $u_2(z)$  lungo un qualsiasi cammino chiuso che aggiri il punto  $z_0$ . Deve essere

$$\begin{aligned} U_1(z) &= a u_1(z) + b u_2(z), \\ U_2(z) &= c u_1(z) + d u_2(z), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

con

$$ad - bc \neq 0. \quad (\text{B.10})$$

Si dice *invariantivo* un integrale della (B.1) che si alteri soltanto per un fattore moltiplicativo  $\lambda$  rispetto a un qualunque cammino chiuso che aggiri  $z_0$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché un certo integrale della (B.1) sia invariantivo è che sia

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Infatti, per la lineare indipendenza di  $u_1(z)$  e  $u_2(z)$  e di  $U_1(z)$  e  $U_2(z)$ , un integrale del tipo (B.8),

$$u(z) = c_1 u_1(z) + c_2 u_2(z),$$

si trasforma nell'integrale

$$U(z) = c_1 U_1(z) + c_2 U_2(z),$$

che per ipotesi deve essere invariantivo, cioè

$$U(z) = \lambda u(z).$$

Per le (B.9) ciò si traduce nel sistema di equazioni algebriche lineari omogenee,

$$\begin{cases} (a - \lambda)c_1 + c c_2 = 0, \\ b c_1 + (d - \lambda)c_2 = 0, \end{cases}$$

per la cui soluzione deve valere la (B.11). Per ciascuna delle due soluzioni non nulle della (B.11),  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , si ottiene una coppia di valori  $c_1$  e  $c_2$  che conducono ai due integrali invariantivi della (B.1).

Si suppongano  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  radici distinte della (B.11). La funzione

$$(z - z_0)^r = \rho^r e^{ir\theta}$$

è una funzione polidroma per  $r$  non intero, che si moltiplica per  $e^{2\pi ir}$  girando intorno a  $z_0$ , cioè si moltiplica anch'essa per  $\lambda$  se  $r$  è scelto in modo che sia

$$e^{2\pi ir} = \lambda.$$

Allora due integrali particolari della (B.1), linearmente indipendenti e invariantivi nell'intorno del punto  $z_0$ , sono rappresentabili con formule del tipo

$$\begin{aligned} u_1(z) &= (z - z_0)^{r_1} \phi_1(z), \\ u_2(z) &= (z - z_0)^{r_2} \phi_2(z), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

dove

$$r_1 = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda_1, \quad r_2 = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda_2 \quad (\text{B.13})$$

e  $\phi_1(z), \phi_2(z)$  sono funzioni analitiche nell'intorno di  $z_0$ .

Qualora le due radici della (B.11) coincidessero, lo stesso procedimento permette di determinare solo uno degli integrali invariantivi, che viene moltiplicato per  $\lambda = \lambda_1 (= \lambda_2)$ . Il secondo si trova tenendo presente che deve essere

$$\begin{aligned} U_1 &= \lambda u_1, \\ U_2 &= c u_1 + d u_2; \end{aligned}$$

inoltre per la (B.11) è  $d = \lambda_1$ . Pertanto

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{u_2}{u_1} + \frac{c}{\lambda_1},$$

cioè il rapporto  $u_2/u_1$  si altera per la costante aggiuntiva  $c/\lambda_1$  nel prolungamento analitico lungo il cammino che aggira  $z_0$ . Questa situazione è simile a quella della funzione  $A \log(z - z_0)$  e quindi la funzione

$$v(z) = \frac{u_2}{u_1} - A \log(z - z_0)$$

non si altera per una rotazione intorno a  $z_0$ . Perciò quando la (B.11) ammette una radice doppia, il sistema fondamentale della (B.1) è costituito dalle funzioni

$$\begin{aligned} u_1(z) &= (z - z_0)^{r_1} \phi_1(z), \\ u_2(z) &= u_1(z)[A \log(z - z_0) + v(z)]. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

In ogni caso, dunque, l'eventuale polidromia degli integrali della (B.1) si può confinare in fattori esplicitamente determinabili. Le funzioni  $\phi_1(z), \phi_2(z)$  e  $v(z)$  inoltre, pur potendo presentare una singolarità in  $z_0$ , sono rappresentabili nell'intorno di  $z_0$  mediante sviluppo in serie, in quanto funzioni analitiche.

### *B.3. Soluzione nell'intorno di un punto di singolarità fuchsiana*

Il fatto che il punto  $z = z_0$  sia un punto di singolarità fuchsiana per l'equazione (B.1) è *condizione necessaria e sufficiente* affinché esista un sistema fondamentale di integrali  $u_1(z)$  e  $u_2(z)$  rappresentabili nell'intorno di  $z_0$  mediante formule del tipo (B.12) e (B.14), in cui  $\phi_1(z), \phi_2(z)$  e  $v(z)$  sono funzioni analitiche dotate al più di un polo in  $z_0$ .

Con questo teorema viene esclusa la possibilità di una singolarità essenziale in  $z_0$  per le funzioni  $\phi_1(z), \phi_2(z)$  e  $v(z)$ . Inoltre si ha un criterio per cercare l'integrale della (B.1) nell'intorno di  $z_0$ . Basta infatti adottare per  $u(z)$  lo sviluppo in serie

$$u(z) = (z - z_0)^\alpha \sum_{r=0}^{\infty} a_r (z - z_0)^r. \quad (\text{B.15})$$

Tenendo presenti le (B.2) e il corrispondente sviluppo in serie per le funzioni  $P(z)$  e  $Q(z)$ ,

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} p_s (z - z_0)^s, \\ Q(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} q_s (z - z_0)^s, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

la sostituzione dello sviluppo (B.15) nella (B.1) fornisce

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha + r)(\alpha + r - 1) a_r (z - z_0)^r + \sum_{s=0}^{\infty} p_s (z - z_0)^s \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha + r) a_r (z - z_0)^r \\ + \sum_{s=0}^{\infty} q_s (z - z_0)^s \sum_{r=0}^{\infty} a_r (z - z_0)^r = 0. \end{aligned}$$

Eseguendo i prodotti tra serie e raccogliendo i termini di uguale potenza, si ottiene

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left\{ (\alpha + r)(\alpha + r - 1) a_r + \sum_{k=0}^r [(\alpha + k) p_{r-k} + q_{r-k}] a_k \right\} (z - z_0)^r = 0.$$

Si può pertanto uguagliare a zero separatamente i coefficienti delle varie potenze. In particolare per  $r = 0$  si ottiene

$$[\alpha(\alpha - 1) + \alpha p_0 + q_0] a_0 = 0,$$

cioè, essendo  $a_0 \neq 0$ ,

$$\alpha^2 - \alpha(1 - p_0) + q_0 = 0, \quad (\text{B.17})$$

che è l'*equazione determinante*, di secondo grado nell'esponente  $\alpha$ . In corrispondenza delle due radici della (B.17) si possono determinare tutti i coefficienti  $a_r$  della (B.15) dalla relazione di ricorrenza

$$\begin{aligned} [(\alpha + r)(\alpha + r - 1) + (\alpha + r)p_0 + q_0] a_r \\ + \sum_{k=0}^{r-1} [(\alpha + k)p_{r-k} + q_{r-k}] a_k = 0, \quad r \neq 0, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

*Equazioni totalmente fuchsiane*

che si ottiene azzerando i coefficienti delle successive potenze di  $(z - z_0)$ . Le due soluzioni, ricavate in corrispondenza delle due radici  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  della (B.17), sono linearmente indipendenti.

Eccezionalmente può verificarsi che le due radici o coincidano o differiscano per un intero, cioè che sia  $\alpha_1 = \alpha_2 + p$  con  $p = 0, 1, 2, \dots$ . In tal caso, una volta costruita la soluzione di tipo (B.15) per  $\alpha = \alpha_1$ , nella (B.18) con  $\alpha = \alpha_2$  viene ad annullarsi il coefficiente  $a_p$  per  $r = p$  e l'equazione diventa impossibile. Si ricorre allora al secondo integrale del sistema fondamentale (B.14).

Il fatto che  $z_0$  sia un punto di singolarità fuchsiana permette di ottenere subito l'equazione determinante (B.17) e di costruire esplicitamente le soluzioni (B.12) o (B.14), mentre in generale per una singolarità essenziale può non essere facile determinare i coefficienti che intervengono nella (B.11).

*B.4. Equazioni totalmente fuchsiane*

Le equazioni del tipo (B.1) con soli punti singolari isolati di tipo fuchsiano sono dette equazioni *totalmente fuchsiane*.

Indicando con  $z_1, z_2, \dots, z_n$  gli  $n$  punti di singolarità fuchsiana al finito e posto

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n), \quad (\text{B.19})$$

i coefficienti  $p(z)$  e  $q(z)$  della (B.1) devono essere funzioni della forma

$$p(z) = \frac{Q_{n-1}(z)}{P_n(z)}, \quad q(z) = \frac{R_{2n-2}(z)}{P_n^2(z)}, \quad (\text{B.20})$$

dove per rispettare le (B.2)  $Q_{n-1}(z)$  e  $R_{2n-2}(z)$  sono polinomi qualsiasi di grado uguale ai rispettivi indici ( $n \geq 1$ ).

*Esempio B.1*

Si consideri ad esempio l'equazione

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{h}{z - z_0} \frac{du}{dz} + \frac{k}{(z - z_0)^2} u(z) = 0, \quad (\text{B.21})$$

per cui dunque è

$$p(z) = \frac{h}{z - z_0}, \quad q(z) = \frac{k}{(z - z_0)^2}. \quad (\text{B.22})$$

Il punto  $z = z_0$  è un punto di singolarità fuchsiana in virtù della (B.2) e in accordo con la (B.20). La corrispondente equazione determinante (B.17) diventa

$$\alpha^2 - \alpha(1 - h) + k = 0, \quad (\text{B.23})$$

la cui soluzione permette di scrivere l'integrale generale della (B.21) nella forma

$$u(z) = c_1(z - z_0)^{\alpha_1} + c_2(z - z_0)^{\alpha_2}. \quad (\text{B.24})$$

Questo integrale è regolare o no in  $z = z_0$  a seconda dei valori assunti dalle costanti  $h$  e  $k$ . Infatti  $u(z)$  è regolare per  $h = -2, k = 2$  (da cui  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ ), è singolare per  $h = 4, k = 2$  (da cui  $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2$ ), mentre  $c_1(z - z_0)^{\alpha_1}$  è regolare, ma non  $c_2(z - z_0)^{\alpha_2}$ , per  $h = 1, k = -1$  (da cui  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ ). Ciò conferma che in un punto di singolarità dei coefficienti  $p(z)$  e  $q(z)$  dell'equazione (B.1) si possono, ma non necessariamente si devono, localizzare le singolarità dell'integrale della (B.1).

