

## VI. RAPPRESENTAZIONI

“La nuova meccanica quantistica consiste di uno schema di equazioni che sono strettamente analoghe alle equazioni della meccanica classica, con la differenza fondamentale che le variabili dinamiche non obbediscono alla legge commutativa della moltiplicazione, ma soddisfano piuttosto le ben note condizioni quantiche. Ne segue che le variabili dinamiche non si possono supporre numeri ordinari ( $c$ -numeri), ma le si possono chiamare numeri di tipo speciale ( $q$ -numeri). La teoria mostra che questi  $q$ -numeri possono essere in generale rappresentati da matrici i cui elementi sono  $c$ -numeri (funzioni di un parametro temporale).

“Quando si sono fatti i calcoli con i  $q$ -numeri e si sono ottenute tutte le matrici che si vogliono, sorge il problema di come ottenere i risultati fisici dalla teoria, cioè come ottenere dalla teoria i  $c$ -numeri da confrontare con i valori sperimentali.”

Così Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) inizia il suo sesto lavoro sulla proposta di una nuova meccanica <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Stimolato dall'articolo di Heisenberg, Dirac nel suo primo lavoro dimostra la corrispondenza tra le parentesi di Poisson classiche e i commutatori quantistici. A questo segue uno studio dello spettro dell'idrogeno, una generalizzazione quantistica delle variabili d'angolo e d'azione classiche e un primo tentativo di tenere conto di effetti relativistici con applicazione all'effetto Compton. La comparsa dei lavori di Schrödinger, con l'importanza assegnata all'equazione agli autovalori della hamiltoniana, gli suggerisce la formulazione generale del suo approccio algebrico agli operatori quantistici in un quinto lavoro, in cui anche sviluppa il metodo delle perturbazioni dipendenti dal tempo (cfr. cap. XI) e stabilisce la connessione tra simmetria della funzione d'onda e statistica delle particelle (cfr. cap. X). Infine, in questo sesto lavoro nel giro di un anno, avvia la nuova formulazione astratta che permette di chiarire l'interpretazione fisica della meccanica quantistica.

P.A.M. Dirac:

*The fundamental equations of quantum mechanics [Le equazioni fondamentali della meccanica quantistica]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 109** (1925) 642–653, ricevuto dalla rivista il 7 novembre 1925;

*Quantum mechanics and a preliminary investigation of the hydrogen atom [Meccanica quantistica e un'indagine preliminare dell'atomo di idrogeno]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 110** (1926) 561–579, ricevuto dalla rivista il 22 gennaio 1926;

I  $q$ -numeri di Dirac sono le matrici di Heisenberg o, equivalentemente, gli operatori autoaggiunti *quantistici* associati alle variabili dinamiche classiche. Secondo quanto discusso nel capitolo IV, un operatore  $A$  soddisfa un'equazione di moto, la (IV.10.9),

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[H, A],$$

che ha la stessa struttura formale dell'equazione di moto della variabile dinamica associata, pur di assumere la corrispondenza (IV.10.10) tra commutatore di due operatori e parentesi di Poisson tra le due corrispondenti variabili dinamiche classiche:

$$\{A, H\} \rightarrow -\frac{i}{\hbar}[A, H].$$

Mediante il risultato (IV.10.4),

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle [H, A] \rangle,$$

che generalizza il teorema di Ehrenfest e che coinvolge i valori di aspettazione degli operatori calcolati con la funzione d'onda che risolve l'equazione di Schrödinger, si stabilisce l'evoluzione temporale di quelli che Dirac chiama *c*-numeri e che in definitiva sono le quantità direttamente confrontabili con i dati sperimentali. Su questo risultato riposa anche la dimostrazione di Schrödinger che la sua formulazione mediante l'equazione d'onda è equivalente a quella della meccanica delle matrici.

Da un punto di vista pratico però il problema che si pone Dirac è quello di evitare la risoluzione dell'equazione di Schrödinger, necessaria se si richiede la funzione d'onda con cui si calcolano i *c*-numeri: l'idea è quella di ricorrere a qualche metodo algebrico che aggiri le difficoltà matematiche connesse con la risoluzione di un'equazione differenziale (alle derivate parziali), quale almeno si presenta inevitabilmente l'equazione di Schrödinger. Il metodo algebrico in realtà è quello già implicitamente suggerito dall'approccio della meccanica delle matrici: gli operatori quantistici associati alle variabili dinamiche vengono rappresentati da matrici. Occorre però definire meglio i termini di questo tipo di rappresentazione matematica. Dirac lo fa attraverso quella che chiama la teoria delle trasformazioni <sup>2</sup>. In questo

*The elimination of the nodes in quantum mechanics [L'eliminazione dei nodi in meccanica quantistica]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 111** (1926) 281–305, ricevuto dalla rivista il 27 marzo 1926;

*Relativity quantum mechanics with an application to Compton scattering [Meccanica quantistica relativistica con un'applicazione alla diffusione Compton]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 111** (1926) 405–423, ricevuto dalla rivista il 29 aprile 1926;

*On the theory of quantum mechanics [Sulla teoria della meccanica quantistica]*, Proceeding of the Royal Society of London **A 112** (1926) 661–677, ricevuto dalla rivista il 26 agosto 1926;

*The physical interpretation of the quantum mechanics [L'interpretazione fisica della meccanica quantistica]*, Proceedings of the Royal Society of London **A 113** (1927) 621–641, ricevuto dalla rivista il 2 dicembre 1926.

<sup>2</sup> Anche Jordan indipendentemente sviluppò un analogo metodo per risolvere il problema agli autovalori.

modo si tratta di trovare la rappresentazione in cui la matrice risulta diagonale: i suoi elementi diagonali costituiscono gli autovalori dell'operatore rappresentato dalla matrice stessa.

La formulazione di Dirac si fonda sull'intuizione che gli elementi di matrice si possano visualizzare come una generalizzazione del prodotto scalare tra vettori in opportuni spazi astratti e che la diagonalizzazione della matrice si ottenga essenzialmente tramite la giusta scelta dei versori del sistema di riferimento in questi spazi: tali versori risultano così autovettori dell'operatore associato alla matrice diagonale. Lo stato del sistema viene perciò rappresentato da un vettore nello spazio di Hilbert astratto ed evolve nel tempo secondo l'equazione di Schrödinger<sup>3</sup>.

Con la notazione di Dirac la formulazione della meccanica quantistica acquista una veste elegante e di immediata comprensione, chiarendo il parallelismo tra descrizione classica e descrizione quantistica.

La fisica classica tratta il problema del moto in termini di una traiettoria descritta da un punto rappresentativo del sistema: il punto si muove nello spazio delle fasi sotteso dalle variabili canoniche e dai loro momenti coniugati. Le successive posizioni assunte da tale punto sono determinate dalle equazioni del moto in una delle varie forme equivalenti (di Lagrange, di Hamilton o in termini di parentesi di Poisson). La conoscenza istante per istante delle coordinate di tale punto permette di conoscere anche il valore numerico assunto da una qualsiasi variabile dinamica, che in generale è funzione di tali coordinate.

Quantisticamente il sistema viene descritto da un vettore che si muove in un opportuno spazio di Hilbert astratto, soggetto all'evoluzione temporale fissata secondo l'equazione di Schrödinger. Le variabili dinamiche sono associate a operatori che agiscono in questo spazio di Hilbert e sono rappresentati da matrici (in generale a numero infinito di dimensioni). Rappresentazioni equivalenti sono possibili, come classicamente è possibile eseguire trasformazioni canoniche che lasciano inalterate le parentesi di Poisson tra le variabili dinamiche. La scelta della rappresentazione è dettata di volta in volta da ragioni di opportunità, in relazione alle osservabili che si vogliono misurare: i valori ottenibili da una misurazione sono infatti solo gli autoval-

---

P. Jordan: *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik* [Una nuova fondazione della meccanica quantistica], *Zeitschrift für Physik* **40** (1927) 809–838, ricevuto dalla rivista il 18 dicembre 1926; *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik. II.* [Una nuova fondazione della meccanica quantistica. II.], *Zeitschrift für Physik* **44** (1927) 1–25, ricevuto dalla rivista il 3 giugno 1927.

<sup>3</sup> Il primo vero tentativo di dare fondamento matematico alla meccanica quantistica è dovuto a David Hilbert (1862–1943), Johann (John) von Neumann (1903–1957) e Lothar Wolfgang Nordheim (n. 1899) che, lavorando a Göttingen nell'atmosfera della scuola di Max Born, conoscevano perfettamente i problemi matematici e interpretativi posti dalla nascente meccanica quantistica.

D. Hilbert, J. von Neumann e L. Nordheim: *Über die Grundlagen der Quantenmechanik* [Sui fondamenti della meccanica quantistica], *Mathematische Annalen* **98** (1927) 1–30.

La nozione di spazio di Hilbert astratto fu introdotta da von Neumann che, a partire da una conferenza tenuta a Göttingen il 20 maggio 1927 (*Mathematische Begründung der Quantenmechanik* [Fondazione matematica della meccanica quantistica], *Göttingen Nachrichten* (1927) 1–57), riuscì a chiarire la struttura matematica della meccanica quantistica in un testo fondamentale ancora oggi: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlino, 1932; trad. inglese: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1955.

ori dell'operatore associato all'osservabile e sono identificati dalla diagonalizzazione della corrispondente matrice.

In questo capitolo, dopo una discussione della nozione di funzionale lineare, che è alla base della formulazione di Dirac, viene presentata una teoria elementare delle rappresentazioni. Essa viene illustrata con alcuni esempi significativi, in parte già familiari e in parte nuovi e di notevole interesse dal punto di vista fisico. Lo scopo è quello di aiutare a comprendere una formulazione astratta e di vederne l'equivalenza con la teoria così come è stata finora sviluppata: ne scaturisce così una possibile descrizione dei fenomeni fisici indipendente dalla rappresentazione che si sceglie nel caso specifico per la soluzione pratica del problema. Vengono successivamente introdotte le trasformazioni unitarie per passare da una rappresentazione a un'altra equivalente: viene posto l'accento sul fatto che in generale le trasformazioni unitarie riflettono proprietà di simmetria del sistema e, come caso particolare, sono discussi gli operatori di rotazione<sup>4</sup>. Il capitolo si chiude con un paragrafo dedicato a un caso particolare di simmetria non descritta da un operatore unitario: l'inversione temporale.

### VI.1. Formulazione di Dirac

Nella descrizione quantistica di un sistema fisico un ruolo centrale è attribuito al concetto di *stato* del sistema, che, secondo i postulati riassunti al paragrafo IV.11, è rappresentato da un elemento dello spazio di Hilbert. La teoria può essere sviluppata in modo più generale di quanto proposto nel capitolo IV, in cui si è utilizzato uno spazio vettoriale (lineare) complesso costituito dalle funzioni  $\Psi(x)$  a quadrato sommabile. In realtà è conveniente ricorrere a uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  *astratto*, in cui i vettori, chiamati “ket” da Dirac e indicati con la notazione  $|a\rangle$ , soddisfano comunque il principio di sovrapposizione lineare che deve essere garantito in meccanica quantistica. Dunque, per ogni  $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$ , anche

$$|r\rangle = c_1|a\rangle + c_2|b\rangle \in \mathcal{H}. \quad (1.1)$$

Le lettere  $a, b, r$  servono a indicare collettivamente tutti i numeri quantici necessari a specificare lo stato corrispondente; i numeri  $c_1, c_2$  sono in generale numeri complessi, in quanto  $\mathcal{H}$  è uno spazio vettoriale complesso.

---

<sup>4</sup> La connessione tra proprietà di simmetria e leggi di conservazione era già nota nell'ambito della meccanica classica: basta ricordare il teorema di Amalie Emilie (Emmy) Noether (1882–1935) sull'esistenza di una corrente conservata ogni qualvolta la lagrangiana risulti invariante per una trasformazione di coordinate. Il teorema di Noether si trasferisce inalterato in una qualsiasi teoria di campo, sia essa classica o quantistica. Tuttavia l'esplorazione delle implicazioni delle proprietà di simmetria sulla descrizione quantistica di un sistema è principalmente dovuta a Eugene Paul Wigner (1902–1994) che applicò la teoria dei gruppi a problemi di fisica in un testo fondamentale, edito in tedesco nel 1931 e successivamente tradotto in inglese.

E.P. Wigner: *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1931. Traduzione inglese di J.J. Griffin: *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York, 1959.

Formulazione di Dirac

La formulazione di Dirac è basata sulle nozioni di *funzionale lineare* e di *spazio duale*. Si consideri per il momento uno spazio vettoriale lineare  $\mathcal{H}$  a numero finito  $n$  di dimensioni. Si definisce funzionale lineare su  $\mathcal{H}$  una corrispondenza lineare che associa a ogni  $|a\rangle \in \mathcal{H}$  un numero complesso  $\phi(a)$ . Pertanto se

$$\forall |a\rangle \in \mathcal{H} \Rightarrow \phi(a),$$

risulta anche

$$|r\rangle = c_1|a\rangle + c_2|b\rangle \Rightarrow \phi(r) = c_1\phi(a) + c_2\phi(b).$$

Vale il seguente *teorema*: a un qualunque funzionale lineare su  $\mathcal{H}$  corrisponde un unico  $|b\rangle \in \mathcal{H}$  tale che  $\forall |a\rangle \in \mathcal{H}$  il numero complesso  $\phi(a)$  rappresenti il prodotto scalare  $\langle b|a\rangle$ .

Infatti se  $\{|e_i\rangle\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) è una base in  $\mathcal{H}$ , risulta

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |e_i\rangle.$$

Dato inoltre che si ha a che fare con funzionali lineari, vale la relazione

$$\phi(a) = \sum_{i=1}^n a_i \phi(e_i),$$

che, se si pone

$$b_i^* = \phi(e_i),$$

può risciversi

$$\phi(a) = \sum_{i=1}^n b_i^* a_i \equiv \langle b|a\rangle.$$

Con ciò risulta definito univocamente il vettore

$$|b\rangle = \sum_{i=1}^n \phi^*(e_i) |e_i\rangle.$$

Da questo teorema seguono alcune considerazioni. Innanzi tutto il teorema implica che i funzionali lineari  $\phi(a)$  su  $\mathcal{H}$  siano in corrispondenza biunivoca con i vettori  $|b\rangle \in \mathcal{H}$ . Essi formano uno spazio vettoriale lineare  $\mathcal{H}'$  di dimensione  $n$ , che si chiama *spazio duale* di  $\mathcal{H}$ . Con Dirac si indichino gli elementi di  $\mathcal{H}'$  con la notazione  $\langle a|$  e li si chiamino “bra”. Le relazioni

$$b_i^* = \phi(e_i) \equiv \langle b|e_i\rangle, \quad b_i = \phi^*(e_i),$$

mostrano che la corrispondenza biunivoca tra  $\mathcal{H}$  e il suo duale  $\mathcal{H}'$  è *antilineare*. Quindi valgono le seguenti proprietà:

- a) al ket  $|a\rangle \in \mathcal{H}$  corrisponde il bra  $\langle a| \in \mathcal{H}'$  e viceversa;
- b) se  $\langle a|, \langle b| \in \mathcal{H}'$ , il bra  $\langle r| = c_1^* \langle a| + c_2^* \langle b| \in \mathcal{H}'$  corrisponde al ket  $|r\rangle = c_1 |a\rangle + c_2 |b\rangle \in \mathcal{H}$ ;
- c)  $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$ ;
- d)  $\langle a|a\rangle \geq 0$ , dove il segno di uguaglianza vale se e solo se  $|a\rangle \equiv 0$ . Quindi  $\langle a|a\rangle$  è la *norma* del vettore  $|a\rangle$ .

