

II. LA CRISI DELLA FISICA CLASSICA

I risultati della fisica classica, rapidamente richiamati nel primo capitolo, sono stati acquisiti entro la fine del XIX secolo e, all'epoca, costituivano una soddisfacente organizzazione teorica per i vari settori della fisica. All'interno di ogni settore, i sistemi di concetti e di leggi appaiono coerenti e chiusi in sé: la formulazione matematica alimenta la fiducia nella possibilità di una descrizione oggettiva dei fenomeni naturali attraverso il meccanismo deterministico di causa ed effetto. Alcune grandi sintesi, come l'unificazione dei fenomeni elettrici e magnetici o la teoria cinetica della materia, sostengono inoltre l'idea che meccanica, termodinamica, acustica, ottica siano solo branche distinte in attesa di trovare una nuova collocazione in una teoria globale e unificata, nella quale comunque la meccanica analitica deve giocare un ruolo determinante.

Questa fiducia però viene scossa verso la fine del XIX e l'inizio del XX secolo. Da un lato, un numero insieme di evidenze sperimentali, inspiegabili alla luce dei principi della fisica classica, hanno provocato un riesame critico dello schema concettuale. Dall'altro, l'approfondimento dei fondamenti teorici conseguente al desiderio di sintesi ha imposto un radicale cambiamento nella descrizione stessa dei fenomeni fisici.

La crisi si è articolata in varie direzioni, sia all'interno di ognuna delle branche della fisica classica, sia soprattutto nei confronti del programma di unificazione tra le branche stesse.

In primo luogo occorre ricordare che il merito della descrizione oggettiva di un fenomeno è legato alla possibilità di darne una descrizione matematica nella quale la legge fisica, indipendente dall'osservatore, viene tradotta in un'equazione che non dipende dal sistema di riferimento scelto. La meccanica analitica gode di questo privilegio se si restringe la classe dei possibili sistemi di riferimento a quelli cosiddetti inerziali, quei sistemi cioè per i quali vale la legge d'inerzia, e se si ammette che il tempo sia un parametro di evoluzione assoluto, indipendente dall'osservatore.

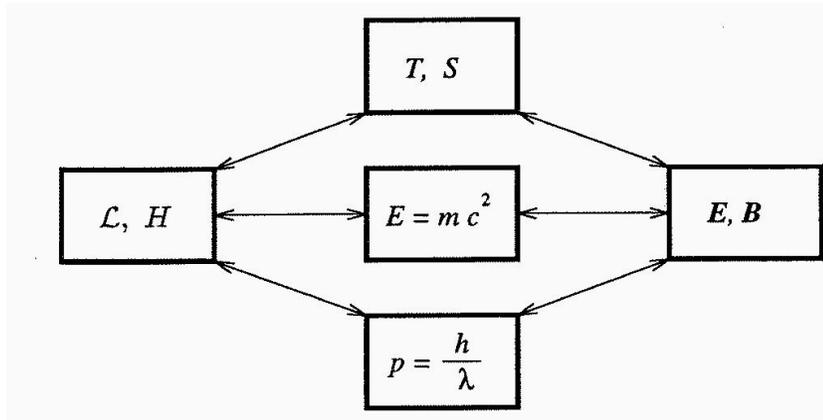


Fig. 1.1. Il superamento della crisi prodottasi nel cercare di unificare i diversi settori della fisica, quali la macrofisica (descritta in termini di grandezze termodinamiche come la temperatura T e l'entropia S), la meccanica (con le sue funzioni lagrangiana \mathcal{L} e hamiltoniana H), l'elettromagnetismo (con i campi elettrico E e magnetico B), è stato reso possibile nella prima parte del XX secolo introducendo nuovi concetti e un nuovo modo di pensare la realtà, grazie alla teoria della relatività (con la sua equivalenza tra energia E e massa m e l'invarianza della velocità della luce c) e la meccanica quantistica (che associa, tramite la costante di Planck h , un'onda di lunghezza d'onda λ al moto di una particella di impulso p).

Ciò non è immediatamente applicabile ai fenomeni elettromagnetici; le equazioni di Maxwell restano invarianti, per cambiamento da un sistema di riferimento inerziale a un altro, se si coinvolge nella trasformazione delle coordinate anche il tempo. Questo fatto, riconosciuto da Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928)¹, resta inconciliabile con la legge di composizione delle velocità secondo la meccanica di Galileo e di Newton. Esso inoltre rende ragione di un importante risultato di una serie memorabile di esperimenti, iniziata intorno al 1880 dai fisici americani Albert Abraham Michelson (1852–1931) e Edward Williams Morley (1838–1923)² per verificare l'esistenza del cosiddetto etere cosmico che doveva fare da supporto elastico alla propagazione dell'onda luminosa. La ricerca però si concluse con esito negativo, nonostante i continui perfezionamenti dell'apparato sperimentale, e dimostrò piuttosto la costanza della velocità di propagazione della luce, indipendentemente dalla velocità dell'osservatore inerziale rispetto al mezzo nel quale avviene

¹ H.A. Lorentz: *De relatieve beweging van de aarde en den aether [Il moto relativo di terra e etere]*, Verslag van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **1** (1892) 74–79.