Anche il punto all'infinito della (B.21) è un punto di singolarità fuchsiana, come si può verificare con la trasformazione (B.3). La (B.21) è la più generale equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine con *due* singolarità fuchsiane (una al finito in  $z = z_0$  e una all'infinito).

La condizione (B.20) garantisce anche che  $p(z)$  sia uno zero del primo ordine e  $q(z)$  uno zero del secondo ordine quando  $z \rightarrow \infty$ ; perciò le (B.20) includono anche il punto all'infinito tra le singolarità fuchsiane e l'equazione (B.1) con le (B.20) diventa un'equazione *totalmente fuchsiana* con  $n + 1$  punti di singolarità fuchsiana (uno all'infinito e  $n$  al finito in  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ).

Si dimostra che per un'equazione *totalmente fuchsiana* con  $n + 1$  punti di singolarità fuchsiana *la somma delle radici di tutte le equazioni determinanti* (B.17) è uguale a  $n - 1$ .

Dalla (B.17) segue che la somma delle due radici vale 1 meno il residuo  $p_0$  di  $p(z)$  nel punto di singolarità  $z_0$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - p_0$ ) e il loro prodotto vale  $\alpha_1 \alpha_2 = q_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 q(z)$ . Si possono allora riscrivere le (B.20) in termini delle radici di tutte le equazioni determinanti dei punti di singolarità al finito. Per il punto all'infinito occorre ricordare che  $p(z)$  deve essere uno zero del primo ordine e  $q(z)$  uno zero del secondo ordine.

Da queste considerazioni segue che la più generale equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine con *cinque* singolarità fuchsiane, di cui quattro al finito e una all'infinito, può scriversi nella forma

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \sum_{r=1}^4 \frac{1 - \alpha_1^{(r)} - \alpha_2^{(r)}}{z - z_r} \frac{du}{dz} + \left\{ \sum_{r=1}^4 \frac{\alpha_1^{(r)} \alpha_2^{(r)}}{(z - z_r)^2} + \frac{Az^2 + Bz + C}{\prod_{r=1}^4 (z - z_r)} \right\} u(z) = 0, \quad (\text{B.25})$$

dove  $\alpha_1^{(r)}$  e  $\alpha_2^{(r)}$  sono le due radici relative al punto di singolarità al finito  $z_r$  e  $A$  è fissato dall'equazione

$$\mu^2 + \mu \left\{ \sum_{r=1}^4 \left[ \alpha_1^{(r)} + \alpha_2^{(r)} \right] - 3 \right\} + \sum_{r=1}^4 \alpha_1^{(r)} \alpha_2^{(r)} + A = 0, \quad (\text{B.26})$$

che rappresenta l'equazione determinante per il punto all'infinito con radici  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Deve essere inoltre ( $n - 1 = 3$ )

$$\sum_{r=1}^4 \left[ \alpha_1^{(r)} + \alpha_2^{(r)} \right] + \mu_1 + \mu_2 = 3. \quad (\text{B.27})$$

Le costanti  $B$  e  $C$  in (B.25) sono due costanti arbitrarie.

Si presenta a volte il caso che un'equazione differenziale derivi da un'altra quando si facciano coincidere due o più singolarità di quest'ultima. In tal caso si dice che è avvenuta una *confluenza* e l'equazione in esame è la forma *confluente* dell'altra.

Molte equazioni differenziali di interesse per le applicazioni di meccanica quantistica sono forme confluenti della (B.25), con le radici dell'equazione determinante (B.17) per ciascuna singolarità che differiscono tra di loro di  $\frac{1}{2}$ :

$$\alpha_2^{(r)} = \alpha_1^{(r)} + \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \mu_1 + \frac{1}{2}.$$

Perciò la (B.25) diventa l'*equazione generalizzata di Lamé*<sup>3</sup>:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \sum_{r=1}^4 \frac{\frac{1}{2} - 2\alpha_1^{(r)}}{z - z_r} \frac{du}{dz} + \left\{ \sum_{r=1}^4 \frac{\alpha_1^{(r)}(\alpha_1^{(r)} + \frac{1}{2})}{(z - z_r)^2} + \frac{Az^2 + Bz + C}{\prod_{r=1}^4 (z - z_r)} \right\} u(z) = 0. \quad (\text{B.28})$$

Quando due punti di singolarità confluiscono, per esempio  $z_1 = z_2$ , la singolarità risultante è tale che le radici dell'equazione determinante corrispondente soddisfano le relazioni

$$1 - p_0 = 2(\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(2)}),$$

$$q_0 = \alpha_1^{(1)}(\alpha_1^{(1)} + \frac{1}{2}) + \alpha_1^{(2)}(\alpha_1^{(2)} + \frac{1}{2}) + \frac{Az_1^2 + Bz_1 + C}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)},$$

cioè la differenza  $\alpha_1 - \alpha_2$  tra le radici non è più in generale pari a  $\frac{1}{2}$ , ma assume qualunque valore in dipendenza dalle costanti arbitrarie  $B$  e  $C$ . Inoltre, combinando 3 o più singolarità fuchsiane, si possono ottenere singolarità essenziali. Pertanto dall'equazione (B.28) mediante confluenza si possono ottenere sei tipi di equazioni, con  $s_1$  singolarità fuchsiane con radici che differiscono di  $\frac{1}{2}$ ,  $s_2$  singolarità fuchsiane con radici diverse e  $s_3$  singolarità essenziali, secondo lo schema seguente.

| $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | nome     |
|-------|-------|-------|----------|
| 3     | 1     | 0     | Lamé     |
| 2     | 0     | 1     | Mathieu  |
| 1     | 2     | 0     | Legendre |
| 0     | 1     | 1     | Bessel   |
| 1     | 0     | 1     | Weber    |
| 0     | 0     | 1     | Stokes   |

<sup>3</sup> Gabriel Lamé (1795–1870).

Per l'equazione di Lamé la confluenza avviene per  $z_4 \rightarrow \infty$  con il punto all'infinito che resta una singolarità fuchsiana, sia pure con radici diverse; per l'equazione di Mathieu <sup>4</sup>,  $z_3 = z_4 \rightarrow \infty$  e il punto all'infinito diventa una singolarità essenziale; per l'equazione di Legendre <sup>5</sup>,  $z_1 = z_2 = 1$  e  $z_3 = z_4 = 0$  sono singolarità fuchsiane con radici diverse; per l'equazione di Bessel <sup>6</sup>,  $z_1 = z_2 = 0$ ,  $z_3 = z_4 \rightarrow \infty$  e quindi il punto all'infinito diventa una singolarità essenziale; per l'equazione di Weber <sup>7</sup>,  $z_1 = 0$  e le altre singolarità confluiscono all'infinito, che così risulta una singolarità essenziale; l'equazione di Stokes <sup>8</sup> ha un'unica singolarità essenziale nel punto all'infinito, nel quale sono confluite tutte le singolarità.

### B.5. Equazioni con tre singolarità fuchsiane

L'equazione di Legendre citata al paragrafo precedente è un caso particolare di equazione totalmente fuchsiana con tre punti di singolarità. La più generale equazione totalmente fuchsiana con tre punti di singolarità, di cui uno all'infinito, può scriversi nella forma

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{h_1 z + h_0}{(z - z_1)(z - z_2)} \frac{du}{dz} + \frac{k_2 z^2 + k_1 z + k_0}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} u(z) = 0, \quad (\text{B.29})$$

che deriva dalle (B.20) con  $n = 2$ . Pertanto le corrispondenti radici delle equazioni determinanti (B.17) ( $\alpha_1, \alpha_2$  per  $z_1$ ,  $\beta_1, \beta_2$  per  $z_2$  e  $\mu_1, \mu_2$  per  $z \rightarrow \infty$ ) soddisfano la relazione

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \mu_1 + \mu_2 = 1. \quad (\text{B.30})$$

Siccome i coefficienti  $h_0, h_1$  e  $k_0, k_1, k_2$  sono determinati se si conoscono le radici delle equazioni determinanti, si può caratterizzare completamente l'equazione mediante il simbolo

$$P \left( \begin{array}{ccc|c} z_1 & z_2 & \infty & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \mu_1; & z \\ \alpha_2 & \beta_2 & \mu_2 & \end{array} \right), \quad (\text{B.31})$$

introdotto da Riemann <sup>9</sup>.

Se i tre punti di singolarità sono tutti al finito, la forma più generale è la seguente

<sup>4</sup> Émile Léonard Mathieu (1835–1890).

<sup>5</sup> Adrien-Marie Legendre (1752–1833).

<sup>6</sup> Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846).

<sup>7</sup> Wilhelm Eduard Weber (1804–1891).

<sup>8</sup> George Gabriel Stokes (1819–1903).

<sup>9</sup> Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).



$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2z^2 + h_1z + h_0}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)} \frac{du}{dz} + \frac{k_2z^2 + k_1z + k_0}{(z - z_1)^2(z - z_2)^2(z - z_3)^2} u(z) = 0, \quad (\text{B.32})$$

in accordo con le (B.20) e col fatto che ora il punto all'infinito deve essere un punto regolare.