In conclusione, il simbolo  $\langle b|a\rangle$  ha proprio tutte le proprietà del prodotto scalare di due elementi  $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$ , in perfetta analogia con le proprietà (IV.1.2)–(IV.1.6) del prodotto scalare (IV.1.1) tra due funzioni  $f, g \in \mathcal{L}^2$ . Per come è stata scritta, la parentesi  $\langle b|a\rangle$ , che in gergo viene denominata col vocabolo inglese “bracket” (= *parentesi*), viene materialmente spezzata nel prodotto tra il bra  $\langle b|$  e il ket  $|a\rangle$ . Questo giustifica i nomi inventati da Dirac per i bra e i ket <sup>5</sup>.

A livello quantistico interessano in generale spazi di Hilbert  $\mathcal{H}$  a numero infinito di dimensioni. Le considerazioni precedenti sono tutte valide, purché si considerino *funzionali lineari continui* <sup>6</sup>.

Si osservi inoltre che, per gli stessi motivi di interpretazione che hanno imposto l'uso di funzioni  $\in \mathcal{L}^2$ , nello spazio  $\mathcal{H}$  interessano vettori a norma finita. Conviene dunque utilizzare vettori normalizzati, cioè  $\langle a|a\rangle = 1$ : in tal caso resta indeterminata una fase, in quanto il vettore  $e^{i\alpha}|a\rangle$ , con  $\alpha$  reale, descrive lo stesso stato fisico. La teoria è allora sviluppata a meno di un arbitrario fattore di fase di modulo uno e comune a tutti i vettori, ma ciò è senza conseguenze.

Nello spazio  $\mathcal{H}$  ha interesse l'azione degli operatori e in particolare degli operatori lineari, cioè operatori  $F$  tali che sia

$$F(c_1|a\rangle + c_2|b\rangle) = c_1 F|a\rangle + c_2 F|b\rangle. \quad (1.2)$$

Per applicazione di un operatore  $F$  al ket  $|a\rangle$  si ottiene il ket  $|a'\rangle$ :

$$|a'\rangle = F|a\rangle \equiv |Fa\rangle. \quad (1.3)$$

---

<sup>5</sup> P.A.M. Dirac: *The principles of quantum mechanics*, Oxford, The Clarendon Press, 1930 e successive edizioni, la quarta delle quali è tradotta in italiano [*I principi della meccanica quantistica*, Paolo Boringhieri, Torino, 1959].

<sup>6</sup> È questo il contenuto del teorema di rappresentazione dei funzionali lineari continui, noto anche come teorema di Riesz–Fréchet. Il teorema fu annunciato nel 1907 simultaneamente e indipendentemente da Frigyes (Frédéric) Riesz (1880–1956) e da René Maurice Fréchet (1878–1973). Riesz riprese più volte l'argomento producendo diverse dimostrazioni fino a quella riportata a p. 61 del testo di F. Riesz e B.Sz.-Nagy: *Leçons d'analyse fonctionnelle*, loc. cit., n. 11 p. 154.

F. Riesz: *Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables* [Su una specie di geometria analitica dei sistemi di funzioni sommabili], Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **144** (1907) 1409–1411.

M. Fréchet: *Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires* [Sugli insiemi di funzioni e le operazioni lineari], Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **144** (1907) 1414–1416.

*Formulazione di Dirac*

Per la corrispondenza tra  $\mathcal{H}$  e del suo duale  $\mathcal{H}'$ , ai ket  $|a\rangle$  e  $|a'\rangle$  devono corrispondere biunivocamente i bra  $\langle a|$  e  $\langle a'|$ . Per stabilire come si ottiene  $\langle a'|$  da  $\langle a|$  basta tenere presente che l'espressione  $\langle b|Fa\rangle$  è lineare in  $|a\rangle$  e quindi deve esistere un bra  $\langle b|$  tale che  $\langle b|Fa\rangle = \langle b'|a\rangle$ . Cioè si deve avere

$$\langle b|Fa\rangle = \langle F^\dagger b|a\rangle, \quad (1.4)$$

$$|b'\rangle = F^\dagger |b\rangle \equiv |F^\dagger b\rangle. \quad (1.5)$$

Allora dalla corrispondenza tra  $|a\rangle$  e  $\langle a|$  segue la corrispondenza tra  $|a'\rangle$  della (1.3) e

$$\langle a'| = \langle F^\dagger a| = \langle a|F. \quad (1.6)$$

Al variare di  $|a\rangle \in \mathcal{D}(F)$  il prodotto scalare (1.4) definisce l'operatore  $F^\dagger$  aggiunto di  $F$ , insieme col suo dominio  $\mathcal{D}(F^\dagger)$  costituito da tutti i  $|b\rangle$  per cui la (1.4) è verificata. Dalla (1.3) e dalla (1.6) segue che  $F$  può agire a destra (cioè in  $\mathcal{H}$ ) oppure a sinistra (cioè in  $\mathcal{H}'$ ) tramite il suo aggiunto  $F^\dagger$ .

Allo stesso tempo il prodotto scalare  $\langle b|Fa\rangle$ , al variare di  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ , fornisce la *rappresentazione* dell'operatore  $F$  in forma di *matrice*<sup>7</sup> i cui elementi  $F_{ba}$ , ordinati per righe secondo  $|b\rangle$  e per colonne secondo  $|a\rangle$ , sono dati appunto da  $\langle b|Fa\rangle$ . La (1.4) indica che si può utilizzare la seguente notazione:

$$\begin{aligned} F_{ba} &= \langle b|Fa\rangle = \langle b| (F|a\rangle) \\ &= \langle F^\dagger b|a\rangle = (\langle b|F) |a\rangle \\ &\equiv \langle b|F|a\rangle, \end{aligned} \quad (1.7)$$

con la proprietà generale

$$\langle a|F|b\rangle^* = \langle b|F^\dagger|a\rangle. \quad (1.8)$$

Se

$$F^\dagger = F, \quad (1.9)$$

e quindi

$$\langle b|Fa\rangle = \langle Fb|a\rangle, \quad (1.10)$$

l'operatore  $F$  è un operatore autoaggiunto.

Si possono estendere agli spazi astratti  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  tutte le proprietà già note per gli spazi di Hilbert associati a funzioni  $\in \mathcal{L}^2$ . In particolare si può studiare l'equazione agli autovalori per un operatore  $A$  sia in  $\mathcal{H}$ , sia in  $\mathcal{H}'$ :

---

<sup>7</sup> Per un breve cenno sulle proprietà delle matrici e alcuni elementi di calcolo matriciale, si veda l'Appendice C.

Rappresentazioni

$$\begin{aligned} A|n\rangle &= \alpha_n |n\rangle, \\ \langle m|A &= \alpha'_m \langle m|. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Se  $A = A^\dagger$ , l'equazione agli autovalori gode delle seguenti proprietà:

- a) i due spettri di autovalori  $\{\alpha_n\}$ ,  $\{\alpha'_m\}$  coincidono;
- b) tutti gli autovalori sono reali;
- c)  $\langle n|$  è il coniugato di  $|n\rangle$ ;
- d) l'insieme degli autovettori è completo e può essere ortonormalizzato, cioè

$$\langle m|n\rangle = \delta_{nm}. \quad (1.12)$$

Allora,  $\forall |f\rangle \in \mathcal{H}$ , si ha

$$|f\rangle = \sum_n a_n |n\rangle, \quad (1.13)$$

con i coefficienti,

$$a_n = \langle n|f\rangle, \quad (1.14)$$

che rappresentano le proiezioni di  $|f\rangle$  secondo i vettori di base  $|n\rangle$ .

Se si applica l'operatore

$$P_n = |n\rangle\langle n| \quad (1.15)$$

al ket  $|f\rangle$ ,

$$P_n|f\rangle = |n\rangle\langle n|f\rangle = a_n |n\rangle, \quad (1.16)$$

si trova che  $P_n$  ha l'effetto di proiettare  $|f\rangle$  nella direzione  $|n\rangle$ : perciò l'operatore  $P_n$  è detto *operatore di proiezione*. Si verifica subito che  $P_n$  possiede le seguenti proprietà:

$$P_n^2 = P_n, \quad (1.17)$$

$$P_n^\dagger = P_n, \quad (1.18)$$

cioè il proiettore  $P_n$ , oltre a essere un operatore lineare, è *idempotente* e *autoaggiunto*<sup>8</sup>.

Se  $\{|n\rangle\}$  è l'insieme dei vettori di base, risulta

$$\sum_n P_n = \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}, \quad (1.19)$$

<sup>8</sup> Più in generale, un operatore lineare simmetrico e idempotente è un proiettore.

come si può subito verificare applicando la (1.19) a un qualsiasi  $|f\rangle \in \mathcal{H}$ . La (1.19) esprime in altro modo la relazione di completezza per i vettori di base: essa indica che, nello spazio di Hilbert assegnato, l'operatore identità  $\mathbb{1}$  si può visualizzare come decomposto nella somma di tutti i proiettori lungo i vari vettori di base. Si dice che la (1.19) rappresenta la *spettralizzazione* (o la *risoluzione*) dell'identità.

Nella notazione di Dirac appare più evidente la possibilità di risolvere l'equazione agli autovalori ricorrendo alla diagonalizzazione della matrice che rappresenta l'operatore in questione. Infatti, una volta scelta la base completa ortonormalizzata  $\{|n\rangle\} \in \mathcal{H}$ , se si inserisce l'operatore identità, risolto secondo la (1.19), nell'equazione

$$A|f\rangle = \alpha|f\rangle, \quad (1.20)$$

si ottiene

$$\sum_n (A - \alpha)|n\rangle\langle n|f\rangle = 0. \quad (1.21)$$

Moltiplicando scalarmente per  $\langle m|$  e utilizzando la (1.12), si ha

$$\sum_n [\langle m|A|n\rangle - \alpha \delta_{nm}] \langle n|f\rangle = 0. \quad (1.22)$$

La (1.22) è un sistema di equazioni algebriche omogenee nelle incognite  $\langle n|f\rangle \equiv a_n$ , la cui condizione di solubilità implica:

$$\det |\langle m|A|n\rangle - \alpha \delta_{nm}| = 0. \quad (1.23)$$

La (1.23) è la condizione perché la matrice  $\langle m|A|n\rangle$  sia diagonale, ma è anche un polinomio in  $\alpha$  che si deve azzerare. Per ogni  $\alpha$  che soddisfa la (1.23) si ha un autovalore di  $A$  che, inserito nella (1.22), permette di ricavare i coefficienti  $a_n$  e quindi l'autovettore  $|f\rangle = |\alpha\rangle$  corrispondente.

*Esercizio 1.1*

Se  $\{|\alpha\rangle\}$  è l'insieme completo di autostati dell'operatore  $A$  con corrispondenti autovalori  $\{\alpha\}$ , verificare la seguente spettralizzazione dell'operatore  $A$ :

$$A = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \alpha \langle \alpha|. \quad (1.24)$$

[Suggerimento: si applichi l'operatore  $A$  a un generico stato  $|f\rangle = \sum_{\alpha} a_{\alpha} |\alpha\rangle$ .]

In generale lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  ha un numero infinito di dimensioni: ciò comporta quindi che le matrici che rappresentano gli operatori siano matrici a numero infinito di righe e di colonne. Perciò il procedimento di diagonalizzazione è applicabile solo in linea di principio se  $\mathcal{H}$  ha un numero infinito di dimensioni. In

pratica il procedimento è tuttavia ancora utile se esiste qualche criterio per troncatura la matrice  $\langle m|A|n\rangle$  a un numero finito di righe e colonne.

In presenza di spettro continuo, gli autovettori della (1.20) non sono normalizzabili. Valgono però ancora le proprietà *a) – c)* per le soluzioni della (1.11), anche se gli autovettori non appartengono a  $\mathcal{H}$ . Indicando con  $|\xi\rangle$  un vettore non normalizzabile e con  $|n\rangle$  uno a norma finita, si ammette in generale che  $\langle n|\xi\rangle$  fornisca un prodotto scalare finito, che è lineare rispetto a  $|\xi\rangle$  e antilineare rispetto a  $|n\rangle$ . Inoltre

$$\langle \xi|n\rangle^* = \langle n|\xi\rangle. \quad (1.25)$$

L'ortogonalità tra vettori non normalizzabili, appartenenti ad autovalori diversi, è ancora garantita. È conveniente imporre la seguente normalizzazione:

$$\langle \xi|\xi'\rangle = \delta(\xi - \xi'). \quad (1.26)$$

Infine, in presenza di spettro continuo, si può ancora spettralizzare l'identità in termini di proiettori  $P_\xi = |\xi\rangle\langle\xi|$ . Se c'è solo lo spettro continuo, si ha

$$\int |\xi\rangle d\xi\langle\xi| = \mathbb{1}. \quad (1.27)$$

È immediata l'estensione al caso di spettro sia discreto, sia continuo. Per esempio, in tali condizioni la spettralizzazione dell'identità risulta

$$\sum_n P_n + \int d\xi P_\xi = \sum_n |n\rangle\langle n| + \int |\xi\rangle d\xi\langle\xi| = \mathbb{1}. \quad (1.28)$$

*Esempio 1.1*

Si indichi con  $\mathbf{x}$  l'operatore posizione <sup>9</sup>. Nella notazione di Dirac l'equazione agli autovalori si scrive

$$\mathbf{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad (1.29)$$

dove si è indicato con  $x$  l'autovalore corrispondente all'autoket  $|x\rangle$ . Già si sa che  $x$  è un numero reale in  $(-\infty, +\infty)$  e che quindi lo spettro di  $\mathbf{x}$  è continuo. Occorre perciò adottare la normalizzazione (1.26),

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x'). \quad (1.30)$$

Inoltre per la (1.27) si ha

$$\int |x\rangle dx\langle x| = \mathbb{1}. \quad (1.31)$$

---

<sup>9</sup> In questo esempio, e nel successivo, l'operatore viene indicato in grassetto per non confonderlo col suo autovalore.