² A.A. Michelson e E.W. Morley: *On the relative motion of the earth and the luminiferous ether [Sul moto relativo della terra rispetto all'etere luminifero]*, American Journal of Science **34** (1887) 333–345; Philosophical Magazine **24** (1887) 449–463.

la propagazione: la velocità c della luce nel vuoto è indipendente dal sistema di riferimento inerziale.

Il miglioramento delle tecniche di indagine permette di sondare la struttura della materia nei suoi elementi costitutivi. Gli strumenti spettroscopici producono dettagliate analisi dei processi di assorbimento ed emissione di radiazione. Già nel 1814 Joseph von Fraunhofer (1787–1826)³ aveva messo in evidenza nello spettro solare sottili righe oscure che ora portano il suo nome. Lo studio di queste righe permise a Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) di approfondire il legame tra emissione e assorbimento di luce, giungendo nel 1859 ad affermare che, “per raggi della stessa lunghezza d’onda alla stessa temperatura, il rapporto tra potere emissivo e potere assorbitivo è lo stesso per tutti i corpi”⁴. La legge di Kirchhoff si applicava a un corpo perfettamente nero, cioè “un corpo che assorbe tutte le radiazioni che vi incidono”⁵, ed era confermata sperimentalmente⁶. La distribuzione dell’intensità della radiazione di corpo nero in funzione della frequenza costituì un banco di prova per ipotesi nuove e stimolò la fantasia di molti ricercatori anche dopo che Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947) propose la sua formula con una comunicazione alla Società Tedesca di Fisica nella seduta del 14 dicembre 1900⁷.

Ma anche le regolarità degli spettri atomici sono inspiegabili con le leggi dell’elettromagnetismo e pongono inquietanti interrogativi sulla costituzione della materia. L’idea della costituzione atomica della materia ha origini nel pensiero greco, ma si è sviluppata in epoca moderna grazie agli studi di chimica. Tuttavia, nonostante il successo della classificazione degli elementi fatta nel 1869 da parte di Dmitri Ivanovich Mendeleev (1834–1907)⁸, verso la fine del XIX secolo la teoria atomica non era ancora comunemente accettata, anche se godeva di maggior credito presso i fisici che non presso i chimici.

³ J. Fraunhofer: *Bestimmung des Brechungs- und Farbzerstreuungs-Vermögens verschiedener Glasarten [Determinazione del potere di rifrazione e di dispersione di colore di molti tipi di vetro]*, in *Bezug auf die Vervollkommung achromatischer Fernrohre [Rapporto sul perfezionamento di telescopi acromatici]*, Denkschriften der Königlischen Akademie der Wissenschaften (München) **5** (1814) 193–226.

⁴ G.R. Kirchhoff: *Über den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme [Relazione tra emissione e assorbimento di luce e calore]*, Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin (Dezember 1859) p. 783–787.

⁵ G.R. Kirchhoff: *Über das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht [Rapporto tra il potere emissivo e il potere assorbitivo dei corpi per luce e calore]*, Annalen der Physik **109** (1860) 275–301.

⁶ Balfour Stewart (1828–1887): *An account of some experiments on radiant heat involving an extension of Prévost’s theory of exchanges [Relazione su alcuni esperimenti sul calore di radiazione con un’estensione della teoria di Prévost sugli scambi]*, Transactions of the Royal Society of Edinburgh **22** (1858) 1–20.

⁷ M. Planck: *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum [Teoria della legge di distribuzione d’energia nello spettro normale]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **2** (1900) 237–245. A questa relazione, di importanza storica per l’avvio della meccanica quantistica, seguì l’articolo: *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum [Legge di ripartizione dell’energia nello spettro normale]*, Annalen der Physik **4** (1901) 553–563.

⁸ Mendeleev pubblicò la sua classificazione degli elementi in un articolo comparso sulla rivista russa di ricerche chimiche (*Zhurnal Russkogo Chimicheskogo Obchestva* **1** (1869) 60–67) con il titolo: *Relazione tra proprietà e pesi atomici degli elementi*.