È notevole il fatto che la trasformazione di variabile

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (\text{B.33})$$

con  $ad - bc \neq 0$ , non modifica la natura delle (B.29) e (B.32): solamente ne sposta i punti di singolarità senza alterarne le radici. Con una scelta opportuna dei coefficienti  $a, b, c, d$  si passa dalla (B.29) alla (B.32) e viceversa, conservando la (B.30). È allora sempre possibile ricondursi al caso in cui i punti singolari sono situati in  $z_1 = 0, z_2 = 1$  e nel punto all'infinito. Per la (B.29) ciò si realizza con la trasformazione

$$z' = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad (\text{B.34})$$

mentre per la (B.32) occorre la trasformazione

$$z' = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}. \quad (\text{B.35})$$

Un'altra notevole proprietà è l'invarianza della posizione dei punti singolari della (B.29) rispetto alla sostituzione di funzione incognita del tipo

$$u(z) = (z - z_1)^\rho (z - z_2)^\sigma f(z). \quad (\text{B.36})$$

Così pure per la (B.32) la sostituzione

$$u(z) = \left( \frac{z - z_1}{z - z_3} \right)^\rho \left( \frac{z - z_2}{z - z_3} \right)^\sigma f(z) \quad (\text{B.37})$$

non altera la posizione delle singolarità. Però le sostituzioni (B.36) e (B.37) modificano le radici ( $i = 1, 2$ ),

$$\alpha_i \rightarrow \alpha_i - \rho, \quad \beta_i \rightarrow \beta_i - \sigma, \quad \mu_i \rightarrow \mu_i + \rho + \sigma, \quad (\text{B.38})$$

pur conservando la (B.30). Perciò con trasformazioni di tipo (B.36) o (B.37) ci si può sempre ricondurre al caso

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0. \quad (\text{B.39})$$

L'uso combinato delle (B.34) o (B.35) con (B.36) o (B.37), permette dunque di ridurre sempre l'equazione totalmente fuchsiana con tre singolarità alla forma

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{du}{dz} - abu(z) = 0, \quad (\text{B.40})$$

che è la cosiddetta *equazione ipergeometrica*, i cui punti singolari sono 0, 1,  $\infty$ , con radici, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1 - c, & \quad \text{per } z = 0, \\ \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = c - a - b, & \quad \text{per } z = 1, \\ \mu_1 = a, \quad \mu_2 = b, & \quad \text{per } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

In termini di simbolo di Riemann si ha

$$P \left( \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a; \\ 1 - c & c - a - b & b \end{array} z \right), \quad (\text{B.42})$$

Le soluzioni dell'equazione ipergeometrica (B.40) nell'intorno di ogni punto di singolarità si possono sviluppare in serie di potenze nella forma (B.15), con esclusione dei casi di  $c$  intero,  $c - a - b$  intero e  $a - b$  intero, in cui possono presentarsi dei termini logaritmici come nella (B.14). Queste soluzioni sono tutte esprimibili mediante la serie

$$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+r-1)b(b+1)\dots(b+r-1)}{c(c+1)\dots(c+r-1)} \frac{z^r}{r!}, \quad (\text{B.43})$$

che è detta *serie ipergeometrica*. Nel caso particolarissimo  $a = 1, b = c$  la serie (B.43) si riduce alla serie geometrica  $\sum_n z^n$ , donde il suo nome. Se  $a = -p$  oppure  $b = -p$ , essa si riduce a un polinomio di grado  $p$ . Se  $b = c$ , si ha

$$F(a, b; b; z) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{-a}{r} (-z)^r = (1-z)^{-a}. \quad (\text{B.44})$$

Inoltre

$$F(1, 1; 2; z) = -\frac{1}{z} \log(1-z). \quad (\text{B.45})$$

Dunque, la soluzione della (B.40) nell'intorno del punto  $z = 0$  corrispondente alla radice  $\alpha_1 = 0$  si ottiene riconoscendo che la relazione di ricorrenza (B.18) non è altro che la relazione di ricorrenza per i coefficienti della serie ipergeometrica (B.43). Invece per l'altra soluzione della (B.40) nell'intorno del punto  $z = 0$  corrispondente alla radice  $\alpha_1 = 1 - c$ , la (B.18) definisce la serie ipergeometrica con i parametri  $a \rightarrow a - c + 1, b \rightarrow b - c + 1, c \rightarrow 2 - c$ . Pertanto le soluzioni della (B.40) risultano

$$\begin{aligned} u_1^{(0)}(z) &= F(a, b; c; z), \\ u_2^{(0)}(z) &= z^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z). \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Nell'intorno del punto  $z = 1$  si può procedere allo stesso modo con la sostituzione  $z' = 1 - z$ , riconducendosi alla soluzione per  $z = 0$ . Si ottiene così

$$\begin{aligned} u_1^{(1)}(z) &= F(a, b; 1 + a + b - c; 1 - z), \\ u_2^{(1)}(z) &= (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; 1 + c - a - b; 1 - z). \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Similmente, con la sostituzione  $z' = 1/z$  si trovano le soluzioni nell'intorno del punto all'infinito:

$$\begin{aligned} u_1^{(\infty)}(z) &= \left(\frac{1}{z}\right)^a F\left(a, 1 + a - c; 1 + a - b; \frac{1}{z}\right), \\ u_2^{(\infty)}(z) &= \left(\frac{1}{z}\right)^b F\left(b, 1 + b - c; 1 + b - a; \frac{1}{z}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

La serie ipergeometrica (B.43) ha raggio di convergenza unitario; ciò comporta il prolungamento analitico di ciascuna soluzione per connetterla alle altre. Le sei soluzioni (B.46) – (B.48) non sono perciò tra di loro indipendenti: ciascuna di esse può essere espressa come combinazione lineare di due qualsiasi delle altre. Per esempio,  $u_1^{(0)}(z)$  e  $u_2^{(0)}(z)$  si possono prolungare analiticamente e pensare come integrali particolari deducibili da quello generale nell'intorno di  $z = 1$ , cioè

$$\begin{aligned} u_1^{(0)}(z) &= A_1^{(1)} u_1^{(1)}(z) + A_2^{(1)} u_2^{(1)}(z), \\ u_2^{(0)}(z) &= B_1^{(1)} u_1^{(1)}(z) + B_2^{(1)} u_2^{(1)}(z). \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Si dimostra che i coefficienti sono dati dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= \frac{\Gamma(c - a - b)\Gamma(c)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}, \\ A_2^{(1)} &= \frac{\Gamma(a + b - c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \\ B_1^{(1)} &= \frac{\Gamma(c - a - b)\Gamma(2 - c)}{\Gamma(1 - a)\Gamma(1 - b)}, \\ B_2^{(1)} &= \frac{\Gamma(a + b - c)\Gamma(2 - c)}{\Gamma(a + 1 - c)\Gamma(b + 1 - c)}, \end{aligned}$$

dove  $\Gamma(z)$  è la funzione speciale *gamma*<sup>10</sup>. Essa generalizza il fattoriale al caso di argomento non intero,

<sup>10</sup> Per una rassegna delle funzioni speciali e delle loro proprietà, si veda il testo di Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger e Raj Pal Soni: *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer, Berlino, 1966.

$$\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z), \quad (\text{B.50})$$

con i casi particolari

$$\Gamma(1) = 1, \quad (\text{B.51})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (\text{B.52})$$

Similmente, si può porre

$$\begin{aligned} u_1^{(0)}(z) &= A_1^{(\infty)} u_1^{(\infty)}(z) + A_2^{(\infty)} u_2^{(\infty)}(z), \\ u_2^{(0)}(z) &= B_1^{(\infty)} u_1^{(\infty)}(z) + B_2^{(\infty)} u_2^{(\infty)}(z), \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

con i seguenti coefficienti:

$$\begin{aligned} A_1^{(\infty)} &= \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} e^{i\pi a}, \\ A_2^{(\infty)} &= \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} e^{i\pi b}, \\ B_1^{(\infty)} &= \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+b-c)} e^{i\pi(1+a-c)}, \\ B_2^{(\infty)} &= \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-b)\Gamma(1+a-c)} e^{i\pi(1+b-c)}. \end{aligned}$$

### B.6. Funzione ipergeometrica confluyente

Quando in un'equazione totalmente fuchsiana con tre singolarità due punti di singolarità confluiscono nel punto all'infinito, si dà origine a una singolarità essenziale all'infinito. Se l'altra singolarità è in  $z = 0$ , la più generale equazione di questo tipo ha la forma

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{h_1 z + h_0}{z} \frac{du}{dz} + \frac{k_2 z^2 + k_1 z + k_0}{z^2} u(z) = 0, \quad (\text{B.54})$$

che effettivamente per  $z = 0$  presenta una singolarità fuchsiana, mentre per  $z \rightarrow \infty$  i coefficienti  $p(z)$  e  $q(z)$  non presentano lo zero del primo e del secondo ordine richiesti da un'eventuale singolarità fuchsiana. Conviene operare la seguente sostituzione di funzione

$$u(z) = z^\alpha e^{\beta z} \phi(z), \quad (\text{B.55})$$

con  $\alpha$  che soddisfa l'equazione determinante per  $z = 0$ :

Funzione ipergeometrica confluyente

$$\alpha^2 - \alpha(1 - h_0) + k_0 = 0. \quad (\text{B.56})$$

Nella (B.55)  $\beta$  risulta dall'equazione caratteristica che si ottiene sostituendo la (B.55) nella (B.54) e imponendo  $z \rightarrow \infty$ :

$$\beta^2 + h_1\beta + k_2 = 0. \quad (\text{B.57})$$

Con l'ulteriore cambiamento di variabile

$$z' = -(h_1 + 2\beta)z, \quad (\text{B.58})$$

l'equazione (B.54) si riconduce a un'equazione per la  $\phi(z')$ . Questa equazione ha la struttura

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (c - z) \frac{du}{dz} - au(z) = 0 \quad (\text{B.59})$$

e viene chiamata equazione *ipergeometrica confluyente*. Essa è una delle più importanti dell'analisi matematica, perché abbraccia una classe contenente moltissime funzioni speciali di interesse nella fisica matematica.

In  $z = 0$  essa ammette due radici dell'equazione determinante pari a 0 e a  $1 - c$ . Perciò, se  $c$  non è intero, esistono due soluzioni della (B.59) linearmente indipendenti, della forma

$$\begin{aligned} u_1(z) &= F(a, c; z), \\ u_2(z) &= z^{1-c} F(a - c + 1, 2 - c; z), \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

dove la *funzione ipergeometrica confluyente*  $F(a, c; z)$  è data dallo sviluppo

$$F(a, c; z) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+r-1) z^r}{c(c+1) \dots (c+r-1) r!}. \quad (\text{B.61})$$

La (B.61) è il limite per  $b \rightarrow \infty$  della serie ipergeometrica (B.43) in funzione di  $z/b$ :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b; c; z/b) = F(a, c; z). \quad (\text{B.62})$$

Se  $c$  è intero, la seconda delle (B.60) ha la forma della seconda delle (B.14).