*Formulazione di Dirac*

Se il vettore che descrive il sistema in esame all'istante  $t$  viene indicato con il ket  $|\Psi(t)\rangle$ , il prodotto scalare

$$\langle x|\Psi(t)\rangle = \Psi(x, t) \quad (1.32)$$

definisce la funzione finora usata per descrivere lo stesso sistema nello spazio delle posizioni. La funzione  $\Psi(x, t)$  è il *rappresentativo* del ket  $|\Psi(t)\rangle$  nello spazio delle posizioni e la (1.32) fornisce il legame tra la formulazione astratta in termini del ket  $|\Psi(t)\rangle$  e quella, già introdotta nei capitoli precedenti, che si chiama *rappresentazione delle posizioni* (o di *Schrödinger*) e che usa la funzione  $\Psi(x, t)$ .

La corrispondenza tra formulazione astratta e rappresentazione delle posizioni si completa considerando la definizione di prodotto scalare e ritrovando la relazione di chiusura. Siano  $|f\rangle, |g\rangle$  due ket  $\in \mathcal{H}$ ; per la (1.31) e la (1.32) si ha

$$\begin{aligned} \langle f|g\rangle &= \int \langle f|x\rangle dx \langle x|g\rangle \\ &= \int dx f^*(x)g(x), \end{aligned} \quad (1.33)$$

che è quindi l'usuale prodotto scalare nella rappresentazione delle posizioni, in accordo con la definizione (IV.1.1). Inoltre, se  $\{|n\rangle\}$  è una base completa ortonormale in  $\mathcal{H}$  e  $u_n(x) = \langle x|n\rangle$  è il rappresentativo di  $|n\rangle$  nella rappresentazione delle posizioni, si ha

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \langle x|\mathbb{1}|x'\rangle \\ &= \sum_n \langle x|n\rangle \langle n|x'\rangle \\ &= \sum_n u_n(x)u_n^*(x'). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Questo risultato permette di interpretare la relazione di chiusura (IV.2.9) come spettralizzazione dell'identità (1.19).

*Esempio 1.2*

Anche per l'operatore impulso  $\mathbf{p}$  (in una dimensione) l'equazione agli autovalori

$$\mathbf{p}|p\rangle = p|p\rangle \quad (1.35)$$

presenta uno spettro continuo di autovalori  $p$  in  $(-\infty, +\infty)$ . Gli autovettori corrispondenti sono normalizzati secondo la (1.26):

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p'). \quad (1.36)$$

Nella rappresentazione delle posizioni la (1.35) si riscrive, in accordo con la (1.32),

$$\langle x|\mathbf{p}|p\rangle = p\langle x|p\rangle,$$

cioè

*Rappresentazioni*

$$\int \langle x | \mathbf{p} | x' \rangle dx' \langle x' | p \rangle = p \langle x | p \rangle. \quad (1.37)$$

D'altra parte, posto

$$\Phi(x) = \langle x | p \rangle, \quad (1.38)$$

e tenuto presente che nella rappresentazione delle posizioni è

$$\langle x | \mathbf{p} | x' \rangle = \delta(x - x') \left( -i \hbar \frac{d}{dx'} \right), \quad (1.39)$$

la (1.37) acquista la nota forma dell'equazione agli autovalori dell'operatore impulso nella rappresentazione delle posizioni:

$$-i \hbar \frac{d}{dx} \Phi(x) = p \Phi(x). \quad (1.40)$$

Le sue autofunzioni sono quindi le onde piane ( $\hbar k = p$ ):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \hbar}} e^{ikx}. \quad (1.41)$$

*Esempio 1.3*

La rappresentazione delle posizioni (1.32) utilizza gli autostati dell'operatore posizione per costruire le funzioni corrispondenti ai ket dello spazio astratto. Però, così come al paragrafo III.7 si è visto che è ugualmente possibile lavorare nello spazio degli impulsi invece che nello spazio delle posizioni, si possono ora utilizzare gli autostati dell'operatore impulso per costruire la *rappresentazione degli impulsi*. Allora a un vettore  $|f\rangle \in \mathcal{H}$  corrisponde la funzione

$$\tilde{f}(p) = \langle p | f \rangle. \quad (1.42)$$

Inserendo l'identità scritta nella forma (1.31) e utilizzando la (1.38) con la (1.41), si ha

$$\begin{aligned} \tilde{f}(p) &= \int \langle p | x \rangle dx \langle x | f \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \hbar}} \int dx e^{-ikx} f(x). \end{aligned} \quad (1.43)$$

La (1.43) mostra che la funzione  $\tilde{f}(p)$ , rappresentativa di  $|f\rangle$  nella rappresentazione degli impulsi, è la trasformata di Fourier della funzione  $f(x)$ , rappresentativa dello stesso  $|f\rangle$  nella rappresentazione delle posizioni.

Nella rappresentazione degli impulsi, secondo la (1.35), l'operatore impulso è un operatore moltiplicativo cui corrisponde l'equazione agli autovalori

$$\langle p | \mathbf{p} | f \rangle = p \langle p | f \rangle,$$

cioè

Formulazione di Dirac

$$\mathbf{p} \tilde{f}(p) = p \tilde{f}(p). \quad (1.44)$$

Invece nella rappresentazione degli impulsi per l'operatore posizione si ha

$$\begin{aligned} \langle p | \mathbf{x} | f \rangle &= \int dx \langle p | \mathbf{x} | x \rangle \langle x | f \rangle \\ &= \int dx x \langle p | x \rangle \langle x | f \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx x e^{-ikx} \langle x | f \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} i \frac{\partial}{\partial k} \int dx e^{-ikx} \langle x | f \rangle \\ &= i \frac{\partial}{\partial k} \int \langle p | x \rangle dx \langle x | f \rangle \\ &= i \hbar \frac{\partial}{\partial p} \langle p | f \rangle. \end{aligned}$$

Pertanto in definitiva risulta

$$\langle p | \mathbf{x} | p' \rangle = \delta(p - p') i \hbar \frac{\partial}{\partial p'}, \quad (1.45)$$

in accordo con i risultati del paragrafo III.7.

*Esercizio 1.2*

Partendo dall'equazione di Schrödinger per una particella nello spazio dei ket,

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \left[ \frac{p^2}{2m} + V \right] |\Psi(t)\rangle, \quad (1.46)$$

ottenere le espressioni corrispondenti nella rappresentazione delle posizioni e nella rappresentazione reciproca degli impulsi.

*Esempio 1.4*

Si consideri un operatore  $\mathbf{J}$ , i cui componenti cartesiani  $J_x, J_y, J_z$  sono operatori autoaggiunti e soddisfano le seguenti regole di commutazione:

$$[J_i, J_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} J_k, \quad (1.47)$$

$$[J^2, J_x] = [J^2, J_y] = [J^2, J_z] = 0, \quad (1.48)$$

dove

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \quad (1.49)$$

*Rappresentazioni*

Le proprietà (1.47) – (1.49) sono quelle degli operatori corrispondenti al quadrato del momento angolare e alle sue componenti, ma qui non è stata fatta alcuna ipotesi sull'esistenza di questa analogia classica. Dato che  $J_x, J_y, J_z$  sono autoaggiunti, anche  $J^2$  è un operatore autoaggiunto, con autovalori non negativi, che si possono indicare con  $\hbar^2 j(j+1)$ . Siano inoltre  $\hbar m$  gli autovalori di  $J_z$ . Allora gli autovettori simultanei di  $J^2$  e di  $J_z$  si possono chiamare  $|jm\rangle$ , in modo da rendere espliciti i numeri quantici che ne definiscono gli autovalori corrispondenti, cioè

$$J^2|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)|jm\rangle, \quad (1.50)$$

$$J_z|jm\rangle = \hbar m|jm\rangle. \quad (1.51)$$

Per trovare gli autovalori  $j$  e  $m$  conviene definire gli operatori

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y, \quad (1.52)$$

che soddisfano le regole di commutazione

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z, \quad (1.53)$$

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm}. \quad (1.54)$$

Siccome è

$$J_{\mp}J_{\pm} = J^2 - J_z(J_z \pm \hbar), \quad (1.55)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} J_{\mp}J_{\pm}|jm\rangle &= \hbar^2[j(j+1) - m(m \pm 1)]|jm\rangle \\ &= \hbar^2(j \mp m)(j \pm m + 1)|jm\rangle. \end{aligned} \quad (1.56)$$

D'altra parte la norma di un ket non può essere negativa. In particolare quindi la norma di  $J_{\pm}|jm\rangle$  è

$$\langle jm|J_{\mp}J_{\pm}|jm\rangle \geq 0, \quad (1.57)$$

che per la (1.56) fornisce una condizione sugli autovalori delle (1.50) e (1.51):

$$(j \mp m)(j \pm m + 1) \geq 0. \quad (1.58)$$

La (1.58) ha le seguenti conseguenze:

- a)  $|m| \leq j$ ;
- b)  $J_{\pm}|jm\rangle = 0$ , se e solo se  $j \mp m = 0$ ; inoltre,
- c) per  $j \neq \pm m$ ,  $J_{\pm}|jm\rangle$  è un vettore proporzionale a  $|j, m \pm 1\rangle$ .

Quest'ultima conclusione si può dimostrare applicando  $J^2$  e  $J_z$  al ket  $J_{\pm}|jm\rangle$ :

$$J^2 J_{\pm}|jm\rangle = J_{\pm} J^2|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) J_{\pm}|jm\rangle,$$

Formulazione di Dirac

$$J_z J_{\pm} |jm\rangle = J_{\pm} (J_z \pm \hbar) |jm\rangle = \hbar(m \pm 1) J_{\pm} |jm\rangle.$$

Dunque,  $J_+$  ( $J_-$ ) aumenta (diminuisce) di una unità il valore di  $m$ , ma non modifica  $j$ . Allora per la condizione *b*), partendo da uno stato  $|jm\rangle$  si può costruire  $J_+ |jm\rangle$ ,  $J_+^2 |jm\rangle$ ,  $\dots$ ,  $J_+^p |jm\rangle$  con  $p$  intero non negativo, tale che sia  $J_+^p |jm\rangle \neq 0$ , ma  $J_+^{p+1} |jm\rangle = 0$ . Ciò si verifica per

$$m + p = j,$$

ossia

$$j - m = p \geq 0. \quad (1.59)$$

Similmente, applicando  $q$  volte  $J_-$  a  $|jm\rangle$ , si ottiene

$$m - q = -j,$$

ossia

$$j + m = q \geq 0. \quad (1.60)$$

Dalle (1.59) e (1.60) segue

$$p + q = 2j.$$

Quindi i possibili valori di  $j$  sono interi o seminteri:

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (1.61)$$

Per ogni  $j$ , inoltre, per la *a*) risulta

$$|m| \leq j. \quad (1.62)$$

Si ritrova la (IV.2.41) per  $j \equiv l =$  intero. In questo caso i rappresentativi degli stati  $|lm\rangle$  nella rappresentazione delle posizioni,  $\langle \theta\phi | lm \rangle$ , sono le armoniche sferiche  $Y_{lm}(\theta\phi)$ , autofunzioni degli operatori quantistici del quadrato del momento angolare e della sua terza componente, associati al momento angolare classico  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . Nella (1.61) però compaiono anche i valori di  $j$  seminteri, cui corrisponde un operatore  $J^2$  che non ha analogo classico: l'unico requisito formale è che valgano le (1.47) – (1.49). Si vedrà al capitolo IX che effettivamente esistono osservabili associate a operatori con queste proprietà.

Per la costruzione degli autostati simultanei di  $J^2$  e  $J_z$  si può procedere nel modo seguente. Si supponga di conoscere lo stato  $|jm\rangle$  normalizzato. Mediante applicazione successiva degli operatori  $J_{\pm}$  e utilizzo della proprietà *c*), si possono ricavare tutti gli altri stati con lo stesso  $j$  e con  $|m| \leq j$ . Infatti per la proprietà *c*) è

$$J_{\pm} |jm\rangle = c_m |j, m \pm 1\rangle. \quad (1.63)$$

Per la (1.58) la norma  $|c_m|^2$  di  $J_{\pm} |jm\rangle$  risulta

*Rappresentazioni*

$$|c_m|^2 = \hbar^2 [j(j+1) - m(m \pm 1)]. \quad (1.64)$$

Imponendo le fasi in modo che  $c_m$  sia reale, si ha allora

$$J_{\pm}|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j, m \pm 1\rangle. \quad (1.65)$$

L'applicazione di  $J_{\pm}$  a  $|j, m \pm 1\rangle$  produce nello stesso modo  $|j, m \pm 2\rangle$  e così via tutti gli altri. L'operazione si arresta quando  $J_{\pm}$  viene applicato a  $|j, \pm j\rangle$ , perché fornisce risultato nullo:

$$J_+|jj\rangle = J_-|j, -j\rangle = 0. \quad (1.66)$$

I  $2j + 1$  autostati di  $J^2$  e  $J_z$

$$|jj\rangle, |j, j-1\rangle, \dots, |jm\rangle, \dots, |j, -j+1\rangle, |j, -j\rangle \quad (1.67)$$

sottendono un sottospazio a  $2j + 1$  dimensioni, che si *trasforma in sé* per applicazione degli operatori  $J_x, J_y, J_z$ .

*VI.2. Teoria matriciale dell'oscillatore armonico lineare*

La teoria quantistica dell'oscillatore armonico lineare può essere formulata anche in termini matriciali utilizzando la notazione di Dirac. Il problema consiste nel trovare autostati e autovalori di  $H$ ,

$$H|l\rangle = E_l|l\rangle, \quad (2.1)$$

ricorrendo semplicemente alla conoscenza della hamiltoniana (V.4.1) e della regola di commutazione elementare

$$[x, p] = i\hbar. \quad (2.2)$$

Utilizzando la spettralizzazione dell'identità (1.19) sulla base degli autostati di  $H$  e prefissando lo stato  $|l\rangle$ , l'equazione agli autovalori per  $H$  può risciversi nella *rappresentazione dell'energia*:

$$\begin{aligned} \langle k|H|l\rangle &= E_l \langle k|l\rangle \\ &= \frac{1}{2m} \sum_j \langle k|p|j\rangle \langle j|p|l\rangle + \frac{1}{2}m\omega^2 \sum_j \langle k|x|j\rangle \langle j|x|l\rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dato che  $p$  è autoaggiunto, si ha

$$\langle j|p|l\rangle = \langle l|p^\dagger|j\rangle^* = \langle l|p|j\rangle^*.$$

Similmente, per  $x$  risulta

$$\langle j|x|l\rangle = \langle l|x|j\rangle^*.$$

Allora gli elementi diagonali ( $k = l$ ) nella (2.3) sono somme di moduli quadrati di elementi di matrice e perciò non negativi. Questo significa che non sono possibili autovalori negativi di  $H$ . Inoltre un autovalore può essere nullo solo se gli elementi di matrice  $\langle k|p|j\rangle$  e  $\langle k|x|j\rangle$  si azzerano per tutti i  $j$ : ma ciò non è compatibile con l'elemento diagonale  $k$ -esimo della (2.2). Pertanto tutti gli autovalori sono positivi.