La discussione sulla natura dei raggi catodici, scoperti nel 1895 da Wilhelm Conrad Röntgen (1845–1923)⁹, era sfociata nella scoperta dell'elettrone avvenuta nel 1897 per merito di Joseph John Thomson (1856–1940)¹⁰, che fu in grado di determinare la velocità, il rapporto tra carica e massa e il segno della carica dei raggi catodici¹¹. Contemporaneamente Antoine-Henri Becquerel (1852–1908)¹² scopriva la radioattività naturale e un suo studio sistematico veniva condotto dai coniugi Curie, Pierre (1859–1906) e Marja Sklodowska (1867–1934). Si faceva sempre più strada la convinzione di un atomo (neutro) con struttura composita, di cui l'elettrone (negativo) era il solo costituente noto¹³. La tentazione di costruire modelli dell'atomo era naturale, anche se le informazioni sperimentali erano ancora molto limitate¹⁴. Solo dopo quello che è noto come l'esperimento di Ernest Rutherford of Nelson (1871–1937)¹⁵ si affermò l'idea di un nucleo atomico carico positivamente con un numero di elettroni esterni tale da rendere globalmente neutro l'intero atomo.

⁹ L'otto novembre 1895 Röntgen, rettore dell'Università di Würzburg, scoprì casualmente quelli che oggi sono chiamati raggi *X*. Per tale scoperta egli fu il primo scienziato ad essere insignito del premio Nobel per la Fisica nel 1901.

¹⁰ J.J. Thomson: *Cathode-rays [Raggi catodici]*, Philosophical Magazine **44** (1897) 293–316.

¹¹ Il nome *elettrone*, divulgato da H.A. Lorentz, fu coniato da George Johnstone Stoney (1826–1911): *Of the "electron", or atom of electricity [L'elettrone o atomo di elettricità]*, Philosophical Magazine **38** (1894) 418–420.

¹² Una lista dei primi lavori sulla radioattività e una relazione dei risultati ottenuti fu redatta dallo stesso Becquerel: *Recherches sur une propriété nouvelle de la matière. Activité radiante spontanée ou radioactivité de la matière [Ricerche su una proprietà nuova della materia. Attività raggianti spontanea o radioattività della materia]*, Mémoires de l'Académie des Sciences (Paris) **46** (1903).

¹³ Il valore assoluto della carica dell'elettrone è stato misurato da Robert Andrews Millikan (1868–1953): *On the elementary electric charge and the Avogadro constant [Carica elettrica elementare e numero di Avogadro]*, Physical Review **2** (1913) 109–143.

¹⁴ È interessante osservare che Jean Baptiste Perrin (1870–1942) già nel 1902 aveva ipotizzato una carica positiva centrale circondata da una nuvola di elettroni che ne compensassero la carica. Tuttavia il modello di atomo più accreditato era quello di J.J. Thomson in cui l'atomo di idrogeno, per esempio, era visto come una sfera carica positiva di raggio 10^{-8} cm con un elettrone oscillante al centro.

J. Perrin: *Les hypothèses moléculaires [Le ipotesi molecolari]*, Revue Scientifique **15** (1902) 449–461.
J.J. Thomson: *The magnetic properties of systems of corpuscles describing circular orbits [Le proprietà magnetiche di sistemi di particelle che descrivono orbite circolari]*, Philosophical Magazine **6** (1903) 673–693; *On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure [Struttura dell'atomo: ricerca sulla stabilità e sui periodi di oscillazione di un numero di particelle disposte a intervalli uguali lungo una circonferenza; con applicazione dei risultati alla teoria della struttura atomica]*, Philosophical Magazine **7** (1904) 237–265.

¹⁵ In realtà nel 1909 Hans Geiger e Ernest Marsden, lavorando a Manchester nel laboratorio diretto da Rutherford, avevano osservato che la diffusione di particelle α da parte di lamine sottili mostrava una sorprendente distribuzione angolare anche ad angoli molto grandi rispetto alla direzione incidente. E ciò era incomprensibile senza l'ipotesi, formulata un paio d'anni più tardi dallo stesso Rutherford, che l'atomo bersaglio presentasse un nocciolo interno.

H. Geiger e E. Marsden: *On a diffuse reflection of the α -particles [Riflessione per diffusione di particelle α]*, Proceedings of the Royal Society of London **A82** (1909) 495–500.

E. Rutherford: *The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom [Diffusione di particelle α e β da parte della materia e struttura dell'atomo]*, Philosophical Magazine **21** (1911) 669–688.

In tale modello l'elettrone, costretto a muoversi attorno al nucleo atomico, è soggetto a continue accelerazioni e quindi, per l'elettromagnetismo classico, deve irraggiare in modo continuo. Invece la spettroscopia atomica aveva raccolto in quegli anni una messe ricchissima di dati con cui inconfutabilmente si dimostrava l'esistenza di spettri atomici di emissione e di assorbimento discreti. Le righe dello spettro, corrispondenti a ben precise lunghezze d'onda della radiazione, presentano una regolarità all'epoca incomprensibile.