Per  $z \rightarrow \infty$ , vale lo sviluppo asintotico

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a}. \quad (\text{B.63})$$

Sono utili le seguenti relazioni:

$$F(a, a; z) = e^z, \quad (\text{B.64})$$

$$F(a, c; z) = e^z F(c - a, c; -z), \quad (\text{B.65})$$

$$F(-n, \alpha + 1; z) = \left[ \binom{\alpha + n}{n} \right]^{-1} L_n^\alpha(z). \quad (\text{B.66})$$

Nella (B.66)  $n$  è un numero intero non negativo e  $L_n^\alpha(z)$  è il *polinomio di Laguerre*<sup>11</sup>:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left( e^{-x} x^{n+\alpha} \right). \quad (\text{B.67})$$

*Esempio B.2*

Un caso particolare di equazione riconducibile ad un'ipergeometrica confluyente è l'*equazione di Bessel*<sup>12</sup>:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) u(z) = 0. \quad (\text{B.68})$$

L'equazione determinante per  $z = 0$ ,

$$\alpha^2 - \nu^2 = 0, \quad (\text{B.69})$$

ha radici  $\alpha = \pm \nu$ . L'equazione caratteristica per  $z \rightarrow \infty$ ,

$$\beta^2 + 1 = 0, \quad (\text{B.70})$$

fornisce  $\beta = \pm i$ . Perciò la sostituzione (B.55) e il cambiamento di variabile (B.58),  $z' = 2iz$ , permettono di ricondurre la (B.68) all'equazione

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (1 + 2\nu - z) \frac{du}{dz} - (\nu + \frac{1}{2}) u(z) = 0, \quad (\text{B.71})$$

che è l'equazione ipergeometrica confluyente (B.59) con

$$a = \nu + \frac{1}{2}, \quad c = 2a. \quad (\text{B.72})$$

Soluzioni speciali della (B.68) sono le *funzioni di Bessel*, così definite:

$$J_\nu(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(\nu + r + 1)}. \quad (\text{B.73})$$

Altre soluzioni speciali si ottengono come combinazioni lineari di funzioni di Bessel. Precisamente si hanno le *funzioni di Neumann*<sup>13</sup>,  $Y_\nu(z)$ , e le *funzioni di Hankel*<sup>14</sup> di

<sup>11</sup> Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886).

<sup>12</sup> G.N. Watson: *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, The University Press, Cambridge, 1922 (prima edizione), 1944 (seconda edizione) e successive ristampe.

<sup>13</sup> Carl Gottfried Neumann (1832–1925).

<sup>14</sup> Hermann Hankel (1839–1873).

*Funzione ipergeometrica confluyente*

prima e di seconda specie,  $H_\nu^{(1)}(z)$  e  $H_\nu^{(2)}(z)$ . Nel caso  $\nu \neq p$  con  $p$  intero incluso lo zero, esse sono definite dalle relazioni seguenti:

$$Y_\nu(z) = [\sin(\pi\nu)]^{-1} \left[ J_\nu(z) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(z) \right], \quad (\text{B.74})$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad (\text{B.75})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z). \quad (\text{B.76})$$

Nelle applicazioni hanno interesse particolare le funzioni di Bessel di argomento reale  $x$  e di ordine semintero, cioè  $\nu$  (che in generale è un numero complesso) diventa  $\nu = n + \frac{1}{2}$ , con  $n$  intero non negativo: si ottengono così quelle che sono chiamate *funzioni di Bessel sferiche*,

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \quad (\text{B.77})$$

e *funzioni di Neumann sferiche*,

$$\eta_n(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x). \quad (\text{B.78})$$

Corrispondentemente, si possono definire le *funzioni di Hankel sferiche di prima e di seconda specie*:

$$\begin{aligned} h_l^{(1)}(x) &= j_l(x) + i\eta_l(x), \\ h_l^{(2)}(x) &= j_l(x) - i\eta_l(x). \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

Le funzioni di Bessel sferiche hanno comportamento regolare nell'origine, mentre le funzioni di Neumann sferiche sono irregolari. I due tipi di funzione possono essere generati esplicitamente ricorrendo alla seguente rappresentazione:

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left( \frac{d}{x dx} \right)^n \frac{\sin x}{x}, \quad (\text{B.80})$$

$$\eta_n(x) = (-1)^{n+1} x^n \left( \frac{d}{x dx} \right)^n \frac{\cos x}{x}. \quad (\text{B.81})$$

Nella Tab. 1 sono riportate le funzioni di Bessel e di Neumann sferiche per  $n \leq 2$ .

| Tab. 1. Funzioni di Bessel e di Neumann sferiche di ordine $n \leq 2$ .             |                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$                                                         | $\eta_0(x) = -\frac{\cos x}{x}$                                                         |
| $j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$                                    | $\eta_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$                                    |
| $j_2(x) = \left( \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x$ | $\eta_2(x) = -\left( \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \cos x - \frac{3}{x^2} \sin x$ |

*Appendice B: equazioni differenziali*

Inoltre valgono gli andamenti asintotici per  $x \ll l$ ,

$$j_l(x) \sim \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad \eta_l(x) \sim \frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \quad (\text{B.82})$$

e per  $x \gg l$ ,

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \cos \left[ x - \frac{\pi}{2}(l+1) \right], \quad \eta_l(x) \sim \frac{1}{x} \sin \left[ x - \frac{\pi}{2}(l+1) \right]. \quad (\text{B.83})$$



## C. CALCOLO MATRICIALE E OPERATORI QUANTISTICI

Il calcolo matriciale, che viene utilizzato in meccanica quantistica in connessione con le rappresentazioni degli operatori associati alle osservabili fisiche, può ritenersi una generalizzazione agli spazi di Hilbert di un algoritmo già noto nell'usuale spazio  $\mathbb{R}^3$ . Anche se c'è la necessità di principio di utilizzare uno spazio a infinite dimensioni, in questa appendice vengono richiamate le nozioni sul calcolo matriciale più rilevanti ai fini del formalismo quantistico, limitando la trattazione a uno spazio vettoriale (o lineare) complesso a  $n$  dimensioni,  $\mathcal{C}^n$ , i cui elementi  $\mathbf{v}$  sono definiti da una  $n$ -pla di numeri complessi  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  che possono essere ordinati secondo uno schema a colonna:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

I numeri  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  costituiscono le componenti del vettore  $\mathbf{v}$  su una base di  $n$  versori  $\{\mathbf{e}_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), linearmente indipendenti e mutuamente ortogonali:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{C.2})$$

Anche i versori  $\mathbf{e}_i$  possono essere rappresentati nello stesso schema a colonne:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Si consideri ora la trasformazione indotta dall'applicazione

$$\mathbf{w} = A\mathbf{v}, \quad (\text{C.4})$$

che fa corrispondere a ogni vettore  $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^n$  ancora un vettore  $\mathbf{w} \in \mathcal{C}^n$ . Qui interessano applicazioni lineari,

$$A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2, \quad (\text{C.5})$$

con  $c_1$  e  $c_2$  numeri complessi. Allora la (C.4) implica un legame lineare tra le componenti di  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$ ,

$$w_i = \sum_{k=1}^n A_{ik}v_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{C.6})$$

dove gli  $n^2$  numeri complessi  $A_{ik}$  possono essere ordinati in uno schema quadrato, detto *matrice*, che rappresenta l'applicazione  $A$  in  $\mathcal{C}^n$ :

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Si può in generale definire *matrice*  $n \times m$  (a  $n$  righe e a  $m$  colonne) uno schema di numeri complessi formato da  $n$  righe e  $m$  colonne:

$$M = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nm} \end{vmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Se  $n = m$ , come nella (C.7), la matrice si dice *quadrata*. La (C.1) è invece un esempio di matrice  $n \times 1$ .

In tal modo la (C.4) può anche porsi nella forma matriciale

$$\begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

dove il prodotto tra la matrice  $n \times n$  che rappresenta  $A$  e la matrice  $n \times 1$  che rappresenta  $\mathbf{v}$  deve intendersi eseguito *righe per colonne*, in accordo con la (C.6).

Nei prossimi paragrafi vengono ricordate le definizioni e le proprietà del calcolo matriciale relativo a matrici con numero finito di righe e colonne; si illustrano poi il significato e le conseguenze di un cambiamento di base nello spazio. Viene infine discussa la diagonalizzazione di una matrice, che è un'operazione di fondamentale importanza nel formalismo quantistico.

Proprietà delle matrici

C.1. Proprietà delle matrici

Data la matrice (C.8), se ne definisce la matrice *complessa coniugata*,  $M^*$ , quella ottenuta prendendone gli elementi complessi coniugati:

$$(M^*)_{ik} = (M_{ik})^*. \quad (\text{C.10})$$

La matrice *trasposta*,  $M^T$ , è quella ottenuta da  $M$  scambiando righe con colonne:

$$(M^T)_{ik} = M_{ki}. \quad (\text{C.11})$$

Combinando lo scambio di righe e colonne con la complessa coniugazione, si definisce la matrice *coniugata hermitiana*,

$$M^\dagger = (M^T)^* = (M^*)^T, \quad (\text{C.12})$$

cioè

$$(M^\dagger)_{ik} = M_{ki}^*. \quad (\text{C.13})$$

Una matrice quadrata  $A$  che coincida con la sua coniugata hermitiana,

$$A^\dagger = A, \quad (\text{C.14})$$

si dice *hermitiana*. Per una matrice hermitiana risulta dunque

$$A_{ik} = A_{ki}^*. \quad (\text{C.15})$$

La moltiplicazione di  $M$  per un numero complesso  $c$  è ancora una matrice  $n \times m$ , i cui elementi sono dati dalla relazione

$$(cM)_{ik} = c M_{ik}. \quad (\text{C.16})$$

Se due matrici  $M$  e  $N$  hanno lo stesso numero di righe e di colonne<sup>1</sup>, si può definire la loro somma:

$$(M + N)_{ik} = M_{ik} + N_{ik}. \quad (\text{C.17})$$

Il prodotto tra due matrici  $M$  e  $N$  si può definire tutte le volte che il numero  $m$  di colonne di  $M$  è uguale al numero di righe di  $N$ . In tal caso risulta

$$(M \cdot N)_{ik} = \sum_{j=1}^m M_{ij} N_{jk}, \quad (\text{C.18})$$

---

<sup>1</sup> In questo caso si dice talvolta che  $M$  e  $N$  sono *simili*.

secondo la regola del prodotto righe per colonne. Il suo significato consiste nell'applicazione *successiva* di  $N$  e  $M$ : prima si applica  $N$  e quindi  $M$ .

Nel caso di matrici quadrate le (C.16), (C.17) e (C.18) definiscono l'algebra del loro insieme, che è in generale un'algebra *non commutativa*, cioè

$$A \cdot B \neq B \cdot A. \quad (\text{C.19})$$

Invece valgono sia la proprietà associativa,

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, \quad (\text{C.20})$$

sia quella distributiva,

$$\begin{aligned} (A + B) \cdot C &= A \cdot C + B \cdot C, \\ C \cdot (A + B) &= C \cdot A + C \cdot B. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Inoltre il prodotto di due matrici può annullarsi, senza che per questo si debba necessariamente annullare una delle due matrici.

Si definisce matrice *simmetrica* la matrice quadrata che coincide con la sua trasposta e che quindi soddisfa la relazione

$$A_{ik} = A_{ki}. \quad (\text{C.22})$$

Una matrice reale simmetrica è anche hermitiana.