Si calcoli ora il commutatore di  $x$  e di  $p$  con  $H$ :

$$[x, H] = \frac{i\hbar}{m}p, \quad (2.4)$$

$$[p, H] = -i\hbar m\omega^2 x. \quad (2.5)$$

Espressioni di questo tipo sono utili in generale per il calcolo degli elementi di matrice di un operatore nella rappresentazione dell'energia, perché riconducono al calcolo degli elementi di matrice di un commutatore in cui compare la hamiltoniana, che in questa rappresentazione è diagonale. Allora dalla (2.4) si ottiene

$$\langle k|[x, H]|l\rangle = \frac{i\hbar}{m}\langle k|p|l\rangle,$$

con

$$\sum_j \left[ \langle k|x|j\rangle\langle j|H|l\rangle - \langle k|H|j\rangle\langle j|x|l\rangle \right] = (E_l - E_k)\langle k|x|l\rangle$$

e quindi

$$(E_l - E_k)\langle k|x|l\rangle = \frac{i\hbar}{m}\langle k|p|l\rangle. \quad (2.6)$$

Similmente, dalla (2.5) si ha

$$(E_l - E_k)\langle k|p|l\rangle = -i\hbar m\omega^2\langle k|x|l\rangle. \quad (2.7)$$

Eliminando  $\langle k|x|l\rangle$  dalle (2.6) e (2.7) si trova

$$\left[ (E_l - E_k)^2 - \hbar^2\omega^2 \right] \langle k|p|l\rangle = 0, \quad (2.8)$$

che può essere soddisfatta, a fissato  $|l\rangle$ , solo per uno stato  $|k\rangle$  tale che sia

$$E_l - E_k = \pm\hbar\omega. \quad (2.9)$$

Infatti, se nella (2.8) si impone  $\langle k|p|l\rangle = 0$ , deve essere anche  $\langle k|x|l\rangle = 0$ : ma ciò non è possibile per la (2.2).

*Rappresentazioni*

Si vede dunque che gli autovalori positivi differiscono tra di loro di multipli interi di  $\hbar\omega$ . Per conoscere lo spettro basta ora conoscere l'autovalore più basso. A tale scopo si moltiplichi per  $-im\omega$  la (2.6) sommandola alla (2.7):

$$(E_l - E_k - \hbar\omega)\langle k|p - im\omega x|l\rangle = 0. \quad (2.10)$$

Dato che allora  $\langle k|p - im\omega x|l\rangle$  si azzera sempre, eccetto nel caso in cui sia  $E_k = E_l - \hbar\omega$ , il risultato di applicare l'operatore  $(p - im\omega x)$  allo stato  $|l\rangle$  è quello di ottenere uno stato proporzionale a  $|k\rangle$ , che ha un'energia inferiore di  $\hbar\omega$  a quella dello stato  $|l\rangle$ . In modo simile si dimostra che l'operatore  $(p + im\omega x)$  ha l'effetto di innalzare l'energia di  $\hbar\omega$ .

Partendo da uno stato  $|l\rangle$  qualsiasi, la ripetuta applicazione dell'*operatore di abbassamento*,  $(p - im\omega x)$ , porta alla fine al risultato di trovare lo stato con l'energia più bassa  $|0\rangle$ . Una successiva applicazione provoca

$$(p - im\omega x)|0\rangle = 0, \quad (2.11)$$

che è l'equazione di definizione per lo stato fondamentale  $|0\rangle$ . Per trovarne l'energia, basta applicare alla (2.11) l'*operatore di innalzamento*,  $(p + im\omega x)$ :

$$\begin{aligned} (p + im\omega x)(p - im\omega x)|0\rangle &= [p^2 + m^2\omega^2 x^2 + im\omega(xp - px)]|0\rangle \\ &= (p^2 + m^2\omega^2 x^2 - m\hbar\omega)|0\rangle \\ &= 2m(H - \frac{1}{2}\hbar\omega)|0\rangle = 0. \end{aligned}$$

Pertanto l'autovalore di  $|0\rangle$  è  $\frac{1}{2}\hbar\omega$  e quindi lo spettro è proprio quello della (V.4.12).

Conviene moltiplicare gli operatori di innalzamento e di abbassamento dell'energia rispettivamente per  $-i/\sqrt{2m\hbar\omega}$  e  $i/\sqrt{2m\hbar\omega}$ , in modo da renderli adimensionali. Così si ottengono quelli che vengono detti *operatori di creazione*,  $a^\dagger$ , e di *distruzione*,  $a$ ,

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p, \quad (2.12)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p, \quad (2.13)$$

che sono ovviamente l'uno l'hermitiano coniugato dell'altro. Dalla (2.2) segue la regola di commutazione:

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (2.14)$$

Si verifica inoltre che la hamiltoniana  $H$  può risciversi nella forma

$$H = (a^\dagger a + \frac{1}{2})\hbar\omega. \quad (2.15)$$

Dalla forma della hamiltoniana (2.15) e del suo spettro (V.4.12) segue che l'operatore  $N = a^\dagger a$  commuta con  $H$  e ha gli stessi autostati di  $H$  corrispondenti ad autovalori  $n$  che sono gli interi non negativi. Per questa ragione l'operatore  $N = a^\dagger a$ , che conta il livello di eccitazione, viene spesso indicato col nome di *operatore numero*.

Gli unici elementi di matrice non nulli di  $a$  sono del tipo  $\langle n-1|a|n\rangle$ , che si può indicare con  $\lambda_n$ . Similmente, gli unici elementi di matrice non nulli di  $a^\dagger$  sono del tipo  $\langle n|a^\dagger|n-1\rangle = \lambda_n^*$ . Allora gli elementi di matrice diagonali di  $a^\dagger a$  sono

$$\begin{aligned}\langle n|a^\dagger a|n\rangle &= \sum_{n'} \langle n|a^\dagger|n'\rangle \langle n'|a|n\rangle \\ &= |\lambda_n|^2 \\ &\equiv n.\end{aligned}$$

Perciò  $\lambda_n$  è uguale a  $\sqrt{n}$ , a meno di un possibile fattore di fase di modulo unitario, che può essere posto tranquillamente uguale a 1.

Pertanto si ha

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (2.16)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (2.17)$$

Le matrici che rappresentano  $a$  e  $a^\dagger$  sulla base degli autostati di  $H$  hanno la seguente struttura:

$$a = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

*Esercizio 2.1*

Partendo dalle matrici (2.18) per  $a$  e  $a^\dagger$ , verificare che la matrice corrispondente all'operatore numero  $N = a^\dagger a$  è diagonale, con autovalori  $n = 0, 1, 2, \dots$

È interessante costruire i rappresentativi degli autoket  $|n\rangle$  nella rappresentazione delle posizioni per ritrovare i risultati del paragrafo V.4. Si cominci a trovare  $\langle x|0\rangle$  utilizzando la (2.11):

$$\langle x|p - im\omega x|0\rangle = \int dx' \langle x|p - im\omega x|x'\rangle \langle x'|0\rangle = 0. \quad (2.19)$$

Inserendo le rappresentazioni matriciali per  $x$  e  $p$ ,

Rappresentazioni

$$\langle x|p|x'\rangle = -i\hbar \delta(x-x') \frac{d}{dx'}, \quad (2.20)$$

$$\langle x|x|x'\rangle = x \delta(x-x'), \quad (2.21)$$

la (2.19) diventa un'equazione differenziale per la funzione  $\langle x|0\rangle$ ,

$$\left(-i\hbar \frac{d}{dx} - im\omega x\right) \langle x|0\rangle = 0, \quad (2.22)$$

che ha per soluzione,

$$\langle x|0\rangle = N_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar}, \quad (2.23)$$

in accordo con la (V.4.13). La costante di normalizzazione  $N_0$ , in accordo con la (V.4.19), risulta

$$N_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}. \quad (2.24)$$

Per trovare i rappresentativi degli stati eccitati  $|n\rangle$  conviene partire dalla relazione

$$\begin{aligned} (p + im\omega x)g(x) &= -i\hbar \left(\frac{d}{dx} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)g(x) \\ &= -i\hbar e^{m\omega x^2/2\hbar} \frac{d}{dx} \left[e^{-m\omega x^2/2\hbar} g(x)\right], \end{aligned}$$

che vale per una funzione  $g(x)$  qualsiasi, purché derivabile. Una seconda applicazione di  $(p + im\omega x)$  fornisce

$$\begin{aligned} (p + im\omega x)^2 g(x) &= -i\hbar e^{m\omega x^2/2\hbar} \frac{d}{dx} \left\{ e^{-m\omega x^2/2\hbar} \left[ (p + im\omega x)g(x) \right] \right\} \\ &= (-i\hbar)^2 e^{m\omega x^2/2\hbar} \frac{d^2}{dx^2} \left[ e^{-m\omega x^2/2\hbar} g(x) \right], \end{aligned}$$

e per induzione si trova il risultato dell'applicazione di  $(p + im\omega x)^n$ :

$$(p + im\omega x)^n g(x) = (-i\hbar)^n e^{m\omega x^2/2\hbar} \frac{d^n}{dx^n} \left[ e^{-m\omega x^2/2\hbar} g(x) \right]. \quad (2.25)$$

D'altra parte, dalla (2.17) segue

$$\langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle x|(a^\dagger)^n|0\rangle. \quad (2.26)$$

Pertanto, scegliendo la (2.23) come funzione  $g(x)$  nella (2.25) e ricordando la definizione (2.13) per  $a^\dagger$  in termini di  $(p + im\omega x)$ , si ottiene infine

*L'insieme degli stati coerenti*

$$\langle x|n\rangle = N_n(-)^n e^{m\omega x^2/2\hbar} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{n/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-m\omega x^2/\hbar}, \quad (2.27)$$

che coincide con la (V.4.13); il fattore di normalizzazione  $N_n$  è dato dalla (V.4.19). Con questa derivazione si è giustificata a posteriori la relazione (V.4.14) che definisce i polinomi di Hermite.

*VI.3. L'insieme degli stati coerenti*

Nella trattazione matriciale dell'oscillatore armonico lineare intervengono gli operatori di distruzione e di creazione (2.12) e (2.13) che abbassano e innalzano rispettivamente il livello di energia. Gli autostati della hamiltoniana sono anche autostati dell'operatore numero

$$N = a^\dagger a, \quad (3.1)$$

cioè

$$N|n\rangle = n|n\rangle. \quad (3.2)$$

Anche se  $a$  non è un operatore autoaggiunto, se ne può comunque cercare l'insieme degli autoket, risolvendo l'equazione agli autovalori,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (3.3)$$

dove in generale l'autovalore  $\alpha$  è un *numero complesso*. A tale scopo si può ricorrere alla *rappresentazione dell'operatore numero* (3.2): infatti dalla (3.3) segue

$$\begin{aligned} \langle n|a|\alpha\rangle &= \alpha\langle n|\alpha\rangle \\ &= \sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzata la coniugata della (2.17). Per ricorrenza, la (3.4) produce

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\alpha\rangle, \quad (3.5)$$

e quindi

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle \\ &= \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

*Rappresentazioni*

Normalizzando  $|\alpha\rangle$ , si determina  $\langle 0|\alpha\rangle$ :

$$1 = \langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2}, \quad (3.7)$$

per cui finalmente

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.8)$$

L'insieme degli stati  $\{|\alpha\rangle\}$  dell'operatore di distruzione  $a$  è detto *insieme degli stati coerenti* e ha interessanti proprietà che ne consigliano l'uso in varie circostanze<sup>10</sup>.

Il valore di  $n$  sullo stato  $|\alpha\rangle$  non è in generale definito. Si ha piuttosto la distribuzione di probabilità

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}, \quad (3.9)$$

che è una distribuzione di Poisson (cfr. eq. (II.2.44)), cui corrisponde il valor medio di  $N$  sullo stato  $|\alpha\rangle$

$$\langle \alpha|N|\alpha\rangle = |\alpha|^2. \quad (3.10)$$

Solo nel caso particolare  $\alpha = 0$ , lo stato  $|\alpha\rangle$  viene a coincidere con lo stato  $|0\rangle$  che corrisponde a  $n = 0$ .

Degli stati  $|\alpha\rangle$  si può dare la rappresentazione nello spazio delle posizioni. Per inversione delle (2.12) e (2.13) si ottiene

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad (3.11)$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (a^\dagger - a), \quad (3.12)$$

con i corrispondenti valori di aspettazione sugli stati  $|\alpha\rangle$ :

---

<sup>10</sup> Anche se inconsapevolmente, il primo a utilizzare gli stati coerenti fu Schrödinger, nel tentativo di dimostrare la possibilità di descrivere il moto di una particella come il propagarsi di un pacchetto di onde nello spazio *fisico*. Ma chi ne studiò le proprietà in dettaglio è Roy Jay Glauber (n. 1925) che li ha utilizzati per descrivere le proprietà statistiche della radiazione elettromagnetica. Perciò gli stati coerenti vengono anche detti *stati di Glauber*.

E. Schrödinger: *Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik [Il passaggio continuo dalla micro alla macromeccanica]*, Die Naturwissenschaften **14** (1926) 664–666.

R.J. Glauber: *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field [Stati coerenti e stati incoerenti del campo di radiazione]*, Physical Review **131** (1963) 2766–2788.

L'insieme degli stati coerenti

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &\equiv \langle \alpha | x | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha + \alpha^*) \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \operatorname{Re} \alpha,\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\langle p \rangle \equiv \langle \alpha | p | \alpha \rangle = \sqrt{2m\hbar\omega} \operatorname{Im} \alpha. \quad (3.14)$$

Esplicitando  $a$ , l'equazione agli autovalori (3.3) diventa

$$\begin{aligned}a|\alpha\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x + ip)|\alpha\rangle \\ &= \alpha|\alpha\rangle.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Moltiplicando scalarmente per  $\langle x|$  e ricordando che è  $p = -i\hbar d/dx$ , si ottiene l'equazione differenziale del primo ordine cui deve soddisfare  $\langle x|\alpha\rangle$ :

$$\left[ \frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x - \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\alpha \right] \langle x|\alpha\rangle = 0. \quad (3.16)$$

Le sue soluzioni sono del tipo

$$\langle x|\alpha\rangle = N_x \exp \left\{ - \left[ \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \alpha \right]^2 \right\}, \quad (3.17)$$

dove  $N_x$  è un fattore di normalizzazione,

$$N_x = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-(\operatorname{Im}\alpha)^2}. \quad (3.18)$$

La (3.17) si presenta come un pacchetto di onde di forma gaussiana in  $x$ .