Nell'interazione tra la radiazione e la materia si esaltano i problemi di compatibilità tra la descrizione della meccanica analitica, della termodinamica e dell'elettromagnetismo. Gli aspetti corpuscolari della radiazione, già suggeriti dall'interpretazione dello spettro di corpo nero, trovano conferma nella fenomenologia dell'effetto fotoelettrico, correttamente spiegata nel 1905 da Albert Einstein (1879–1955)¹⁶, e negli esperimenti sui raggi *X* condotti da Arthur Holly Compton (1892–1962) negli anni 1921–1923¹⁷.

La scoperta di nuovi fenomeni come la radioattività e la presenza di nuove particelle all'interno degli atomi impone un modello della loro struttura, coerente con la descrizione macroscopica del comportamento della materia. Accanto alla meccanica, la termodinamica e l'elettromagnetismo, si va costituendo un nuovo settore della fisica, la fisica atomica, che accentua ulteriormente il desiderio di sintesi, ma che contemporaneamente espone i limiti della descrizione classica del moto.

D'altra parte, anche all'interno delle singole branche emergono limitazioni di principio.

In meccanica, lo studio del problema a tre corpi, d'importanza fondamentale in meccanica celeste, fa riconoscere a Jules Henri Poincaré (1854–1912) l'impossibilità di determinare in generale altri integrali del moto, analitici e monodromi, oltre all'energia totale¹⁸. Perciò, anche sistemi apparentemente semplici risultano non integrabili. Le conseguenze sono di due tipi. Innanzi tutto esistono sistemi, e sono i più numerosi, per i quali non è possibile, mediante una trasformazione canonica, ricondursi a variabili d'angolo e d'azione, in modo da far comparire nella hamiltoniana solo queste ultime: i moti più interessanti in natura, a partire dal sistema a tre corpi, non sono dunque moti periodici. Questa difficoltà, ben nota a chi voleva estendere la descrizione meccanica ai fenomeni sia macroscopici che atomici, veniva però per il momento accantonata in base a un accettato principio di semplicità nell'affrontare i problemi nuovi, secondo il quale si parte dalle applicazioni più elementari.

L'altra conseguenza del teorema di Poincaré è più grave e solo in tempi più recenti è stata apprezzata nei suoi risvolti. Oggi viene citata come catastrofe di Poincaré.

¹⁶ A. Einstein: *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt* [Un punto di vista euristico riguardante la produzione e trasformazione della luce], *Annalen der Physik* **17** (1905) 132–148.

¹⁷ A.H. Compton: *A quantum theory of scattering of X-rays by light elements* [Teoria quantistica della diffusione dei raggi *X* da parte di elementi leggeri], *Physical Review* **21** (1923) 483–502.

¹⁸ J.H. Poincaré: *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, 3 voll., 1892–1899 (ristampa: Dover Publ., New York, 1957). Il fenomeno è trattato al cap. V del primo volume.

Essa consiste nel fatto che due traiettorie nello spazio delle fasi, inizialmente vicine e governate dalla stessa hamiltoniana, su tempi lunghi possono divergere in modo incontrollato quando si aggiunga un termine perturbativo alla hamiltoniana: una piccola modifica nella definizione delle condizioni iniziali si ripercuote allora in modo imprevedibile sulla soluzione delle equazioni del moto. Ciò deriva dalla non linearità di tali equazioni nelle variabili d'azione, che permette l'esistenza di punti singolari, responsabili di possibili instabilità delle soluzioni, e dalla non analiticità delle costanti del moto. Questo fatto rappresenta una grossa limitazione al determinismo della fisica classica e in generale all'uso del principio di causalità.

In termodinamica, le incipienti tecniche criogeniche consentono di studiare gli scambi di calore alle basse temperature, con il risultato sorprendente della dipendenza dei calori specifici dalla temperatura. L'approccio microscopico della meccanica statistica incontra dunque difficoltà di principio. L'ipotesi, formulata da Hermann Walter Nernst (1864–1941)¹⁹, che le variazioni di entropia tendano a zero per trasformazioni che avvengono a temperature assolute sempre più basse, indica che anche l'entropia, oltre che il calore specifico, deve tendere a zero per $T \rightarrow 0$. Allora diventa problematico l'uso del teorema di equipartizione dell'energia e il concetto di gas perfetto perde significato. Inoltre, per il gas perfetto, subentra il paradosso evidenziato da Josiah Willard Gibbs (1839–1903)²⁰: esso consiste nel prevedere un'entropia di miscelamento diversa da zero anche se i due gas perfetti che vengono mescolati adiabaticamente sono identici. Tale paradosso trova soluzione solo nell'ipotesi che le particelle dei due gas siano tra di loro indistinguibili; ma questa ipotesi contrasta con l'idea classica che ogni particella possa essere seguita, in linea di principio, lungo la sua traiettoria nello spazio delle fasi e perciò sia distinguibile dalle altre particelle del gas.