Si può verificare che la matrice trasposta e la matrice coniugata hermitiana del prodotto di due matrici quadrate si ottengono dalle relazioni seguenti:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T, \quad (\text{C.23})$$

$$(A \cdot B)^\dagger = B^\dagger \cdot A^\dagger. \quad (\text{C.24})$$

La somma degli elementi diagonali di una matrice quadrata viene chiamata *traccia* e si indica col simbolo  $\text{Tr}$ :

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n A_{ii}. \quad (\text{C.25})$$

È immediato verificare che la traccia del prodotto di due matrici è indipendente dall'ordine dei fattori:

$$\text{Tr } (A \cdot B) = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ji} = \text{Tr } (B \cdot A). \quad (\text{C.26})$$

Più in generale, la traccia è invariante per permutazioni cicliche delle matrici che compaiono nel prodotto sotto il segno di traccia. Per esempio,

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA) = \text{Tr}(CAB). \quad (\text{C.27})$$

Per una matrice quadrata si definisce il *determinante*, che può essere ottenuto per esempio sviluppando secondo gli elementi della prima riga:

$$\det A = \sum_{k=1}^n A_{1k} \tilde{A}_{1k}, \quad (\text{C.28})$$

dove  $\tilde{A}_{1k}$  è il complemento algebrico dell'elemento  $A_{1k}$ , cioè il *minore* di  $A$  con segno, che si ottiene prendendo il determinante della matrice, in cui si sono soppresses la prima riga e la  $k$ -esima colonna della matrice  $A$ , e pesando col fattore  $(-1)^{1+k}$ . Il determinante del prodotto di due matrici quadrate è il prodotto dei determinanti delle due matrici:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B. \quad (\text{C.29})$$

Inoltre

$$\det A^T = \det A. \quad (\text{C.30})$$

Una matrice si dice *diagonale* se possiede diversi da zero solo gli elementi posti sulla diagonale principale:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}. \quad (\text{C.31})$$

Essa verifica  $n$  relazioni del tipo

$$A\mathbf{e}_i = \alpha_i \mathbf{e}_i, \quad (\text{C.32})$$

dove gli  $\mathbf{e}_i$  sono i versori di base definiti nella (C.3).

La matrice

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.33})$$

è la *matrice identità*, con elementi dati dalla delta di Kronecker:

$$(\mathbb{1})_{ik} = \delta_{ik}. \quad (\text{C.34})$$

La matrice identità è a determinante unitario,

Appendice C: calcolo matriciale

$$\det \mathbb{1} = 1, \quad (\text{C.35})$$

e a traccia pari al numero  $n$  delle sue righe (o delle sue colonne),

$$\text{Tr } \mathbb{1} = n. \quad (\text{C.36})$$

Inoltre essa verifica la relazione

$$\mathbb{1} \cdot A = A \cdot \mathbb{1}, \quad \forall A, \quad (\text{C.37})$$

e quindi commuta con ogni matrice simile.

Data una matrice quadrata  $A$  con  $\det A \neq 0$ , esiste una matrice  $B$  tale che sia

$$BA = AB = \mathbb{1}.$$

Allora la matrice  $B$  ha l'effetto di annullare l'applicazione di  $A$  e quindi è la matrice *inversa* di  $A$ :

$$B = A^{-1}.$$

Dunque

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}. \quad (\text{C.38})$$

La matrice inversa risulta definita dai suoi elementi:

$$(A^{-1})_{ik} = \frac{\tilde{A}_{ki}}{\det A}. \quad (\text{C.39})$$

La (C.39) si dimostra risolvendo la (C.4) rispetto a  $\mathbf{v}$  con la regola di Cramer.

La (C.39) indica inoltre che la condizione  $\det A \neq 0$  è condizione necessaria per l'esistenza della matrice inversa  $A^{-1}$ . Dalla condizione

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = 1$$

segue

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}. \quad (\text{C.40})$$

### C.2. Cambiamento di base

Lo spazio  $\mathcal{C}^n$  è strutturato a spazio di Hilbert introducendo la definizione di prodotto scalare. Indicato con  $\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle$  il prodotto scalare tra due vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{C}^n$ , esso gode delle seguenti proprietà:

*Cambiamento di base*

- 1)  $\langle \mathbf{w} | c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 \rangle = c_1 \langle \mathbf{w} | \mathbf{v}_1 \rangle + c_2 \langle \mathbf{w} | \mathbf{v}_2 \rangle$ , con  $c_1$  e  $c_2$  numeri complessi,
- 2)  $\langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle^*$ ,
- 3)  $\langle \mathbf{v} | \mathbf{v} \rangle \geq 0$ , con il segno di uguale che vale se e solo se  $\mathbf{v} \equiv 0$ .

Coerentemente con queste proprietà e con la regola del prodotto righe per colonne, si può utilizzare la seguente notazione matriciale per esprimere il prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle &= |w_1^*, \quad w_2^*, \quad \dots, \quad w_n^*| \cdot \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n w_i^* v_i. \end{aligned} \tag{C.41}$$

Allora gli elementi  $A_{ik}$  della matrice  $A$  data dalla (C.7) si possono visualizzare come il prodotto scalare tra il vettore ottenuto dall'applicazione di  $A$  al versore  $\mathbf{e}_k$  e il versore  $\mathbf{e}_i$ ,

$$A_{ik} = \langle \mathbf{e}_i | A \mathbf{e}_k \rangle, \tag{C.42}$$

oppure come il prodotto scalare tra il versore  $\mathbf{e}_k$  e il vettore ottenuto dall'applicazione della coniugata hermitiana di  $A$  al versore  $\mathbf{e}_i$ ,

$$A_{ik} = \langle A^\dagger \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_k \rangle. \tag{C.43}$$

Similmente a quanto avviene in  $\mathbb{R}^3$  si può eseguire un cambiamento di base in  $\mathcal{C}^n$ , sviluppando i versori della nuova base sulla vecchia:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^n U_{ki} \mathbf{e}_k. \tag{C.44}$$

Per l'ortogonalità dei versori di base  $\{\mathbf{e}_k\}$ ,

$$\langle \mathbf{e}_k | \mathbf{e}_i \rangle = \delta_{ik}, \tag{C.45}$$

i coefficienti  $U_{ki}$  dello sviluppo (C.44) si possono ricavare facendo il prodotto scalare con  $\mathbf{e}_k$ :

$$U_{ki} = \langle \mathbf{e}_k | \mathbf{e}'_i \rangle. \tag{C.46}$$

Perciò i coefficienti  $U_{ki}$  sono la generalizzazione a  $\mathcal{C}^n$  dei coseni direttori dei nuovi versori rispetto ai vecchi in  $\mathbb{R}^3$ . Siccome necessariamente la nuova base ha la stessa dimensionalità della vecchia, i coefficienti  $U_{ki}$  definiscono una matrice quadrata  $n \times n$ ,  $U$ . D'altra parte, per l'ortogonalità dei versori di base  $\{\mathbf{e}'_i\}$ , si ha

Appendice C: calcolo matriciale

$$\begin{aligned}\delta_{ji} &= \langle \mathbf{e}'_j | \mathbf{e}'_i \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{e}'_j | \mathbf{e}_k \rangle U_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n U_{kj}^* U_{ki},\end{aligned}$$

cioè

$$\sum_{k=1}^n (U^\dagger)_{jk} U_{ki} = \delta_{ji}, \quad (\text{C.47})$$

o, in notazione matriciale,

$$U^\dagger U = \mathbb{1}. \quad (\text{C.48})$$

Anche i vecchi versori possono essere sviluppati sulla base dei nuovi:

$$\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^n U'_{ki} \mathbf{e}'_k, \quad (\text{C.49})$$

dove, per l'ortogonalità dei versori  $\{\mathbf{e}'_k\}$ , i coefficienti  $U'_{ki}$  sono

$$U'_{ki} = \langle \mathbf{e}'_k | \mathbf{e}_i \rangle = U_{ik}^*, \quad (\text{C.50})$$

cioè

$$U' = U^\dagger. \quad (\text{C.51})$$

D'altra parte, per l'ortogonalità dei versori di base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , si ha

$$\begin{aligned}\delta_{ji} &= \langle \mathbf{e}_j | \mathbf{e}_i \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{e}_j | \mathbf{e}'_k \rangle U'_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n U_{kj} U'_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^n U_{jk} U_{ik}^*,\end{aligned}$$

cioè

$$\sum_{k=1}^n U_{jk} (U^\dagger)_{ki} = \delta_{ji}, \quad (\text{C.52})$$

o, in notazione matriciale,



*Cambiamento di base*

$$UU^\dagger = \mathbb{1}. \quad (\text{C.53})$$

Una matrice che gode simultaneamente delle proprietà (C.48) e (C.53) viene detta matrice *unitaria*. Dato che la trasformazione indotta dalla  $U'$  nella (C.49) è palesemente l'inversa della trasformazione  $U$  indotta nella (C.44),

$$U' = U^{-1},$$

la trasformazione unitaria è definita dalla condizione

$$U^\dagger = U^{-1}, \quad (\text{C.54})$$

che garantisce simultaneamente la (C.48) e la (C.53).

Una matrice unitaria ha autovalori di modulo uno. Infatti, se  $U$  è una matrice unitaria, si ha

$$\sum_{k=1}^n U_{ik}^\dagger U_{kj} = \delta_{ij}$$

e, nella rappresentazione in cui  $U$  è diagonale ( $U_{ij} = a_i \delta_{ij}$ ,  $U_{ij}^\dagger = a_i^* \delta_{ij}$ ), deve essere

$$\sum_{k=1}^n a_i^* \delta_{ik} a_j \delta_{kj} = a_i^* a_j \delta_{ij},$$

cioè  $a_i^* a_i = 1$  e quindi

$$a_i = e^{i\alpha_i}. \quad (\text{C.55})$$

Ogni vettore  $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^n$  può essere espresso ugualmente bene sulla vecchia e sulla nuova base:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n v_k \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n v'_i \mathbf{e}'_i. \quad (\text{C.56})$$

Le nuove e le vecchie componenti sono legate dalle relazioni

$$v_k = \sum_{i=1}^n U_{ki} v'_i, \quad v'_i = \sum_{k=1}^n U_{ik}^\dagger v_k, \quad (\text{C.57})$$

che derivano dalla (C.44) e dalla (C.49).