In modo simile si può trovare il rappresentativo di  $|\alpha\rangle$  nella rappresentazione degli impulsi. Moltiplicando scalarmente per  $\langle p|$  l'equazione agli autovalori (3.3), si ottiene

$$\left[ \frac{d}{dp} + \frac{1}{m\hbar\omega}p + i\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\alpha \right] \langle p|\alpha\rangle = 0, \quad (3.19)$$

la cui soluzione ha pure un andamento gaussiano,

$$\langle p|\alpha\rangle = N_p \exp \left\{ - \left[ \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p + i\alpha \right]^2 \right\}, \quad (3.20)$$

con

$$N_p = (\pi\hbar m\omega)^{-1/4} e^{-(\operatorname{Re}\alpha)^2}. \quad (3.21)$$

*Esercizio 3.1*

Mostrare che le funzioni (3.17) e (3.20) possono essere riscritte rispettivamente nella forma

$$\langle x|\alpha\rangle = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-i\theta_\alpha} \exp\left\{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{4(\Delta x)^2} + i\frac{1}{\hbar}\langle p\rangle x\right\}, \quad (3.22)$$

$$\langle p|\alpha\rangle = (\pi\hbar m\omega)^{-1/4} e^{i\theta_\alpha} \exp\left\{-\frac{(p-\langle p\rangle)^2}{4(\Delta p)^2} - i\frac{p}{\hbar}\langle x\rangle\right\}, \quad (3.23)$$

dove

$$\theta_\alpha = 2 \operatorname{Im} \alpha \operatorname{Re} \alpha,$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad (\Delta p)^2 = \frac{m\hbar\omega}{2} \quad (3.24)$$

e  $\langle x\rangle, \langle p\rangle$  sono dati dalle (3.13) e (3.14).

Ricordando le considerazioni del paragrafo IV.7 e alla luce delle (3.22)–(3.24), si verifica dunque che gli stati  $\{|\alpha\rangle\}$  costituiscono un insieme di pacchetti di onde di minima indeterminazione, cioè

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{1}{4}\hbar^2, \quad (3.25)$$

independentemente dal valore  $\alpha$  considerato <sup>11</sup>.

Un'altra importante proprietà degli stati  $|\alpha\rangle$  è la mancanza di ortogonalità per  $\alpha \neq \alpha'$ . Infatti è

$$\begin{aligned} \langle \alpha|\alpha'\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\alpha'|^2} \sum_n \sum_m \frac{\alpha^{*n} \alpha'^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n|m\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\alpha'|^2} \sum_n \frac{\alpha^{*n} \alpha'^n}{n!}, \end{aligned}$$

cioè

$$\langle \alpha|\alpha'\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\alpha'|^2 + \alpha^* \alpha'}, \quad (3.26)$$

da cui risulta

<sup>11</sup> Grazie a questa proprietà, durante la sua evoluzione temporale il pacchetto di onde descritto da uno stato  $|\alpha\rangle$  mantiene la sua forma gaussiana e, minimizzando il suo sparpagliamento, può suggerire l'idea che esso possa rappresentare davvero il moto di una particella nello spazio tridimensionale, come pretendeva Schrödinger. Applicato al campo di radiazione, per il quale lo stato  $|n\rangle$  descrive uno stato a  $n$  fotoni, lo stato  $|\alpha\rangle$  si presta molto bene a descrivere le proprietà di coerenza della radiazione: questa proprietà è all'origine del nome di insieme di stati coerenti, attribuito all'insieme  $\{|\alpha\rangle\}$ .

$$|\langle \alpha | \alpha' \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \alpha'|^2}. \quad (3.27)$$

Si vede che la (3.27) si azzerava, garantendo l'ortogonalità tra  $|\alpha\rangle$  e  $|\alpha'\rangle$ , solo se  $\alpha$  e  $\alpha'$  sono infinitamente distanti tra di loro nel piano complesso.

Un'importante conseguenza della (3.27) è che gli stati  $\{|\alpha\rangle\}$  costituiscono un *insieme più che completo*. La dimostrazione procede in due stadi: dapprima si verifica la possibilità di esprimere l'operatore identità in termini di proiettori sugli stati  $|\alpha\rangle$  e quindi si accerta la validità della relazione di completezza. Successivamente si mostra che gli stati  $|\alpha\rangle$  non sono tra di loro linearmente indipendenti.

Dunque si proceda dapprima nella valutazione dell'integrale <sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \int d^2\alpha (\alpha^*)^m \alpha^n e^{-|\alpha|^2} &= \int_0^\infty d|\alpha| |\alpha|^{n+m+1} e^{-|\alpha|^2} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} \\ &= \frac{1}{2} n! 2\pi \delta_{nm} = \pi n! \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Per mezzo di questo integrale e dello sviluppo (3.8) si verifica che vale la relazione

$$\int |\alpha\rangle d^2\alpha \langle \alpha| = \pi \sum_n |n\rangle \langle n|, \quad (3.29)$$

che fornisce la *relazione di completezza*:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle d^2\alpha \langle \alpha| = \mathbb{1}. \quad (3.30)$$

Per mezzo di tale relazione e della (3.26) si può adesso esprimere  $|\alpha\rangle$  come sovrapposizione di stati ancora di tipo  $|\alpha\rangle$ :

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \frac{1}{\pi} \int |\alpha'\rangle d^2\alpha' \langle \alpha' | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha' e^{\alpha'^* \alpha - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\alpha'|^2} |\alpha'\rangle. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Pertanto gli stati  $\{|\alpha\rangle\}$  non sono linearmente indipendenti. Siccome però soddisfano una relazione di completezza (eq. (3.30)), essi costituiscono un insieme più che completo, nel senso che in linea di principio è possibile estrarre dall'insieme  $\{|\alpha\rangle\}$  un sottoinsieme completo di stati tra di loro linearmente indipendenti.

### Esempio 3.1

L'insieme degli stati coerenti, utilizzati per il campo della radiazione elettromagnetica, permette di descrivere in termini quantistici la luce emessa da un dispositivo laser

<sup>12</sup> La notazione  $d^2\alpha$  sta ad indicare simbolicamente l'elemento di volume nel piano complesso di  $\alpha$ :  $d(\text{Re } \alpha) d(\text{Im } \alpha)$ .

*Rappresentazioni*

(cfr. paragrafo XI.9). Per descrivere nei dettagli il campo di radiazione si richiederebbe una teoria dei campi in formulazione di seconda quantizzazione, che esula dagli scopi presenti. Però si può semplicemente affermare, come già fatto per la radiazione di corpo nero, che i gradi di libertà di un campo di radiazione sono assimilabili a un insieme di infiniti oscillatori armonici, le cui frequenze corrispondono alle frequenze del campo di radiazione stesso: l'eccitazione del singolo oscillatore individua il numero  $n$  di quanti di energia  $\hbar\omega$  (fotoni) presenti nel campo con quella frequenza. Se lo stato del campo, per una certa frequenza  $\omega$ , è descrivibile da uno stato  $|\alpha_0\rangle$ , la (3.9) dice la probabilità di contare la presenza di  $n$  fotoni di quella frequenza in tale stato. Indicando con  $\bar{n}$  il numero medio di fotoni, per la (3.10) si ha

$$\bar{n} = |\alpha_0|^2 \quad (3.32)$$

e la probabilità di contare  $n$  fotoni risulta una distribuzione di Poisson:

$$p(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}. \quad (3.33)$$

Le proprietà statistiche della luce termica ordinaria sono molto diverse da quella della luce laser e produrrebbero una probabilità di conteggio del tipo

$$p(n) = \frac{1}{1 + \bar{n}} \left( \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n. \quad (3.34)$$

I risultati (3.33) e (3.34) possono essere dedotti ammettendo che esiste una certa probabilità  $P(\alpha)$  che lo stato del sistema si trovi in uno stato  $|\alpha\rangle$ . Allora in generale la probabilità di conteggio di  $n$  fotoni risulta dalla somma dei contributi di probabilità relativi ad ogni stato  $|\alpha\rangle$  possibile:

$$p(n) = \int d^2\alpha P(\alpha) e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (3.35)$$

Se allora nella (3.35) si sceglie

$$P(\alpha) = \delta(\alpha - \alpha_0), \quad (3.36)$$

corrispondente alla situazione di campo descritto da un ben definito stato  $|\alpha_0\rangle$ , si ritrova la (3.33). Si ottiene invece la (3.34), se si adotta la distribuzione gaussiana,

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi \bar{n}} e^{-|\alpha|^2/\bar{n}}, \quad (3.37)$$

corrispondente a processi stocastici, tipici di situazioni in equilibrio termodinamico.

Per  $\bar{n} \ll 1$  le due distribuzioni (3.33) e (3.34) tendono a confondersi. Per distinguere le probabilità di fotoconteggio nei due casi occorre superare la difficoltà rappresentata dal basso valore di  $\bar{n}$  ( $\sim 10^{-3}$ ) ottenibile con luce prodotta da una sorgente termica ordinaria. Invece con luce laser è possibile realizzare fasci di luce molto intensi, anche con  $\bar{n}$  dell'ordine di  $10^{10}$ . Sperimentalmente<sup>13</sup> si può utilizzare un fascio laser in due

---

<sup>13</sup> F.T. Arecchi: *Measurement of the statistical distribution of gaussian and laser sources [Misura della distribuzione statistica di sorgenti gaussiane e laser]*, Physical Review Letters **15** (1965) 912–916; F.T. Arecchi, A. Berné e P. Burlamacchi: *High-order fluctuations in a single-mode laser field [Fluttuazioni di ordine superiore in un campo laser a modo singolo]*, Physical Review Letters **16** (1966) 32–35.

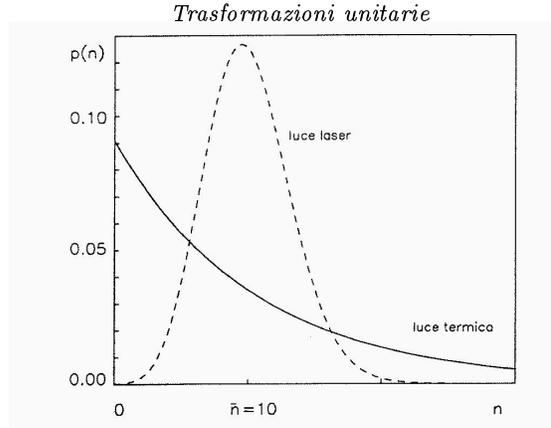


Fig. 3.1. Probabilità di conteggio di  $n$  fotoni per la luce laser e per la luce termica.

situazioni diverse: il fascio diretto fornisce i fotoconteggi relativi alla luce laser, mentre la luce termica viene simulata interponendo tra la sorgente e il rivelatore un vetro smerigliato in rotazione. In tal modo si rende caotico e casuale il flusso di fotoni, come se provenisse da una sorgente termica in cui i fotoni sono emessi da diseccitazioni scorrelate e casuali degli atomi. In fig. 3.1 sono riportate le due probabilità di conteggio nel caso  $\bar{n} = 10$ .

#### VI.4. *Trasformazioni unitarie*

Negli spazi vettoriali (lineari) a numero finito di dimensioni un vettore è noto se si conoscono le sue componenti secondo i versori del sistema di riferimento. Per un vettore di modulo unitario, le componenti sono costituite dai coseni direttori del vettore dato rispetto ai versori della base completa scelta. Allo stesso modo, un ket  $|f\rangle$  nello spazio di Hilbert astratto risulta definito dalla conoscenza delle sue componenti secondo una base opportuna. Scelta la base di ket ortonormalizzati  $\{|n\rangle\}$ , le componenti di  $|f\rangle$  secondo questa base,  $\langle n|f\rangle$ , costituiscono il *rappresentativo* di  $|f\rangle$ . Cambiando la base, cambiano le componenti, ma si può comunque stabilire una legge di trasformazione che permette di esprimere le componenti di  $|f\rangle$  secondo la nuova base mediante le componenti rispetto alla vecchia. Sia infatti  $\{|i\rangle\}$  la nuova base; per la completezza della base  $\{|n\rangle\}$  si ha

$$\langle i|f\rangle = \sum_n \langle i|n\rangle \langle n|f\rangle. \quad (4.1)$$

La (4.1) è una relazione lineare che lega le componenti  $\langle n|f\rangle$  alle componenti  $\langle i|f\rangle$ , mentre  $\langle i|n\rangle$  sono i coefficienti della trasformazione. Siccome è lineare, la trasformazione può essere invertita, fruendo della completezza della base  $\{|i\rangle\}$ :

$$\langle n|f\rangle = \sum_i \langle n|i\rangle \langle i|f\rangle. \quad (4.2)$$

*Rappresentazioni*

I coefficienti della trasformazione inversa sono dunque i complessi coniugati dei corrispondenti coefficienti della trasformazione diretta (4.1):

$$\langle n | i \rangle = \langle i | n \rangle^* . \quad (4.3)$$

Se si indicano con

$$S_{in} = \langle i | n \rangle, \quad (4.4)$$

$$T_{ni} = \langle n | i \rangle, \quad (4.5)$$

gli elementi delle matrici  $S$  e  $T$ , responsabili rispettivamente delle trasformazioni (4.1) e (4.2), risulta allora

$$T_{ni} = S_{in}^* = S_{ni}^\dagger,$$

cioè

$$T = S^\dagger. \quad (4.6)$$

D'altra parte, per definizione è

$$T = S^{-1} \quad (4.7)$$

e quindi si ottiene il risultato

$$S^\dagger = S^{-1}. \quad (4.8)$$

Matrici che soddisfano la (4.8) sono dette matrici *unitarie* e la trasformazione da loro prodotta è una *trasformazione unitaria*. La (4.8) implica l'esistenza dell'inverso di  $S$  sia a sinistra che a destra, cioè

$$S S^\dagger = S^\dagger S = \mathbb{1}. \quad (4.9)$$

Il requisito di unitarietà (4.9) per  $S$  si ottiene anche considerando le seguenti relazioni

$$\sum_n \langle i | n \rangle \langle n | j \rangle = \sum_n S_{in} S_{nj}^\dagger = \delta_{ij}, \quad (4.10)$$

$$\sum_i \langle n | i \rangle \langle i | m \rangle = \sum_i S_{ni}^\dagger S_{im} = \delta_{nm}, \quad (4.11)$$

che derivano dalla completezza e dalla ortonormalità delle basi utilizzate.