Infine occorre sottolineare che nell'ambito della meccanica statistica di Boltzmann e Gibbs non si riesce a comprendere l'approccio all'equilibrio di un sistema termodinamico. La termodinamica degli stati di non equilibrio e i problemi collegati alle transizioni di fase hanno trovato attenzione solo più tardi, in epoca a noi più vicina, e sono un settore della fisica tra i più interessanti dell'indagine attuale.

In questo capitolo vengono illustrati brevemente alcuni aspetti importanti all'origine della crisi, con riferimento soprattutto a quelli che hanno tuttora implicazioni per la ricerca fondamentale e a quelli che furono preludio alle idee di base dello sviluppo della meccanica quantistica.

La teoria della relatività, elaborata da Einstein nel 1905 nella sua forma speciale e

¹⁹ H.W. Nernst: *Über die Berechnung chemischer Gleichgewichte aus thermischen Messungen [Calcolo degli equilibri chimici mediante misure termiche]*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1906) 1–40.

²⁰ Gibbs studiò la termodinamica degli stati di equilibrio in una memoria di oltre 300 pagine, il cui riassunto fu pubblicato nel 1878 (*On the Equilibrium of Heterogeneous Substances [Equilibrio di sostanze eterogenee]*, American Journal of Science **16** (1878) 441). Il lavoro è riportato nel primo volume che raccoglie la sua opera intera. *The Scientific Papers of J. Willard Gibbs*, a cura di H.A. Bumstead e R.G. Van Name, New York, 1906, 2 voll.

successivamente sviluppata nel 1916 come teoria della relatività generale²¹, ha avuto un effetto sconvolgente sulla visione della fisica classica, ma qui viene solo ricordato quanto poi potrà essere utilizzato nello sviluppo della meccanica quantistica che è essenzialmente una teoria non relativistica. Gli effetti relativistici possono essere incorporati nella descrizione quantistica, ma richiedono un'estensione del formalismo che qui non è prevista. Tuttavia l'importanza della teoria della relatività nel cammino verso una descrizione unitaria dei fenomeni fisici è tale da giustificare almeno il piccolo cenno qui presentato.

La fisica classica però a cavallo della fine del XIX e l'inizio del XX secolo era anche in crisi per l'incapacità di conciliare la teoria della radiazione, sintetizzata dalle equazioni di Maxwell, con la fenomenologia che si andava scoprendo nell'emergente fisica atomica. Già la spettroscopia atomica aveva cominciato ad accumulare una messe di dati non riproducibili mediante l'elettromagnetismo classico. Inoltre, se dal punto di vista classico era chiara la distinzione tra le onde e le particelle, si cominciavano a scoprire comportamenti corpuscolari della radiazione che rimettevano in discussione l'antico problema della natura della luce. D'altra parte, gli elettroni negli atomi sembravano soggetti a disporsi con valori discreti di energia e di momento angolare, che la meccanica classica non era in grado di spiegare.

Di questi fenomeni vengono qui illustrate alcune evidenze sperimentali e viene brevemente esaminato un primo tentativo di spiegazione alla luce della vecchia teoria dei quanti, basata sulle regole di quantizzazione proposte nel 1913 dal danese Niels Hendrik David Bohr (1885–1962)²² e generalizzate nel 1916 dal tedesco Arnold Sommerfeld (1868–1951)²³.

²¹ A. Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper [Elettrodinamica dei corpi in movimento]*, *Annalen der Physik* **17** (1905) 891–921; *Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie [Fondamenti della teoria della relatività generale]*, *Annalen der Physik* **49** (1916) 769–822.

²² Il giovane Bohr era a Cambridge da Thomson fino al marzo 1912, ma si trasferì a Manchester da Rutherford su segnalazione di Thomson stesso, dove rimase fino alla fine di agosto per poi tornare in settembre a Copenhagen. Durante questi mesi maturò l'idea che lo portò alla formulazione del nuovo modello atomico.

N. Bohr: *On the constitution of atoms and molecules [Struttura degli atomi e delle molecole]*, *Philosophical Magazine* **26** (1913) 1–25, 476–502, 857–875.

²³ A. Sommerfeld: *Zur Quantentheorie der Spektrallinien [Teoria quantistica delle righe spettrali]*, *Annalen der Physik* **51** (1916) 1–94, 125–167.

II.1. Principio di relatività ristretta

Per garantire l'oggettività della descrizione dei fenomeni naturali le leggi fisiche non devono essere vincolate alla scelta dell'osservatore. Il problema si è posto fin dalle origini della formulazione della meccanica e ha trovato parziale soluzione nel *principio d'inerzia* di Galileo, in base al quale viene privilegiata la classe degli osservatori *inerziali*.