Allora gli elementi di una matrice  $A$ , definiti nella (C.42) in dipendenza dalla base scelta, sotto l'azione di un cambiamento di base si trasformano nel modo seguente:

Appendice C: calcolo matriciale

$$\begin{aligned}
 A'_{ik} &= \langle \mathbf{e}'_i | A \mathbf{e}'_k \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^n U_{li} \mathbf{e}_l \left| A \sum_{l'=1}^n U_{l'k} \mathbf{e}_{l'} \right. \right\rangle \\
 &= \sum_{l,l'=1}^n U_{li}^* \langle \mathbf{e}_l | A \mathbf{e}_{l'} \rangle U_{l'k} \\
 &= \sum_{l,l'=1}^n U_{li}^* A_{ll'} U_{l'k}.
 \end{aligned}$$

Perciò la matrice  $A$  si trasforma per trasformazioni unitarie secondo la relazione

$$A' = U^{-1} A U. \quad (\text{C.58})$$

Se  $A$  è una matrice hermitiana, anche  $A'$  lo è:

$$A'^{\dagger} = (U^{-1} A U)^{\dagger} = U^{\dagger} A U = A'.$$

Il prodotto scalare tra due vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{C}^n$  risulta indipendente dalla base scelta:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{w} | \mathbf{v} \rangle &= \sum_{k=1}^n w_k^* v_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n U_{kl}^{\dagger} w_l \right)^* \sum_{l'=1}^n U_{kl'}^{\dagger} v_{l'} \\
 &= \sum_{l=1}^n \sum_{l'=1}^n w_l^* v_{l'} \delta_{ll'} \\
 &= \sum_{l=1}^n w_l^* v_l.
 \end{aligned}$$

Anche il determinante e la traccia di una matrice  $A$  sono invarianti per trasformazioni unitarie:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr } A' &= \text{Tr } (U^{-1} A U) \\
 &= \text{Tr } (U U^{-1} A) = \text{Tr } A,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \det A' &= \det(U^{-1} A U) \\
 &= \det U^{-1} \cdot \det A \cdot \det U = \det A.
 \end{aligned}$$

C.3. Diagonalizzazione di una matrice

Il problema di diagonalizzare una matrice interviene in meccanica quantistica in occasione del problema della risoluzione dell'equazione agli autovalori di un operatore,

$$A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}, \quad (\text{C.59})$$

in cui l'applicazione dell'operatore, rappresentato dalla matrice  $A$ , al vettore  $\mathbf{u}$  lo trasforma nello stesso vettore moltiplicato per il numero  $\alpha$ ; il vettore  $\mathbf{u}$  è detto *autovettore* di  $A$  appartenente all'*autovalore*  $\alpha$ . In  $\mathcal{C}^n$  l'equazione (C.59) si traduce nel sistema di  $n$  equazioni algebriche,

$$\sum_{k=1}^n A_{ik}u_k = \alpha u_i, \quad (\text{C.60})$$

lineari nelle incognite  $u_i$  che rappresentano le componenti di  $\mathbf{u}$  secondo i versori della base scelta.

Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema (C.60) sia risolubile è che sia

$$\det(A - \alpha\mathbb{I}) = 0. \quad (\text{C.61})$$

Ciò equivale a imporre

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \alpha & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \alpha & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - \alpha \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{C.62})$$

La (C.62) è chiamata *equazione secolare*. Essa costituisce un'equazione di grado  $n$  nell'incognita  $\alpha$  che ammette  $n$  soluzioni nel campo dei numeri complessi. In corrispondenza di ciascuna soluzione  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) si trova la soluzione per le incognite  $u_i$  nel sistema (C.60); con questo procedimento, la determinazione successiva di tutti gli  $n$  autovettori risolve così il problema (C.59).

Il metodo algebrico su esposto è quello che in pratica si segue, ma è anche utile riconoscere che la risoluzione del problema agli autovalori è in realtà riconducibile a quello di un cambiamento di base. È ovvio che se la matrice  $A$  fosse già diagonale in partenza, per la (C.31) e la (C.32) il problema sarebbe risolto: gli elementi diagonali di  $A$  sono gli autovalori e i versori della base su cui è costruita la matrice  $A$  sono i suoi autovettori. In generale, per risolvere la (C.59) occorre invece operare un cambiamento di base per trovare quella su cui la matrice  $A$  risulta diagonale. Data allora la matrice  $A$  sulla base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , si tratta di trovare la trasformazione unitaria  $U$  che per la (C.44) produce una nuova base  $\{\mathbf{e}'_i\}$  su cui la matrice trasformata

$$A' = U^{-1}AU \quad (\text{C.63})$$

sia diagonale, cioè

$$(U^{-1}AU)_{ik} = \alpha_i \delta_{ik}. \quad (\text{C.64})$$

Esplicitando le somme nella (C.64), moltiplicando ambo i membri per  $U_{li}$  e sommando su  $i$ , si ottiene

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j,j'=1}^n U_{li}(U^{-1})_{ij} A_{jj'} U_{j'k} = \sum_{i=1}^n \alpha_i U_{li} \delta_{ik}.$$

Per l'unitarietà della matrice  $U$  si può scrivere

$$\sum_{j,j'=1}^n \delta_{lj} A_{jj'} U_{j'k} = \alpha_k U_{lk},$$

da cui

$$\sum_{j'=1}^n A_{lj'} U_{j'k} = \alpha_k U_{lk},$$

cioè

$$\sum_{j=1}^n (A_{lj} - \alpha_k \delta_{lj}) U_{jk} = 0. \quad (\text{C.65})$$

Anche la (C.65) costituisce un sistema di  $n$  equazioni algebriche, che si può identificare con la (C.60). La condizione di solubilità del sistema (C.65) è dunque la stessa equazione secolare (C.62) che vale per la (C.60). Ora però, per ogni valore dell'indice  $k$  in corrispondenza dell'autovalore  $\alpha_k$ , le incognite sono i coefficienti  $U_{jk}$ , cioè gli elementi della  $k$ -esima colonna della matrice unitaria  $U$ , che determina la trasformazione di base per ottenere  $A$  in forma diagonale. Essi dunque rappresentano le componenti  $u_{k,j} \equiv (\mathbf{u}_k)_j$  dell'autovettore  $\mathbf{u}_k$  sulla base di partenza:

$$U_{jk} = u_{k,j}, \quad (\text{C.66})$$

cioè

$$U = \begin{vmatrix} (\mathbf{u}_1)_1 & \dots & (\mathbf{u}_k)_1 & \dots & (\mathbf{u}_n)_1 \\ (\mathbf{u}_1)_2 & \dots & (\mathbf{u}_k)_2 & \dots & (\mathbf{u}_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{u}_1)_n & \dots & (\mathbf{u}_k)_n & \dots & (\mathbf{u}_n)_n \end{vmatrix}. \quad (\text{C.67})$$

Questo risultato è in accordo col seguente *teorema*: condizione necessaria e sufficiente perché una matrice  $U$  sia unitaria è che gli elementi di matrice delle

*Diagonalizzazione di una matrice*

colonne (o delle righe) di  $U$  siano le componenti di un sistema di versori ortogonali  $\{\mathbf{u}_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Infatti dalla (C.66) e dalla (C.48) segue

$$\langle \mathbf{u}_i | \mathbf{u}_k \rangle = \delta_{ik}. \quad (\text{C.68})$$

Similmente, posto ora  $U_{il} = u_{i,l}$ , dalla (C.53) segue ancora la (C.68). Questo teorema è d'altra parte intuitivo se si pensa che gli elementi di matrice  $U_{ik}$  coincidono con le componenti dei trasformati dei versori di base, i quali sono ortogonali, e che le relazioni di ortogonalità e di normalizzazione, connesse col prodotto scalare, sono preservate da una trasformazione unitaria.

Con alcune cautele le considerazioni svolte in questa appendice possono essere estese a spazi di Hilbert  $\mathcal{H}$  con un numero *infinito* di dimensioni. Se  $\mathcal{H}$  è separabile, per cui esiste una base ortonormale numerabile, basta sostituire la base costituita da un numero finito di versori con una a numero infinito. Di conseguenza, in tutte le relazioni date, le sommatorie di numeri complessi o di vettori vanno sostituite con delle serie. Non esistono problemi di convergenza se le matrici infinite risultano associate a operatori *limitati*, cioè a operatori per i quali esiste un  $c > 0$ , indipendente da  $f \in \mathcal{H}$ , tale che sia  $\|Af\| \leq c\|f\|, \forall f \in \mathcal{H}$ .

Nel caso della diagonalizzazione di una matrice, si ha a che fare con un sistema di infinite equazioni in infinite incognite: perciò l'equazione secolare non è più utilizzabile direttamente in problemi di natura applicativa e si deve ricorrere in generale a metodi di approssimazione che permettano il troncamento a un sistema di un numero finito di equazioni.



Appendice D: Costanti fisiche

Tab. D.1. Costanti fisiche †.