In questo modo la scelta di una rappresentazione significa la scelta dell'insieme dei vettori di base e il cambio di rappresentazione è visualizzato come un cambiamento di base nello spazio di Hilbert, in perfetta analogia con quanto avviene negli spazi a

numero finito di dimensioni. Però qui si può pensare che gli indici  $i$  e  $n$  nelle (4.1) e (4.2) siano anche indici continui, anche se ciò può comportare in qualche caso una certa cautela<sup>14</sup>. Lo stato del sistema a un certo istante resta individuato da un ket fisso nello spazio di Hilbert e la trasformazione unitaria permette di collegare la sua vecchia rappresentazione alla nuova. Rappresentazioni connesse da trasformazioni unitarie sono tra di loro *equivalenti*.

*Esercizio 4.1*

Ricordando che la componente  $\langle n|f\rangle$  di un vettore  $|f\rangle \in \mathcal{H}$  lungo il versore di base  $|n\rangle$  ha il significato fisico di ampiezza di probabilità di trovare il sistema nello stato  $|n\rangle$ , interpretare la (4.2).

Nel cambio di rappresentazione lo stato del sistema rimane *passivo* durante la trasformazione. Ci si può però anche porre in una visione *attiva* della trasformazione, nella quale lo stato del sistema subisce una “rotazione” nello spazio di Hilbert per effetto della trasformazione unitaria  $S$ :

$$|f'\rangle = S|f\rangle. \quad (4.12)$$

Di conseguenza vengono trasformati anche gli operatori. Infatti, se  $|g\rangle$  è il ket che si ottiene per applicazione dell'operatore  $F$  a  $|f\rangle$ ,

$$|g\rangle = F|f\rangle,$$

gli stati  $|g'\rangle$  e  $|f'\rangle$  ottenuti con la trasformazione unitaria  $S$ ,

$$|g'\rangle = S|g\rangle, \quad |f'\rangle = S|f\rangle,$$

sono collegati mediante la relazione

$$|g'\rangle = F'|f'\rangle,$$

che definisce l'operatore  $F'$  trasformato di  $F$ . Risulta

$$|g'\rangle = S|g\rangle = SF|f\rangle = SFS^{-1}|f'\rangle,$$

cioè

$$F' = SFS^{-1}. \quad (4.13)$$

Il fatto che  $S$  sia unitaria permette di fruire di alcune proprietà. Infatti le trasformazioni unitarie conservano:

- a) la autoaggiuntezza degli operatori;
- b) le regole di commutazione;

<sup>14</sup> Si veda anche l'osservazione alla fine del paragrafo C.3.

*Rappresentazioni*

- c) lo spettro degli autovalori;  
d) il prodotto scalare.

Queste proprietà si dimostrano facilmente. La a) si dimostra considerando l'operatore  $A = A^\dagger$  e mostrando che è

$$\begin{aligned} (A')^\dagger &= (SAS^{-1})^\dagger = (SAS^\dagger)^\dagger = SA^\dagger S^\dagger \\ &= SAS^\dagger = SAS^{-1} = A'. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Così pure la b) si dimostra considerando che il commutatore

$$[A, B] = iC$$

diventa

$$[A', B'] = iC', \quad (4.15)$$

dove

$$A' = SAS^{-1}, \quad B' = SBS^{-1}, \quad C' = SC S^{-1}.$$

Per la c), dall'equazione

$$A|n\rangle = a_n|n\rangle,$$

segue

$$\begin{aligned} A'|n'\rangle &= SAS^{-1}S|n\rangle = SA|n\rangle \\ &= a_nS|n\rangle = a_n|n'\rangle. \end{aligned} \quad (4.16)$$

La d) è verificata con la relazione

$$\langle f'|g'\rangle = \langle f|S^\dagger S|g\rangle = \langle f|g\rangle. \quad (4.17)$$

In particolare quindi la d) implica che siano conservati l'ortonormalità degli stati e gli elementi di matrice degli operatori.

In particolare quest'ultima proprietà,

$$\begin{aligned} \langle f'|F'|g'\rangle &= \langle f|S^\dagger SFS^{-1}S|g\rangle \\ &= \langle f|F|g\rangle, \end{aligned} \quad (4.18)$$

offre un nuovo modo, equivalente alla (1.23), per diagonalizzare una matrice alla ricerca degli autovalori dell'operatore che essa rappresenta. Infatti la diagonalizzazione della matrice non è altro che la ricerca della rappresentazione in cui tale matrice è diagonale e ciò si realizza operando nella (4.18) un'opportuna trasformazione unitaria: la diagonalizzazione della matrice che rappresenta  $F'$  è ricondotta così alla determinazione di questa trasformazione unitaria  $S$ .

*Esercizio 4.2*

Se  $S$  è la trasformazione unitaria che diagonalizza la matrice che rappresenta l'operatore  $F$ , qual è il significato degli elementi di matrice  $S_{ik}$ ?  
[Suggerimento: si veda l'eq. (C.66).]

Il complesso delle proprietà *a)–d)* è importante per la teoria, perché permette di scegliere la rappresentazione più comoda per trattare il problema allo studio, garantendo che l'associazione tra variabili dinamiche classiche e operatori autoaggiunti con le loro proprietà e i conseguenti postulati interpretativi siano indipendenti dalle rappresentazioni collegate da trasformazioni unitarie. Perciò le trasformazioni unitarie svolgono un ruolo analogo a quello delle trasformazioni canoniche classiche <sup>15</sup>.

Un caso particolare di trasformazioni unitarie di notevole interesse sono le trasformazioni unitarie *infinitesimali*. Se  $A = A^\dagger$  è un operatore autoaggiunto e  $\epsilon$  è un  $c$ -numero, l'operatore

$$U = e^{i\epsilon A} \quad (4.19)$$

è un operatore unitario <sup>16</sup>, cioè

$$U^\dagger = e^{-i\epsilon A} = U^{-1}. \quad (4.20)$$

Se  $\epsilon$  è un parametro infinitesimale, si può approssimare (all'ordine  $\epsilon$ )

$$U = \mathbb{1} + i\epsilon A, \quad (4.21)$$

in una forma che indica che l'operatore  $U$  differisce infinitamente di poco dall'operatore identità. Similmente,

$$U^\dagger = \mathbb{1} - i\epsilon A = U^{-1}. \quad (4.22)$$

In tal caso  $U$  è un operatore unitario infinitesimale e  $A$  prende il nome di *generatore* della trasformazione unitaria infinitesimale.

Corrispondentemente, se si identifica  $S$  con  $U$ , la (4.12) diventa

$$\begin{aligned} |f'\rangle &= U|f\rangle \\ &= (\mathbb{1} + i\epsilon A + \dots)|f\rangle \end{aligned} \quad (4.23)$$

<sup>15</sup> Questo aspetto è stato sottolineato per la prima volta da Dirac e Jordan.

P.A.M. Dirac: *The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics*, loc. cit. (n. 1 pp. 249–250).

P. Jordan: *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik*, loc. cit. (n. 2 p. 250).

<sup>16</sup> L'esponenziale nella (4.19) è simbolico e serve a definire l'operatore  $U$ . Esso va sempre inteso nel senso di uno sviluppo in serie:

$$U = \sum_n \frac{(i\epsilon A)^n}{n!}.$$

*Rappresentazioni*

e quindi la variazione dello stato  $|f\rangle$ , indotta dalla trasformazione unitaria infinitesimale, risulta (all'ordine  $\epsilon$ )

$$\begin{aligned} |\delta f\rangle &\equiv |f'\rangle - |f\rangle \\ &= i\epsilon A|f\rangle. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Similmente, la (4.13) diventa

$$\begin{aligned} F' &= U F U^{-1} \\ &= (\mathbb{1} + i\epsilon A + \dots) F (\mathbb{1} - i\epsilon A + \dots) \\ &= F + i\epsilon[A, F] + \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

e quindi la variazione indotta sull'operatore è (all'ordine  $\epsilon$ )

$$\begin{aligned} \delta F &\equiv F' - F \\ &= i\epsilon[A, F]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

In particolare, dalla (4.26) segue che un operatore  $F$  resta invariato sotto la trasformazione infinitesimale indotta dal generatore  $A$  se  $A$  commuta con  $F$ . Scegliendo allora per  $F$  la hamiltoniana  $H$ , si riconosce che le trasformazioni unitarie infinitesimali sono l'analogo delle trasformazioni canoniche infinitesimali e il generatore  $A$  della trasformazione è l'analogo della funzione generatrice  $G$  nella trasformazione canonica infinitesimale (I.1.53). Ne consegue che le operazioni di simmetria, che lasciano inalterato il sistema e che siano descrivibili in termini di trasformazioni unitarie infinitesimali, hanno associato un operatore, il generatore della trasformazione, che commuta con la hamiltoniana.

Tuttavia, l'uso delle trasformazioni canoniche infinitesimali nella dinamica classica è finalizzato in modo alquanto diverso da quello delle trasformazioni unitarie infinitesimali in meccanica quantistica. Riconoscere le funzioni generatrici classiche permette di trovare gli integrali primi del sistema dinamico classico e aiuta a definire nuove e opportune coordinate canoniche, per mezzo delle quali si ottiene la traiettoria percorsa nello spazio delle fasi da parte del punto che rappresenta il sistema. Se questo ha  $f$  gradi di libertà ed è integrabile, in questo modo si individuano gli  $f - 1$  integrali primi in involuzione tra di loro e con la hamiltoniana, secondo la (I.1.49).

Invece in meccanica quantistica non interessano tanto le coordinate canoniche, quanto piuttosto lo stato del sistema. Anche i generatori delle trasformazioni unitarie infinitesimali, associati a operazioni di simmetria, individuano costanti del moto; però, dato che tali operatori commutano con la hamiltoniana, lo stato del sistema deve essere anche simultaneamente loro autostato. Perciò individuare tutte le operazioni di simmetria aiuta a costruire l'insieme completo di operatori che commutano tra di loro e con la hamiltoniana e, quindi, a definire la rappresentazione equivalente caratterizzata da tutte le osservabili compatibili del sistema quantistico e corrispondente alla situazione di osservazione massima possibile sul sistema quantistico (cfr. paragrafo IV.9).

Operatori di rotazione

*Esercizio 4.3*

Qual'è l'osservazione massima per l'elettrone dell'atomo di idrogeno e quali sono le associate operazioni di simmetria possibili?

*Esempio 4.1*

Si può verificare che per la particella libera, con hamiltoniana  $H = p^2/2m$ , l'impulso  $\mathbf{p}$  è il generatore delle traslazioni.

Innanzitutto, tutte le componenti di  $\mathbf{p}$  commutano tra di loro e con  $H$ , per cui l'operatore unitario

$$U(\mathbf{a}) = e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}/\hbar} \quad (4.27)$$

lascia inalterata la hamiltoniana, con  $\mathbf{a}$  che rappresenta una traslazione spaziale. D'altra parte l'azione dell'operatore  $U(\mathbf{a})$  su una funzione  $\psi(\mathbf{r})$  può essere calcolata:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r}) &= e^{i\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}/\hbar}\psi(\mathbf{r}) \\ &= e^{\mathbf{a}\cdot\nabla}\psi(\mathbf{r}) \\ &= \left[ \mathbb{1} + \mathbf{a}\cdot\nabla + \frac{1}{2!}(\mathbf{a}\cdot\nabla)^2 + \dots \right] \psi(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Ma, ricostruendo lo sviluppo di Taylor, questo significa proprio

$$U(\mathbf{a})\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + \mathbf{a}). \quad (4.28)$$

*Esercizio 4.4*

Perché nell'Esempio 4.1 non è stato necessario utilizzare un operatore unitario infinitesimale, ma si è ricorsi direttamente a un operatore unitario per traslazioni finite?

*Esercizio 4.5*

Verificare che per una particella sottoposta alla hamiltoniana  $H = p^2/2m + V(r)$  la componente del momento angolare  $L_z$  è il generatore delle rotazioni intorno all'asse  $z$ .

*Esercizio 4.6*

Verificare che la hamiltoniana, se non dipende esplicitamente dal tempo, è il generatore delle traslazioni temporali.

VI.5. Operatori di rotazione

Le considerazioni del paragrafo precedente sono meglio illustrate dall'importante esempio delle trasformazioni indotte da una rotazione nello spazio ordinario a tre

dimensioni. Classicamente si può operare una rotazione in due modi. Si può lasciare indisturbato il sistema fisico e ruotare il sistema di riferimento: è questo il cosiddetto punto di vista *passivo*, cui viene associata la rotazione  $R$ . Da un punto di vista *attivo* invece si procede direttamente alla rotazione  $S$  del sistema fisico nello spazio, tenendo fermo il sistema di riferimento. I due modi di procedere sono equivalenti se le due rotazioni sono l'una l'inversa dell'altra:  $R = S^{-1}$ .

Si supponga che la rotazione  $R$  del sistema di riferimento avvenga lasciando l'origine  $O$  fissa. È possibile stabilire un legame tra le coordinate  $(x, y, z)$  di un punto  $P$  nel sistema di riferimento originale e quelle  $(x', y', z')$  nel sistema ruotato. Ciò equivale a fornire il legame tra le componenti del vettore posizione  $\mathbf{r}$  di  $P$  nel sistema di riferimento originale e in quello ruotato.

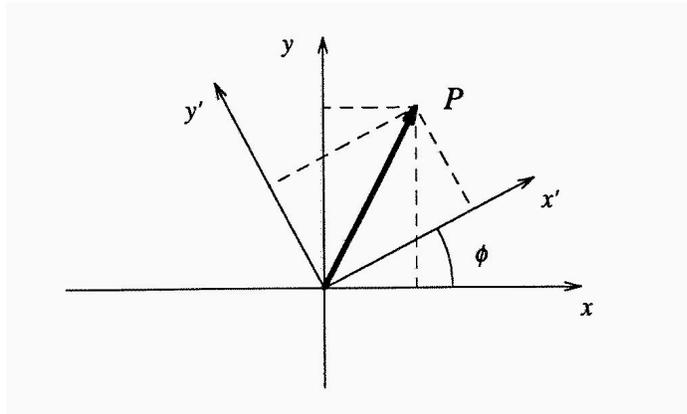


Fig. 5.1. Rotazione antioraria intorno all'asse  $z$ .

Per una rotazione di un angolo  $\phi$  intorno all'asse  $z$  in senso antiorario (fig. 5.1), si ottiene:

$$\begin{cases} x' = x \cos \phi + y \sin \phi, \\ y' = -x \sin \phi + y \cos \phi, \\ z' = z. \end{cases} \quad (5.1)$$

Naturalmente la stessa rotazione si ottiene per un angolo  $\phi' = \phi + 2\pi n$ , con  $n$  intero. Se  $\phi$  è pari a un angolo infinitesimale, si dice che la rotazione è infinitesimale.