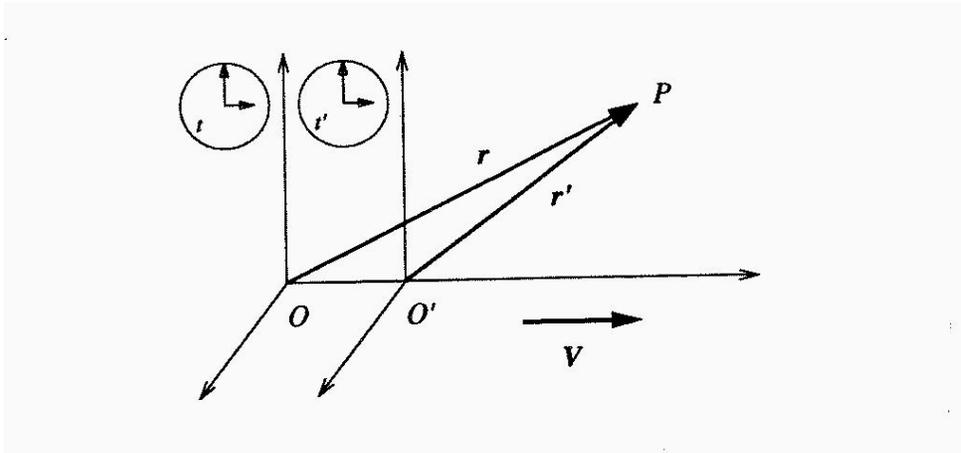


Fig. 1.1. Due sistemi inerziali in moto relativo con velocità V .

Se O e O' rappresentano due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo con velocità V , all'istante t la posizione del punto P può descriversi equivalentemente mediante il vettore r oppure il vettore r' , spiccati rispettivamente da O e da O' (fig. 1.1). Le due descrizioni del moto di P sono tra loro collegate in virtù della trasformazione

$$\begin{cases} r' = r - Vt, \\ t' = t, \end{cases} \quad (1.1)$$

che è chiamata *trasformazione di Galileo*. Ai due osservatori posti in O e in O' viene attribuito lo stesso orologio ($t = t'$), in quanto il tempo, così come lo spazio geometrico tridimensionale sede del moto dei corpi, è considerato in modo *assoluto*, indipendente dall'osservatore.

Il *principio di relatività* nella meccanica classica esige che le leggi della dinamica siano invarianti per trasformazioni di Galileo. Infatti per la (1.1) le velocità v e v' , misurate da O e da O' , sono legate dalla relazione

$$v' = v - V, \quad (1.2)$$

e quindi le corrispondenti accelerazioni a e a' sono uguali:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}. \quad (1.3)$$

Pertanto la legge fondamentale della dinamica, che per il *secondo principio* di Newton determina l'accelerazione del punto P provocata dalla forza, non cambia passando dalla descrizione rispetto a O a quella rispetto a O' .

Si può riconoscere che i fenomeni di tipo elettromagnetico, descritti dalle equazioni di Maxwell in un sistema di riferimento inerziale O , non vengono più descritti da equazioni invarianti in forma in un nuovo riferimento inerziale O' . In particolare, la velocità c della luce nel vuoto è indipendente dal sistema di riferimento inerziale e per essa quindi non vale la legge di composizione delle velocità (1.2) che deriva dalla trasformazione di Galileo.

Infatti le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni di Galileo, bensì per *trasformazioni di Lorentz*. Le trasformazioni di Lorentz si possono dedurre imponendo che, nel passaggio dal sistema di riferimento O a quello O' , resti invariante la forma quadratica delle coordinate e del tempo:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2. \quad (1.4)$$

La condizione $d^2 = 0$ determina la superficie sferica i cui punti sono raggiunti dopo un tempo t dai raggi luminosi emessi all'istante 0 da una sorgente posta nell'origine O ; essa deve rimanere inalterata nel sistema di riferimento O' per conservare l'indipendenza della velocità della luce dal sistema di riferimento inerziale adottato. Scegliendo allora O' in moto rispetto a O con velocità \mathbf{V} e con l'asse x' parallelo all'asse x (fig. 1.1), la condizione

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2, \quad (1.5)$$

è soddisfatta se si utilizza la trasformazione seguente:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt), \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right), \end{cases} \quad (1.6)$$

dove

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.7)$$

La (1.6) è una particolare trasformazione di Lorentz e può essere invertita:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + Vt), \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \gamma \left(t' + \frac{\beta x'}{c} \right). \end{cases} \quad (1.8)$$

È immediato riconoscere che per $\beta \ll 1$, cioè per velocità relative tra O e O' piccole rispetto alla velocità della luce nel vuoto c , la trasformazione di Lorentz (1.6) si riduce alla trasformazione di Galileo (1.1). In generale però le trasformazioni di Lorentz implicano una connessione spazio-temporale che impone anche una modifica della coordinata temporale nel passaggio dal sistema O al sistema O' . In tal modo perde di significato il concetto classico di *simultaneità* di un avvenimento rispetto a due osservatori inerziali.