| Quantità                                                                                                                                                                            | Simbolo                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Valore                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| velocità della luce nel vuoto<br>costante di Planck<br>costante di Planck ridotta<br>(acca tagliata)<br>modulo della carica<br>dell'elettrone<br>costante di conversione            | $c$<br>$\hbar$<br>$\hbar \equiv \hbar/2\pi$<br>$e$<br>$\hbar c$                                                                                                                                                                                                                                                     | $2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$<br>$6.626\,075\,5(40) \times 10^{-34} \text{ J s}$<br>$1.054\,572\,66(63) \times 10^{-34} \text{ J s}$<br>$= 6.582\,122\,0(20) \times 10^{-22} \text{ MeV s}$<br>$1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{ C}$<br>$= 4.803\,206\,8(15) \times 10^{-10} \text{ ues}$<br>$197.327\,053(59) \text{ MeV fm}$ |
| unità di massa atomica<br>(uma)<br>massa dell'elettrone<br>massa del protone                                                                                                        | $(\text{massa atomo } C^{12})/12$<br>$m_e$<br>$m_p$                                                                                                                                                                                                                                                                 | $1.660\,540\,2(10) \times 10^{-27} \text{ kg}$<br>$= 931.494\,32(28) \text{ MeV}/c^2$<br>$9.109\,389\,7(54) \times 10^{-31} \text{ kg}$<br>$= 0.510\,999\,06(15) \text{ MeV}/c^2$<br>$1.672\,623\,1(10) \times 10^{-27} \text{ kg}$<br>$= 938.272\,31(28) \text{ MeV}/c^2$<br>$= 1.007\,276\,470(12) \text{ uma}$<br>$= 1836.152\,701(37)m_e$           |
| costante di struttura fine<br>lunghezza d'onda<br>Compton per l'elettrone<br>raggio di Bohr<br>costante di Rydberg<br>energia di Rydberg<br>magnetone di Bohr<br>magnetone nucleare | $\alpha = (e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c)_{SI}$<br>$= (e^2/\hbar c)_{Gauss}$<br>$\lambda_e = \hbar/m_e c$<br>$a = (4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2)_{SI}$<br>$= (\hbar^2/m_e e^2)_{Gauss}$<br>$R_\infty$<br>$\hbar c R_\infty$<br>$\mu_B = (e\hbar/2m_e)_{SI}$<br>$= (e\hbar/2m_e c)_{Gauss}$<br>$\mu_N = (m_e/m_p)\mu_B$ | $1/137.035\,989\,5(61)$<br>$3.861\,593\,23(35) \times 10^{-13} \text{ m}$<br>$0.529\,177\,249(24) \times 10^{-10} \text{ m}$<br>$10\,973\,731.571(4) \text{ m}^{-1}$<br>$13.605\,698\,20(81) \text{ eV}$<br>$5.788\,382\,63(52) \times 10^{-11} \text{ MeV T}^{-1}$<br>$3.152\,451\,66(28) \times 10^{-14} \text{ MeV T}^{-1}$                          |
| costante di gravitazione<br>accelerazione di gravità<br>a livello del mare                                                                                                          | $G$<br>$g$                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | $6.672\,59(85) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$<br>$9.806\,65 \text{ m s}^{-2}$                                                                                                                                                                                                                                              |
| numero di Avogadro<br>costante di Boltzmann<br>costante di Wien<br>costante di Stephan                                                                                              | $N$<br>$k$<br>$b = \lambda_m T$<br>$\sigma = 8\pi^5 k^4/15c^3 h^3$                                                                                                                                                                                                                                                  | $6.022\,136\,7(36) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$<br>$1.380\,651\,3(25) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$<br>$= 8.617\,344(15) \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$<br>$2.897\,769\,4(49) \times 10^{-3} \text{ m K}$<br>$7.565\,91(26) \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$                                                                 |
| $\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238$                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $1 \text{ eV} = 1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{ J}, \quad 1 \text{ MeV}/c^2 = 1.782\,662\,70(54) \times 10^{-30} \text{ kg}$                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

† Dati ripresi dalla raccolta di *Particle Data Group: Review of Particle Properties*, Physics Letters **B239** (1990) 1–516. I numeri entro parentesi dopo i valori forniscono l'incertezza di una deviazione standard nelle ultime cifre.





Appendice D: Relazioni elettromagnetiche

Tab. D.2. Relazioni elettromagnetiche.

|                                                                                                                        | Sistema Internazionale                                                                                                                                                                                                                     | Sistema cgs di Gauss                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| unità di carica<br>carica dell'elettrone<br>unità di campo magnetico                                                   | $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$<br>$1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{ C}$<br>$1 \text{ T}$                                                                                                                                           | $= 2.997\,924\,58 \times 10^9 \text{ ues}$<br>$= 4.803\,206\,8(15) \times 10^{-10} \text{ ues}$<br>$= 10^4 \text{ gauss}$                                                                                                                                                |
| forza di Lorentz                                                                                                       | $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$                                                                                                                                                                                | $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B})$                                                                                                                                                                                                  |
| equazioni di Maxwell                                                                                                   | $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$<br>$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$<br>$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$<br>$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$              | $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$<br>$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$<br>$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$<br>$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ |
| nel mezzo<br><br>nel vuoto                                                                                             | $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$<br><br>$\epsilon = \epsilon_0, \quad \mu = \mu_0$                                                                                                                    | $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$<br><br>$\epsilon = 1, \quad \mu = 1$                                                                                                                                                               |
| campi                                                                                                                  | $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$<br>$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$                                                                                                                               | $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$<br>$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$                                                                                                                                                 |
| trasformazioni relativistiche<br><br>( $\mathbf{v}$ è la velocità del sistema primato rispetto al sistema non primato) | $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$<br>$E'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$<br>$B'_{\parallel} = B_{\parallel}$<br>$B'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E})$ | $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$<br>$E'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B})$<br>$B'_{\parallel} = B_{\parallel}$<br>$B'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E})$                     |
| $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$                                        |                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| permittività elettrica<br>permeabilità magnetica                                                                       | $\epsilon_0 = 8.854\,187\,817 \dots \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$<br>$\mu_0 = 12.566\,370\,614 \dots \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                          |



## INDICE ANALITICO

### A

acca tagliata: 122  
accoppiamento,  
  di Russell–Saunders o  $LS$ : 413  
   $jj$ : 414  
Aharonov–Bohm, effetto : 357, 359  
ampiezza,  
  di diffusione: 496, 503  
  di probabilità: 140, 312  
  di transizione: 542  
anticommutatore: 363  
approssimazione,  
  di Born: 506  
  di dipolo elettrico: 476  
  di grandi lunghezze d'onda: 475  
  WKB: 220  
Argand, grafico di: 524  
armonia di fase, teorema della: 120  
armoniche sferiche: 169  
atomo,  
  di Bohr: 95  
  di elio: 422  
  idrogenoide: 239

### B

Balmer, formula di: 94  
barriera di potenziale simmetrica: 216  
Bartlett,  
  forza di: 442

operatore di: 440

Bessel,

  equazione di: 233, 584

  funzioni di: 233, 584

bilancio dettagliato: 554

Bohr,

  atomo di: 95

  magnetone di: 361

  raggio di: 242

Bohr–Sommerfeld,

  regole di quantizzazione di: 97, 123

Born, approssimazione di: 506

Bose–Einstein, statistica di: 401

bosoni: 401

Breit–Wigner,

  formula di: 516

  grafico di Argand per risonanza di: 525

Brillouin, teorema di: 431

Brillouin–Wigner, sviluppo di: 349

buca di potenziale rettangolare: 222

### C

calori specifici: 24, 38, 87

cambiamento di base: 592

cammino ottico: 112

carica efficace: 484

casi puri e casi miscela: 319

catena lineare armonica, 392

  modi normali di vibrazione: 394

*Indice analitico*

- chiusura, proprietà di: 164  
Clebsch–Gordan, coefficienti di: 377  
coefficiente,  
  di riflessione: 214  
  di trasmissione: 214  
commutabilità e compatibilità: 203  
commutatore: 158  
completezza, relazione di: 163, 259  
composizione di due momenti angolari: 375  
Compton,  
  effetto: 91  
  lunghezza d'onda: 93  
coniugato hermitiano: 154  
contrazione delle lunghezze: 70  
corpo nero: 76  
Coulomb, gauge di: 50
- D  
dalembertiano: 51  
Davisson–Germer, esperimento di: 136  
de Broglie, lunghezza d'onda di: 123  
Debye, temperatura di: 88  
densità degli stati finali: 467  
descrizione,  
  di Dirac o di interazione: 308  
  di Heisenberg: 305  
  di Schrödinger: 296  
descrizioni: 296  
diagonalizzazione di una matrice: 597  
dilatazione dei tempi: 71  
dipolo elettrico,  
  approssimazione di: 476  
  operatore di: 476  
  regola di somma TRK: 483  
dipolo magnetico, operatore di: 479  
Dirac,  
  delta di: 555  
  descrizione di: 308  
  formulazione di: 252  
  proprietà della delta di: 559  
distribuzione di Maxwell–Boltzmann: 40  
distribuzioni: 555  
Dulong e Petit, regola di: 40, 88  
Dyson, sviluppo di: 312
- E  
effetto,  
  Aharonov–Bohm: 357, 359  
  Compton: 91  
  fotoelettrico: 90, 549  
  ombra: 526  
  Stark: 104  
  tunnel: 220  
  Zeeman: 103, 360, 362  
Ehrenfest, teorema di: 141  
elettrone in campo magnetico: 353, 360  
elettroni di valenza: 434  
elicità,  
  dell'elettrone: 369  
  operatori di: 369  
emissione spontanea: 485  
energia,  
  a riposo: 75  
  di punto zero: 228  
  di Rydberg: 242  
  di separazione: 430  
equazione,  
  agli autovalori: 162  
  dell'iconale: 113  
  determinante: 574  
  di continuità,  
    in elettrodinamica: 46  
    per l'eq. di Schrödinger: 128, 133  
    per l'eq. di Klein–Gordon: 125  
  di Hamilton–Jacobi: 19  
  di Liouville: 33  
  di Liouville–von Neumann: 325  
  di Schrödinger: 124, 127, 128, 149, 178  
    degli stati stazionari: 178  
    interpretazione delle soluzioni: 136  
    limite classico: 131  
    per sistemi di molte particelle: 397  
    soluzione fondamentale: 300  
    soluzione generale: 178  
  di stato: 23, 26  
  fondamentale della termodinamica: 27  
  ipergeometrica confluyente: 583  
  ipergeometrica: 580  
  secolare: 597  
equazioni,

*Indice analitico*

- di Hamilton: 7
- di Lagrange: 5
- di Maxwell: 44, 45
- di stato: 23, 26
- equazioni del moto,
  - formulazione hamiltoniana: 7
  - formulazione lagrangiana: 5
- Eulero, angoli di: 282
- evoluzione temporale,
  - di uno stato di spin: 368
  - operatore di,
    - descrizione di interazione: 309
    - sviluppo di Dyson: 312
    - descrizione di Schrödinger: 297
- F
- Fermi,
  - gas di: 403
  - livello di: 403
  - sfera di: 404
- Fermi–Dirac, statistica di: 401
- fermioni: 401
- Feynman, formulazione di: 312
- flusso ergodico: 35
- fluttuazioni d'energia: 41, 85
- Fock, spazio di: 405
- fononi: 394
- forze a due corpi: 395
- Fourier, trasformate di: 564
- Franck e Hertz, esperimento di: 96
- funzione,
  - di Green: 301, 498
  - di partizione: 36
- funzioni,
  - a quadrato sommabile: 129
  - localmente integrabili: 130
- G
- Galileo, trasformazione di: 68
- gas,
  - di bosoni: 408
  - di fermioni: 408
  - perfetto quantistico: 407
- gauge,
  - di Coulomb: 50
  - di Lorentz: 50
  - invarianza di: 353, 356
- generatore,
  - delle rotazioni intorno a un asse: 286
  - di una trasformazione,
    - canonica: 17
    - unitaria infinitesimale: 279
- Glauber, stati di: 270
- Green, funzione di: 301, 498
- H
- Hamilton, principio di: 5
- Hankel, funzioni di: 584
- Hartree,
  - bontà del metodo di: 420
  - equazioni di: 418
  - metodo di: 416
  - potenziale di: 418
- Hartree–Fock,
  - equazioni di: 426
  - metodo di: 425
- Heisenberg,
  - descrizione di: 305
  - forza di: 442
  - operatore di: 440
- Hermite, polinomi di: 227
- Hilbert,
  - spazio di: 153
  - separabile: 163
- Hund, regola di: 425, 434
- Huyghens, principio di: 111
- I
- iconale, equazione della: 113
- identità di Jacobi: 8
- insieme completo di operatori
  - che commutano: 205
- insieme microcanonico: 35
- insiemi canonici: 37
- integrale coulombiano: 423
- integrale di scambio: 424
- interazione,
  - residua: 398