La più generale rotazione  $R$  del sistema di riferimento intorno a  $O$  può essere espressa mediante tre successive rotazioni intorno a opportuni assi (fig. 5.2): una rotazione di  $\alpha$  intorno all'asse  $z$ , seguita da una rotazione di  $\beta$  intorno all'asse  $y' = y''$  e da una rotazione di  $\gamma$  intorno all'asse  $z''$ . Gli angoli  $\alpha, \beta, \gamma$  sono detti *angoli di Eulero* della rotazione e l'operazione di rotazione viene indicata con  $R = R(\alpha\beta\gamma)$ .

Indicando con  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) le coordinate di  $P$  nel sistema originale e con  $x'_i$  quelle nel sistema ruotato, il legame tra  $x_i$  e  $x'_i$  è, come per la (5.1), ancora lineare,

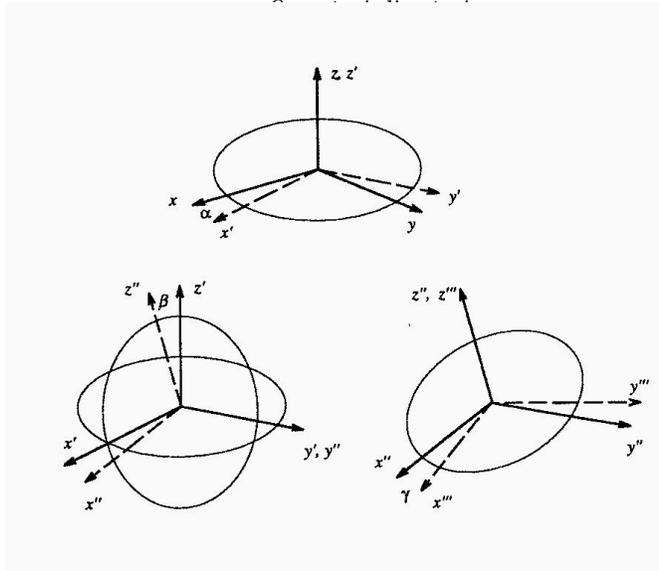


Fig. 5.2. Rotazione in tre dimensioni.

$$x'_i = \sum_j R_{ij} x_j, \quad (5.2)$$

dove  $R_{ij}$  sono gli elementi della matrice che rappresenta la rotazione  $R(\alpha\beta\gamma)$ .

Per esempio, per la rotazione intorno all'asse  $z$  descritta dall'eq. (5.1) risulta  $\alpha = \phi, \beta = \gamma = 0$  e

$$R(\alpha 0 0) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.3)$$

Similmente, per una rotazione di  $\beta$  intorno all'asse  $y$ , si ha

$$R(0 \beta 0) = \begin{vmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix}. \quad (5.4)$$

La più generale rotazione del tipo descritto in fig. 5.2 risulta dall'applicazione successiva di tre rotazioni:

$$R(\alpha\beta\gamma) = R(00\gamma)R(0\beta0)R(\alpha00). \quad (5.5)$$

Esplicitamente si ottiene

$$R(\alpha\beta\gamma) = \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

La matrice (5.6) è reale, ortogonale e unimodulare, cioè

$$R = R^*, \quad R^T = R^{-1}, \quad \det R = 1. \quad (5.7)$$

*Esercizio 5.1*

Verificare la (5.6) e le (5.7).

In meccanica quantistica le rotazioni vanno applicate allo stato di un sistema fisico che è rappresentato da un vettore nello spazio di Hilbert. Per studiarne l'effetto conviene utilizzare il punto di vista attivo e considerare un sistema fisico costituito da una particella descritta dallo stato  $|\Psi\rangle$  e dall'associata funzione d'onda  $\Psi(\mathbf{r})$ . Eseguita la rotazione  $S$  del sistema e indicati con  $|\Psi'\rangle$  e con  $\Psi'(\mathbf{r})$  rispettivamente lo stato e la funzione d'onda che descrivono il sistema ruotato, si deve avere

$$|\Psi'\rangle = S|\Psi\rangle, \quad \Psi'(\mathbf{r}) = S[\Psi(\mathbf{r})]. \quad (5.8)$$

Dire che  $|\Psi'\rangle$  è lo stato ottenuto da  $|\Psi\rangle$  mediante la rotazione  $S$  effettuata sul sistema significa che l'insieme di misurazioni di osservabili fisiche che si potevano fare sul sistema originale descritto da  $|\Psi\rangle$  fornisce gli stessi risultati per le corrispondenti misurazioni fatte sul sistema descritto da  $|\Psi'\rangle$ .

In particolare, se si è interessati a una misura di posizione, la distribuzione di probabilità di presenza per la particella è data in origine da  $|\Psi(\mathbf{r})|^2$  e, dopo la rotazione, da  $|\Psi'(\mathbf{r})|^2$ . Dalla definizione

$$\Psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \Psi \rangle \quad (5.9)$$

segue

$$\begin{aligned} \Psi'(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{r} | S | \Psi \rangle = \langle S^{-1} \mathbf{r} | \Psi \rangle \\ &= \langle R \mathbf{r} | \Psi \rangle = \langle \mathbf{r}' | \Psi \rangle \end{aligned}$$

e quindi

$$\Psi'(\mathbf{r}) = \Psi(\mathbf{r}'), \quad (5.10)$$

cioè, dopo la rotazione  $S$  del sistema fisico, la funzione d'onda per la particella in  $\mathbf{r}$  ha lo stesso valore della funzione d'onda della particella, prima della rotazione, nel punto  $\mathbf{r}'$  che viene raggiunto a partire da  $\mathbf{r}$  per effetto della rotazione  $R = S^{-1}$ :

$$\Psi'(\mathbf{r}) = \Psi(R\mathbf{r}). \quad (5.11)$$

Allora deve anche essere

$$|\Psi'(\mathbf{r})|^2 = |\Psi(\mathbf{r}')|^2, \quad \mathbf{r}' = R\mathbf{r}. \quad (5.12)$$

*Operatori di rotazione*

In generale, indicato con  $F$  l'operatore quantistico associato a un'osservabile fisica che si vuole misurare sul sistema originale e con  $F'$  l'operatore corrispondente alla stessa osservabile fisica che si vuole misurare sul sistema ruotato, si deve avere

$$\langle \Psi' | F' | \Psi' \rangle = \langle \Psi | F | \Psi \rangle, \quad (5.13)$$

cioè, per la (5.8),

$$S^\dagger F' S = F. \quad (5.14)$$

Siccome la rotazione deve conservare la norma di  $|\Psi\rangle$ , l'operatore  $S$  associato alla rotazione (5.8) deve essere un operatore unitario,

$$S^\dagger = S^{-1}, \quad (5.15)$$

e quindi la (5.14) è dello stesso tipo della (4.13):

$$F' = S F S^{-1}. \quad (5.16)$$

Per la costruzione esplicita dell'operatore  $S$  conviene considerare dapprima la rotazione particolare intorno all'asse  $z$  di un angolo  $\phi$ ,  $S_z(\phi)$ . Per la (5.11) e la (5.1) questa rotazione ( $S^{-1} = R$ ) trasforma  $\Psi(\mathbf{r})$  nel modo seguente:

$$S_z(\phi)\Psi(x, y, z) = \Psi(x \cos \phi + y \sin \phi, -x \sin \phi + y \cos \phi, z). \quad (5.17)$$

Se la rotazione è infinitesimale ( $\phi = \epsilon$ ), si ottiene

$$\begin{aligned} S_z(\epsilon)\Psi(x, y, z) &\simeq \Psi(x + \epsilon y, -\epsilon x + y, z) \\ &\simeq \Psi(x, y, z) + \epsilon \left[ y \frac{\partial \Psi}{\partial x} - x \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right] \\ &= \left( \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \epsilon L_z \right) \Psi(x, y, z), \end{aligned}$$

dove si è utilizzata la definizione (IV.2.25) per l'operatore corrispondente alla componente del momento angolare lungo l'asse  $z$ . Pertanto risulta

$$S_z(\epsilon) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \epsilon L_z, \quad (5.18)$$

che è della forma (4.21).

Si passa facilmente da una rotazione infinitesimale a una rotazione finita intorno all'asse  $z$ , tenendo presente che ogni rotazione finita intorno a un asse può essere ottenuta come applicazione successiva di rotazioni infinitesimali. Perciò

$$\begin{aligned} S_z(\phi + d\phi) &= S_z(d\phi)S_z(\phi) \\ &= \left( \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} d\phi L_z \right) S_z(\phi), \end{aligned}$$

cioè

$$\frac{d}{d\phi} S_z(\phi) = -\frac{i}{\hbar} L_z S_z(\phi). \quad (5.19)$$

La (5.19) è un'equazione differenziale per l'operatore  $S_z(\phi)$ . In virtù del fatto che le rotazioni intorno a un asse commutano, la (5.19) può essere integrata con il seguente risultato:

$$S_z(\phi) = e^{-i\phi L_z/\hbar}. \quad (5.20)$$

Il risultato (5.20) conferma che  $S_z(\phi)$  è un operatore unitario e che  $L_z$  è il generatore delle rotazioni intorno all'asse  $z$ .

A queste considerazioni si può dare più ampia generalizzazione sostituendo a  $L_z$  l'operatore  $J_z$  introdotto nell'Esempio 1.4 e, in generale per una rotazione intorno all'asse  $\hat{u}$ , l'operatore  $J_u \equiv \mathbf{J} \cdot \hat{u}$ . In tal modo vengono considerate le rotazioni di un sistema fisico che può ammettere anche autovalori seminteri del momento angolare secondo la (1.61). Si può così definire l'operatore di rotazione intorno all'asse  $\hat{u}$ :

$$S_u(\phi) = e^{-i\phi J_u/\hbar}. \quad (5.21)$$

Se  $J^2$  ammette autovalori interi, una rotazione di  $2\pi$  intorno a  $\hat{u}$  equivale all'operatore identità, mentre per autovalori seminteri di  $J^2$  occorre una rotazione di  $4\pi$  intorno a  $\hat{u}$  per riprodurre l'identità.

L'operatore corrispondente alla più generale rotazione con centro fisso  $O$ , definita dagli angoli di Eulero  $(\alpha\beta\gamma)$ , può essere costruito mediante gli operatori che rappresentano le tre rotazioni intorno a un asse corrispondenti ai tre angoli  $(\alpha\beta\gamma)$  della fig. 5.2. Facendo attenzione all'ordine di applicazione successiva, in quanto rotazioni intorno ad assi diversi in generale non commutano, si ottiene

$$\begin{aligned} S(\alpha\beta\gamma) &= S_{z''}(\gamma) S_{y''}(\beta) S_z(\alpha) \\ &= e^{-i\gamma J_{z''}/\hbar} e^{-i\beta J_{y''}/\hbar} e^{-i\alpha J_z/\hbar}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Questo operatore può essere riscritto coinvolgendo solo le componenti del momento angolare lungo gli assi originali  $(x, y, z)$ . Infatti l'operatore  $J_{y''}$  si deduce da  $J_y$  per rotazione  $S_z(\alpha)$  in base alla (5.16):

$$\begin{aligned} J_{y''} &= S_z(\alpha) J_y S_z^{-1}(\alpha) \\ &= e^{-i\alpha J_z/\hbar} J_y e^{+i\alpha J_z/\hbar}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$e^{-i\beta J_{y''}/\hbar} = e^{-i\alpha J_z/\hbar} e^{-i\beta J_y/\hbar} e^{+i\alpha J_z/\hbar}. \quad (5.23)$$

Similmente,  $J_{z''}$  si ottiene da  $J_z$  per rotazioni successive  $S_z(\alpha)$  e  $S_{y''}(\beta)$ . Perciò

Operatori di rotazione

$$e^{-i\gamma J_z/\hbar} = e^{-i\beta J_y/\hbar} e^{-i\alpha J_z/\hbar} e^{-i\gamma J_z/\hbar} e^{+i\alpha J_z/\hbar} e^{+i\beta J_y/\hbar}. \quad (5.24)$$

Inserendo (5.23) e (5.24) nella (5.22), si ottiene infine

$$S(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha J_z/\hbar} e^{-i\beta J_y/\hbar} e^{-i\gamma J_z/\hbar}. \quad (5.25)$$

Una rappresentazione particolarmente utile dell'operatore  $S(\alpha\beta\gamma)$  si ottiene mediante i vettori  $|jm\rangle$ , autostati simultanei di  $J^2$  e  $J_z$ , che, come si è rilevato alla fine dell'Esempio 1.4, per fissato  $j$  costituiscono un sottospazio a  $2j + 1$  dimensioni, che si trasforma in sé per applicazione degli operatori  $J_x, J_y, J_z$ . Pertanto applicando  $S(\alpha\beta\gamma)$  a  $|jm\rangle$ , si ottiene una combinazione lineare di stati  $|jm'\rangle$ ,

$$S(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)|jm'\rangle, \quad (5.26)$$

e il sottospazio  $\{|jm\rangle\}$  viene detto *sottospazio invariante* rispetto alla rotazione  $S$ . I coefficienti di sviluppo  $\mathcal{D}_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$  sono proprio gli elementi della matrice di rotazione che rappresenta  $S(\alpha\beta\gamma)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) &= \langle jm'|S(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle \\ &= \langle jm'|e^{-i\alpha J_z/\hbar} e^{-i\beta J_y/\hbar} e^{-i\gamma J_z/\hbar}|jm\rangle. \end{aligned} \quad (5.27)$$

La dipendenza da  $\alpha$  e  $\gamma$  di  $\mathcal{D}_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$  è subito esplicitata facendo agire gli operatori di rotazione intorno a  $z$  (a destra quello di un angolo  $\gamma$  e a sinistra quello di un angolo  $\alpha$ ):

$$\mathcal{D}_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha m'} \langle jm'|e^{-i\beta J_y/\hbar}|jm\rangle e^{-i\gamma m}. \quad (5.28)$$

Il calcolo dell'elemento di matrice

$$d_{m'm}^j(\beta) = \langle jm'|e^{-i\beta J_y/\hbar}|jm\rangle \quad (5.29)$$

è immediato per una rotazione infinitesimale ( $\beta = \epsilon$ ) intorno all'asse  $y$ . Dalla (1.52) è

$$\mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \epsilon J_y = \mathbb{1} + \frac{\epsilon}{2\hbar} (J_- - J_+) \quad (5.30)$$

e quindi

$$d_{m'm}^j(\epsilon) = \delta_{mm'} + \frac{\epsilon}{2\hbar} \langle jm'|J_- - J_+|jm\rangle, \quad (5.31)$$

che per la (1.65) diventa

$$d_{m'm}^j(\epsilon) = \delta_{mm'} + \frac{1}{2}\epsilon\{\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\delta_{m',m-1} - \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\delta_{m',m+1}\}. \quad (5.32)$$