Nel 1905 Einstein estese il principio di relatività a tutte le leggi della fisica: non solo per i fenomeni elettromagnetici, ma anche per le leggi della meccanica, Einstein intuì che la legge di trasformazione corretta, per passare dalla descrizione del fenomeno fisico fatta dall'osservatore inerziale O a quella fatta dall'osservatore inerziale O' , fosse la trasformazione di Lorentz. Allora i fenomeni elettromagnetici sono correttamente descritti dalle equazioni di Maxwell che godono della richiesta invarianza, mentre occorre riformulare la meccanica classica, basata sull'esistenza di un tempo assoluto, indipendente dal particolare osservatore ($t = t'$).

Esercizio 1.1

Verificare che le equazioni di Maxwell (I.3.16) sono invarianti per trasformazioni di Lorentz.

Esempio 1.1

Una sbarra parallela agli assi x e x' di due sistemi inerziali è in quiete rispetto a O' che si muove rispetto a O con velocità \mathbf{V} . Come conseguenza della trasformazione di Lorentz, la lunghezza $l = x_2 - x_1$ della sbarra vista da O risulta diversa dalla lunghezza $l' = x'_2 - x'_1$ misurata da O' . Infatti, dalla prima delle (1.6) si ottiene

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - Vt), \\ x'_2 &= \gamma(x_2 - Vt), \end{aligned}$$

da cui

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (1.9)$$

È questo il cosiddetto fenomeno della *contrazione delle lunghezze* degli oggetti in moto.

Esempio 1.2

Si definisce *evento* un avvenimento che si verifica a un certo istante in un determinato punto dello spazio ordinario tridimensionale. L'intervallo di tempo è quindi il tempo che per un certo osservatore intercorre tra due eventi. Si considerino allora due eventi che si verificano nello stesso punto x' rispetto all'osservatore O' agli istanti t'_1 e t'_2 . Il tempo $\tau' = t'_2 - t'_1$ rappresenta il tempo *proprio* del fenomeno osservato da O' . A causa delle trasformazioni di Lorentz, l'intervallo di tempo τ' misurato da O' , in moto relativo rispetto a O con velocità V diretta come x e x' , è diverso dall'intervallo $\tau = t_2 - t_1$ che appare a O . Infatti per la quarta delle (1.8) risulta:

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{\beta x'}{c} \right), \quad t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{\beta x'}{c} \right),$$

da cui

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.10)$$

L'intervallo di tempo proprio del fenomeno che avviene solidalmente con l'osservatore O' appare dunque più lungo all'osservatore O , per il quale l'evento iniziale e l'evento finale si sono verificati in punti spazialmente distinti. È questo il cosiddetto fenomeno della *dilatazione dei tempi*.

La contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi, presentate negli Esempi 1.1 e 1.2, sono una diretta conseguenza cinematica dell'invarianza della velocità della luce che è contenuta nelle trasformazioni di Lorentz. Si può verificare questa invarianza riconoscendo la nuova legge di composizione delle velocità imposta dalle trasformazioni di Lorentz (1.6):

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt'} \equiv v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \beta v_x/c}, \\ \frac{dy'}{dt'} \equiv v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta v_x/c}, \\ \frac{dz'}{dt'} \equiv v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta v_x/c}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Si vede allora che la velocità di propagazione di un segnale luminoso, spedito da O nella direzione x ($v_x = c$, $v_y = v_z = 0$), nel sistema O' risulta:

$$v'_x = \frac{c - V}{1 - \beta} = c, \quad v'_y = v'_z = 0. \quad (1.12)$$

Dato che le trasformazioni di Lorentz coinvolgono contemporaneamente sia le coordinate spaziali che la coordinata temporale, la rappresentazione geometrica di un evento appare più opportuna come un punto in uno spazio a quattro dimensioni, detto *spazio-tempo*. Ogni evento viene allora descritto nel sistema O da un tetravettore

x_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) con tre componenti fornite dalle componenti del vettore spaziale ordinario \mathbf{r} e con la quarta componente costituita dalla coordinata temporale moltiplicata per ic : $x_\mu = (\mathbf{r}, ict)$. L'unità immaginaria nella componente temporale è necessaria per definire la norma di questo tetravettore, $\sum_\mu x_\mu x_\mu = r^2 - (ct)^2$, in accordo con la (1.5): questo significa però che la metrica dello spazio-tempo non è euclidea²⁴.