*Indice analitico*

- spin-orbita: 381
- interferenza di probabilità: 140
- invariante adiabatico: 13
- invarianza di gauge,
  - in meccanica quantistica: 353
- invarianza per trasformazioni di fase: 356
- inversione temporale, 131, 292
  - operatore di: 292, 553
    - in presenza di spin: 371
- ipergeometrica confluyente,
  - v. equazione ipergeometrica confluyente
- ipergeometrica,
  - v. equazione ipergeometrica
- isospin: 437
- J
- Jacobi, identità di,
  - classica: 8
  - per gli operatori quantistici: 160
- K
- Klein-Gordon,
  - equazione di: 125
  - equazione di continuità: 125
- Koopmans, teorema di: 430
- L
- Laguerre, polinomi di: 239, 584
- Lamb shift: 385
- Laplace-Runge-Lenz, vettore di: 11, 158, 161
- laplaciano: 50
- Larmor, frequenza di: 361
- laser, funzionamento schematico: 488
- legame ionico: 434
- Legendre, polinomi di: 170
- legge dello spostamento: 77
- Levinson, teorema di: 520
- limite classico,
  - dell'equazione di Schrödinger:
  - v. equazione di Schrödinger
- Liouville,
  - equazione quantistica di: 325
  - teoremi di: 33-34
- Liouville-von Neumann, equazione di: 325
- Lippmann-Schwinger, equazione di: 504
- Lorentz,
  - trasformazioni di: 69
  - gauge di: 50
- lorenziana: 516
- lunghezza d'onda,
  - Compton: 93
  - di de Broglie: 123
- M
- Majorana,
  - forza di: 442
  - operatore di: 440
- massa a riposo: 75
- matrice densità: 323
- matrice  $S$ , v. scattering, matrice di
- matrice  $T$ , v. transizione, matrice di
- matrici: 587
  - meccanica delle matrici: 207
  - proprietà delle: 589
  - unitarie: 276, 595
- Maupertuis, principio di: 21
- Maxwell-Boltzmann, distribuzione di: 40
- Maxwell, equazioni di: 44, 45
- meccanica delle matrici: v. matrici
- metodo variazionale: 330
- modello a shell,
  - atomico: 432
  - nucleare: 444
- Møller,
  - operatore di: 535
  - operatori di, unitari a sinistra: 537
- momento angolare,
  - nella formulazione di Dirac: 261
- momento trasferito: 506
- Mott, formula di: 529
- N
- Neumann, funzioni di: 234, 584
- nucleoni: 437
- numeri magici,
  - atomici: 432
  - nucleari: 446

- O
- onde parziali:  
v. sviluppo in onde parziali
- operatore,  
aggiunto: 154  
antilineare: 292  
antiunitario: 293  
autoaggiunto: 155  
densità: 323  
per particelle a spin  $\frac{1}{2}$ : 372  
di parità: 170  
di proiezione: 256  
di transizione: 542  
essenzialmente autoaggiunto: 155  
hermitiano: 154, 155  
numero: 267  
simmetrico: 155
- operatori,  
di creazione e di distruzione: 266  
di scambio: 440  
lineari: 154  
tensoriali irriducibili: 290  
unitari: 279
- ortoelio: 425
- oscillatore armonico lineare: 225  
teoria matriciale: 264
- oscillatore armonico tridimensionale: 234
- osservazioni ripetute: 186
- P
- pacchetto di minima indeterminazione: 195
- pacchetto di onde: 53, 124
- paraelio: 425
- parametro,  
di anelasticità: 522  
d'impatto: 513  
d'urto: 513
- parentesi di Poisson: 8
- particelle identiche,  
indistinguibilità quantistica: 396, 399  
stati simmetrici e antisimmetrici: 401
- particelle indipendenti: 398
- Pauli,  
equazione di: 368  
matrici di: 367  
principio di: 402  
e stati di due particelle: 416
- perturbazioni,  
dipendenti dal tempo: 451, 458  
indipendenti dal tempo: 337  
caso degenerare: 345  
condizione di applicabilità: 340
- Planck,  
costante di: 82  
formula di: 81
- Poisson,  
distribuzione di: 86  
equazione di: 51  
integrale di: 40, 196, 197  
parentesi di: 8
- polarizzazione, versore di: 373
- polinomi,  
di Hermite: 227  
di Laguerre: 239, 584  
di Legendre: 170
- postulati elementari,  
della meccanica quantistica: 208
- potenziale,  
medio: 418  
quantistico: 135  
termodinamico: 29
- precessione di spin: 371
- pressione di radiazione: 47
- principio,  
adiabatico: 98  
d'inerzia: 68  
di combinazione delle linee spettrali: 94  
di complementarità: 123  
di corrispondenza, 103, 106  
per l'oscillatore armonico  
lineare: 230  
di esclusione: 402  
di indeterminazione: 188  
di minima azione,  
di Hamilton: 5  
di Maupertuis: 21

*Indice analitico*

- di relatività: 68
- di sovrapposizione lineare: 53
- variazionale di Hamilton: 5
- probabilità di transizione:
  - v. transizione, probabilità di
- problema a due corpi: 389
- problema a molti corpi: 397
- prodotto scalare: 153
- profilo lorentziano: 181
- propagatore,
  - formula di Feynman: 317
  - ritardato: 300
  - per l'equazione di Schrödinger: 299
  - per la particella libera: 302
- Q
- quadrupolo elettrico, operatore di: 479
- quantizzazione canonica: 295
- quanto d'energia: 84
- R
- radiazione elettromagnetica: 46
- raggio di Bohr: 242
- Ramsauer, effetto: 519
- rapporto giromagnetico: 361
  - di spin: 362
- rappresentazione,
  - degli impulsi: 260
  - delle posizioni: 259
  - di Schrödinger: 259
  - di un operatore: 255
- rappresentazioni equivalenti: 145, 277
- Rayleigh–Ritz, metodo variazionale di: 330
- Rayleigh–Schrödinger, sviluppo di: 339
- Rayleigh–Jeans, formula di: 79
- regola d'oro: 467
- regola di Dulong e Petit: 40, 88
- regola di somma,
  - per l'energia: 428
  - TRK: 483
- regole di selezione: 471
- relazione di indeterminazione,
  - per energia e tempo: 200
- riduzione del pacchetto di onde: 185
- rotazione, operatori di: 282
- rotazioni,
  - nello spazio di Hilbert: 284
  - nello spazio ordinario: 282
- Russell–Saunders, accoppiamento di: 415
- Rutherford, formula di: 509
- Rydberg, energia di: 242
- S
- salto di potenziale: 211
- scattering,
  - ampiezza di: v. ampiezza di
  - diffusione
  - matrice di: 539
  - unitaria: 539
- Schrödinger,
  - descrizione di: 296
  - equazione di: v. equazione di
  - Schrödinger
- serie ipergeometrica: 580
- sezione d'urto: 494, 544
  - differenziale: 493
  - e teorema ottico: 545
  - formula di Mott: 529
  - formula di Rutherford: 509
  - in approssimazione di Born: 508
  - totale: 493
- sfasamenti, determinazione: 513
- simboli a 3- $j$ : 380
- singolarità essenziale: 570
- singolarità fuchsiana: 569
- singoletto,
  - pari: 416
  - sezione d'urto di: 530
  - stato di: 412
- sistema a due livelli: 452
- sistemi integrabili: 16
- Slater, determinante di: 402
- sostituzione minimale: 57, 355
- spazio delle fasi: 31
- spazio di Hilbert,
  - v. Hilbert, spazio di
- spin: 351



*Indice analitico*

- spin isotopico: 437
- spinori: 365
- Stark, effetto: 104
- stati coerenti: 269
  - luce laser e luce termica: 273
- stati di particella–lacuna: 404, 429
- stati stazionari e modello di Bohr: 95
- stato quasi-stazionario: 183
- stato stazionario: 180
- Stefan, legge di: 77
- Stern e Gerlach, esperimento di: 99
- sviluppo,
  - di Brillouin–Wigner: 349
  - di Dyson: 314
  - in onde parziali: 510
    - per l’onda piana: 234, 510
  - di Rayleigh–Schrödinger: 339
- T
- tempo di vita medio: 183
- teorema,
  - del viriale: 208
  - di Brillouin: 430
  - di Ehrenfest: 141
  - di equipartizione dell’energia: 39
  - di Levinson: 520
  - di reciprocità: 554
  - di Wigner–Eckart: 468
  - ottico: 527, 545
- teoremi di Liouville: 33–34
- termodinamica,
  - primo principio: 23
  - principio zeresimo: 23
  - secondo principio: 25
- Thomas–Fermi, equazione di: 405
- Thomas–Reiche–Kuhn,
  - regola di somma di: 483
- transizione,
  - matrice di: 541
  - proprietà di simmetria: 553
  - probabilità di: 461
- transizioni multipolari: 481
- trasformazione identità: 16
- trasformazioni canoniche: 11
  - funzioni generatrici: 14
  - infinitesimali: 17
- trasformazioni di gauge,
  - di prima specie: 354
  - di seconda specie: 354
  - in elettrodinamica: 49
- trasformazioni reversibili: 25
- trasformazioni unitarie: 275
  - e diagonalizzazione di matrici: 278
  - infinitesimali: 279
- tripletto,
  - dispari: 416
  - sezione d’urto di: 530
  - stato di: 412
- U
- urto elastico: 495
- V
- valore di aspettazione di un operatore: 206
- valore medio di un operatore: 142, 206
- variabili angolari: 16
- variabili d’azione: 16
- velocità di fase: 54
- velocità di gruppo: 54
- vettore di Laplace–Runge–Lenz: 11
- W
- Wentzel–Kramers–Brillouin,
  - approssimazione WKB: 220
- Wien,
  - formula di: 81
  - legge di: 77
- Wigner, forza di: 442
- Wigner–Eckart, teorema di: 468
- Y
- Yukawa, potenziale di: 439
- Z
- Zeeman,
  - effetto: 103, 360
  - effetto anomalo: 362