L'espressione generale per  $d_{m'm}^j(\beta)$  è stata ottenuta da Wigner <sup>17</sup>:

$$d_{m'm}^j(\beta) = \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!} \times \sum_{\nu} (-1)^{\nu} \frac{\left(\cos \frac{1}{2}\beta\right)^{2j+m-m'-2\nu} \left(-\sin \frac{1}{2}\beta\right)^{m'-m+2\nu}}{(j-m'-\nu)!(j+m-\nu)!(\nu+m'-m)!\nu!}, \quad (5.33)$$

dove la somma include i valori interi di  $\nu$  e quindi l'argomento dei fattoriali non diventa negativo. Dall'unitarietà della trasformazione discende la seguente proprietà:

$$d_{m'm}^j(\beta) = d_{mm'}^j(-\beta). \quad (5.34)$$

Inoltre valgono le relazioni

$$d_{m'm}^j(\beta) = (-1)^{m'-m} d_{mm'}^j(\beta), \quad (5.35)$$

$$d_{m'm}^j(\beta) = (-1)^{m'-m} d_{-m',-m}^j(\beta). \quad (5.36)$$

Queste relazioni permettono di ricavare simili relazioni di simmetria anche per la matrice  $\mathcal{D}_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$ :

$$\mathcal{D}_{m'm}^j(-\gamma, -\beta, -\alpha) = \mathcal{D}_{mm'}^{j*}(\alpha\beta\gamma), \quad (5.37)$$

$$\mathcal{D}_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) = (-1)^{m'-m} \mathcal{D}_{-m',-m}^j(\alpha\beta\gamma). \quad (5.38)$$

È utile il caso particolare

$$\mathcal{D}_{m0}^l(\alpha\beta 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}^*(\beta, \alpha), \quad (5.39)$$

da cui si ottiene anche

$$\mathcal{D}_{00}^l(0\beta 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\beta 0). \quad (5.40)$$

In questo caso, per la (IV.2.47), si ritrova allora il polinomio di Legendre:

$$d_{00}^l(\beta) = P_l(\cos \beta). \quad (5.41)$$

<sup>17</sup> Cfr. n. 4 p. 252; p. 180 dell'edizione tedesca, p. 167 della traduzione inglese.

*Operatori tensoriali irriducibili*

Le matrici di rotazione soddisfano le relazioni di ortonormalità:

$$\sum_m \mathcal{D}_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{D}_{m''m}^j(\alpha\beta\gamma) = \delta_{m'm''}, \quad (5.42)$$

$$\sum_m \mathcal{D}_{mm'}^{j*}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{D}_{mm''}^j(\alpha\beta\gamma) = \delta_{m'm''}. \quad (5.43)$$

Queste relazioni esprimono il fatto che  $\mathcal{D}_{mm'}^j(\alpha\beta\gamma)$  rappresentano una trasformazione unitaria che fa passare dall'insieme di  $2j + 1$  autostati  $\{|jm\rangle\}$  all'insieme di autostati ruotati  $\{R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle\}$ .

Infine vale la proprietà di ortogonalità sulla sfera unitaria,

$$\int d\Omega \mathcal{D}_{m_1 m_2}^{j*}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{D}_{m_1' m_2'}^j(\alpha\beta\gamma) = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}, \quad (5.44)$$

dove l'integrale si estende sull'intervallo completo dei tre angoli di Eulero della rotazione:

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi d\beta \sin \beta \int_0^{2\pi} d\gamma. \quad (5.45)$$

*Esercizio 5.2*

Trascrivere la (5.26) nella rappresentazione delle posizioni per una funzione  $\psi_{jm} = \langle \mathbf{r} | jm \rangle$ .

*Esercizio 5.3*

Con l'ausilio delle relazioni di ortogonalità delle matrici di rotazione, verificare che la norma della funzione  $\psi_{jm}$  dell'Esercizio precedente si conserva.

*VI.6. Operatori tensoriali irriducibili*

La (5.26) esprime la proprietà di sottospazio invariante rispetto alla rotazione da parte dell'insieme di autovettori  $\{|jm\rangle\}$  con  $j$  fissato. Analogamente è utile considerare anche un insieme di operatori che si trasforma in sé per effetto di una rotazione. Siano dati  $2k + 1$  operatori,  $T_q^k$  ( $|q| \leq k$ ), che, in virtù di una rotazione  $S$ , obbediscono alla seguente legge di trasformazione:

$$S T_q^k S^{-1} = \sum_{q'} \mathcal{D}_{q'q}^k T_{q'}^k. \quad (6.1)$$

*Rappresentazioni*

Si dice allora che gli operatori  $T_q^k$  costituiscono le  $2k + 1$  componenti di un *operatore tensoriale irriducibile* di ordine  $k$ ,  $\mathbf{T}^k$ . Analogamente alla legge di trasformazione (5.26), l'indice  $k$  può assumere valori interi o seminteri<sup>18</sup>.

Per  $k = 0$ , l'unico operatore in gioco,  $T_0^0$ , è un operatore scalare rispetto alle rotazioni e, dalla (6.1), segue appunto

$$[S, T_0^0] = 0. \quad (6.2)$$

Per  $k = 1$  si possono costruire gli operatori tensoriali irriducibili di ordine 1,  $T_q^1$ , mediante le componenti cartesiane  $e_x, e_y, e_z$  di un operatore vettoriale,  $\mathbf{e}$ . Gli operatori

$$e_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \pm ie_y), \quad e_0 = e_z, \quad (6.3)$$

costituiscono i tre operatori tensoriali irriducibili di ordine 1, cioè

$$T_q^1 = e_q \quad (q = 0, \pm 1). \quad (6.4)$$

Per la dimostrazione della (6.4) si rilevi che gli  $e_q$  sono ottenuti come combinazioni lineari delle componenti cartesiane  $e_x, e_y, e_z$  allo stesso modo in cui le armoniche sferiche  $Y_{lm}$  sono costruite mediante le componenti cartesiane del vettore  $\mathbf{r}$  (cfr. Tab. IV.2). Ma in generale le armoniche sferiche  $Y_{lm}(\theta\phi)$ , considerate come operatori, si possono riconoscere come le  $2l + 1$  componenti di un operatore tensoriale irriducibile di ordine  $l$ ,  $\mathbf{Y}^l$ . Infatti, ricordando che le armoniche sferiche sono il rappresentativo degli autostati del momento angolare nella rappresentazione delle posizioni,

$$Y_{lm}(\theta\phi) = \langle \theta\phi | lm \rangle, \quad (6.5)$$

e che, per la (5.26), l'applicazione della rotazione  $S$  allo stato  $|lm\rangle$  fornisce

$$S|lm\rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^l(\alpha\beta\gamma) |lm'\rangle, \quad (6.6)$$

si ottiene

$$\langle \theta\phi | S | lm \rangle = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^l(\alpha\beta\gamma) \langle \theta\phi | lm' \rangle. \quad (6.7)$$

D'altra parte è

$$\langle \theta\phi | S | lm \rangle = \langle \theta'\phi' | lm \rangle = Y_{lm}(\theta'\phi'), \quad (6.8)$$

---

<sup>18</sup> Il concetto di operatore tensoriale irriducibile fu introdotto nel 1931 da Wigner nel libro citato alla n. 4 p. 252, ma fu ampiamente studiato da Giulio Racah (1909–1965).

G. Racah: *Theory of Complex Spectra. I. II. III. [Teoria degli spettri complessi. I. II. III.]*, Physical Review **61** (1942) 186–197; **62** (1942) 438–462; **63** (1943) 367–382.

*Inversione temporale*

e quindi

$$Y_{lm}(\theta' \phi') = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^l(\alpha\beta\gamma) Y_{lm'}(\theta\phi). \quad (6.9)$$

*Esercizio 6.1*

Partendo dalla (6.9) e dalla (5.39), verificare la (IV.2.53).

La (6.1) vale per qualunque rotazione e dunque anche per una rotazione infinitesimale del tipo

$$S = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \epsilon J_u. \quad (6.10)$$

Per la (4.25), la (6.1) può essere allora riscritta nella forma

$$T_q^k - \frac{i}{\hbar} \epsilon [J_u, T_q^k] = \sum_{q'} \mathcal{D}_{q'q}^k T_{q'}^k. \quad (6.11)$$

La conoscenza della matrice  $\mathcal{D}_{q'q}^k$  associata alla rotazione infinitesimale (6.10) determina quindi il commutatore  $[J_u, T_q^k]$ .

*Esercizio 6.2*

Ricavare le seguenti regole di commutazione degli operatori tensoriali irriducibili  $T_q^k$  con gli operatori di momento angolare:

$$[J_z, T_q^k] = \hbar q T_q^k, \quad (6.12)$$

$$[J_{\pm}, T_q^k] = \hbar \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{q \pm 1}^k. \quad (6.13)$$

*VI.7. Inversione temporale*

Si verificano anche simmetrie non descritte da operatori unitari. Qui interessa la possibilità di invertire il senso di scorrimento del tempo. In fisica classica per un sistema soggetto a forze conservative le equazioni del moto prevedono la possibilità di soluzioni che, per inversione temporale, riproducono la stessa traiettoria nello spazio delle fasi percorsa a ritroso: l'operazione di *inversione temporale*,  $t \rightarrow -t$ , cambia di segno gli impulsi provocando un' *inversione del moto*. In meccanica quantistica si può definire un *operatore di inversione temporale*,  $\mathcal{T}$ , che, agendo sullo stato  $|\Psi(t)\rangle$  soggetto all'equazione di Schrödinger,

*Rappresentazioni*

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle, \quad (7.1)$$

lo trasforma nello stato

$$|\bar{\Psi}(t)\rangle = \mathcal{T} |\Psi(t)\rangle, \quad (7.2)$$

che descrive la stessa situazione di  $|\Psi(t)\rangle$ , ma con gli impulsi cambiati di segno.

La hamiltoniana  $H$  è invariante per un cambiamento di segno degli impulsi e quindi commuta con  $\mathcal{T}$ ,

$$\mathcal{T}H = H\mathcal{T}, \quad (7.3)$$

cioè

$$\mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1} = H. \quad (7.4)$$

Allora  $|\bar{\Psi}(t)\rangle$  soddisfa l'equazione

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\bar{\Psi}(t)\rangle = H |\bar{\Psi}(t)\rangle, \quad (7.5)$$

dove il segno negativo è dovuto alla derivata temporale.

D'altra parte, agendo con  $\mathcal{T}$  sulla (7.1) e tenendo presente che il parametro reale  $t$  commuta con  $\mathcal{T}$ , si ottiene

$$\mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{T} |\Psi(t)\rangle = \mathcal{T}H\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T} |\Psi(t)\rangle, \quad (7.6)$$

che coincide con la (7.5) se si impone

$$\mathcal{T}i\mathcal{T}^{-1} = -i. \quad (7.7)$$

Questa relazione è un caso particolare della relazione che definisce un *operatore antilineare*  $A$ :

$$A [c_1 |\Psi_1\rangle + c_2 |\Psi_2\rangle] = c_1^* A |\Psi_1\rangle + c_2^* A |\Psi_2\rangle. \quad (7.8)$$

Ogni operatore antilineare  $A$  può essere rappresentato come il prodotto di un operatore lineare  $L$  e l'operatore  $K$  di complessa coniugazione:

$$A = L K. \quad (7.9)$$

In particolare, se l'operatore lineare  $L$  utilizzato nel prodotto con  $K$  è unitario,  $L = U$ , l'operatore antilineare risultante è un *operatore antiunitario*. È conveniente scegliere  $\mathcal{T}$  antiunitario:

$$\mathcal{T} = U K, \quad U^\dagger = U^{-1}. \quad (7.10)$$

*Inversione temporale*

In tal modo il prodotto scalare tra due stati  $|\bar{\psi}_a\rangle$  e  $|\bar{\psi}_b\rangle$ , ottenuti per inversione temporale dagli stati  $|\psi_a\rangle$  e  $|\psi_b\rangle$ , risulta:

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}_a|\bar{\psi}_b\rangle &= \langle U K \psi_a | U K \psi_b \rangle \\ &= \langle K \psi_a | U^\dagger U | K \psi_b \rangle \\ &= \langle \psi_a | \psi_b \rangle^*,\end{aligned}$$

cioè

$$\langle\bar{\psi}_a|\bar{\psi}_b\rangle = \langle\psi_b|\psi_a\rangle. \quad (7.11)$$

In particolare la norma,

$$\langle\bar{\psi}_a|\bar{\psi}_a\rangle = \langle\psi_a|\psi_a\rangle^* = \langle\psi_a|\psi_a\rangle, \quad (7.12)$$

rimane inalterata in quanto è un numero reale.

Per costruire esplicitamente  $\mathcal{T}$  occorre definire  $U$ . Per la (7.3) deve essere

$$UH^* = HU. \quad (7.13)$$

L'espressione di  $U$  quindi dipende dal tipo di hamiltoniana e dalla rappresentazione scelta.

Se la hamiltoniana dipende solo dagli operatori di posizione e di impulso, nella rappresentazione delle posizioni è  $H^* = H$ ; in assenza di campo elettromagnetico, senza perdita di generalità si può allora scegliere  $U = \mathbb{1}$  (cfr. Esercizio III.3.7) e, come in fisica classica, quando si inverte il senso del tempo le coordinate di posizione non cambiano, mentre gli impulsi e i momenti angolari cambiano segno:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' &= \mathcal{T}\mathbf{r}\mathcal{T}^{-1} = \mathbf{r}, \\ \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' &= \mathcal{T}\mathbf{p}\mathcal{T}^{-1} = -\mathbf{p}, \\ \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{L}' &= \mathcal{T}\mathbf{L}\mathcal{T}^{-1} = -\mathbf{L}.\end{aligned} \quad (7.14)$$

Nella rappresentazione degli impulsi invece  $H^* \neq H$  e quindi occorre considerare esplicitamente un operatore  $U = U_p$  che inverte gli impulsi.

In presenza di un campo elettromagnetico descritto da un potenziale vettore  $\mathbf{A}$ , per lasciare invariante la hamiltoniana occorre scambiare, oltre che  $\mathbf{p}$  in  $-\mathbf{p}$ , anche  $\mathbf{A}$  in  $-\mathbf{A}$ . Perciò nella rappresentazione delle posizioni occorre un operatore  $U = U_A$  che inverte  $\mathbf{A}$  in  $-\mathbf{A}$ , mentre nella rappresentazione degli impulsi si deve avere  $U = U_A U_p$ .