Cambiando sistema di riferimento, le nuove componenti x'_μ si ottengono dalle vecchie mediante una trasformazione di Lorentz,

$$x'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu, \quad (1.13)$$

dove in generale la matrice dei coefficienti $a_{\mu\nu}$ deve essere una matrice ortogonale per conservare la norma del vettore:

$$\sum_\mu a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = \sum_\mu a_{\nu\mu} a_{\lambda\mu} = \delta_{\nu\lambda}. \quad (1.14)$$

Nel caso della trasformazione (1.6) si ha:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Questo è un caso particolare con

$$\det a_{\mu\nu} = 1, \quad (1.16)$$

che rientra in quelle che vengono dette trasformazioni di Lorentz *proprie*²⁵.

L'elemento di volume dello spazio-tempo,

$$i d^4x \equiv dx dy dz ict, \quad (1.17)$$

è invariante, perché lo jacobiano delle trasformazioni di Lorentz proprie vale uno.

Ricorrendo alla formulazione geometrica nello spazio-tempo le equazioni dell'elettrodinamica acquistano una forma particolarmente elegante, che permette di riconoscere a vista la loro invarianza per trasformazioni di Lorentz. Questa formulazione si fonda sul *principio di invarianza della carica elettrica* e sul seguente *teorema*: se un tetravettore j_μ ha divergenza nulla, $\sum_\mu \partial_\mu j_\mu = 0$ ²⁶, e se le componenti di j_μ sono diverse da zero solo in una regione spaziale finita, allora l'integrale $\int dx \int dy \int dz j_4$ è invariante.

²⁴ La metrica definisce la distanza elementare ds tra due punti dello spazio-tempo; con le convenzioni adottate essa risulta pari a $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - (ct)^2$ (cfr. eq. (1.4)). Spesso in letteratura viene preferita la metrica opposta, con l'unica conseguenza di cambiare segno alla norma dei tetravettori.

²⁵ Per le trasformazioni di Lorentz *improprie* è $\det a_{\mu\nu} = -1$.

²⁶ Con notazione usuale si è indicato con ∂_μ la derivata parziale rispetto a x_μ .

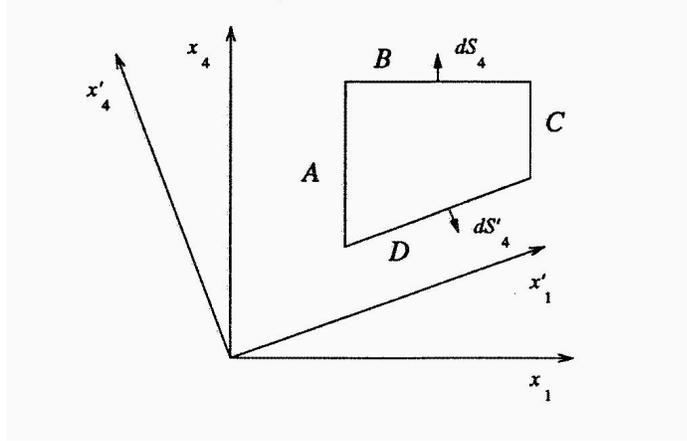


Fig. 1.2.

La dimostrazione di questo teorema fa uso del lemma di Gauss-Green in quattro dimensioni,

$$\int i d^4 x \sum_{\mu} \partial_{\mu} j_{\mu} = \int dS_{\mu} \sum_{\mu} j_{\mu},$$

dove l'integrale a primo membro è esteso a una regione finita dello spazio-tempo e dS_{μ} è l'elemento di superficie (tridimensionale) normale a j_{μ} . Con riferimento alla fig. 1.2, il volume di integrazione è racchiuso tra le superfici A e C sulle quali le componenti spaziali di j_{μ} sono nulle per ipotesi; inoltre la superficie B è stata scelta perpendicolare a $x_4 = ict$ e la superficie D perpendicolare a $x'_4 = ict'$. Dalla condizione $\sum_{\mu} \partial_{\mu} j_{\mu} = 0$ e dal lemma segue allora:

$$0 = \int dS_{\mu} \sum_{\mu} j_{\mu} = \int dS_4 j_4 - \int dS'_4 j'_4.$$

Ma $dS_4 = dx dy dz$ e da ciò segue l'asserto.

Il principio di invarianza della carica elettrica afferma che, indicata con ρ la densità di carica, la quantità $\rho dx dy dz$ è una quantità invariante. Allora, per il teorema appena dimostrato, $\rho dx dy dz$ è anche un invariante per trasformazioni di Lorentz; ciò significa che ρ si deve trasformare come la quarta componente di un tetravettore j_{μ} . Si può allora definire il tetravettore corrente

$$j_{\mu} = (\mathbf{j}, ic\rho), \quad (1.18)$$

che soddisfa l'equazione di continuità,

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} j_{\mu} = 0, \quad (1.19)$$

e interviene come sorgente nelle equazioni di definizione dei potenziali elettromagnetici (I.3.35) e (I.3.36). Queste equazioni possono essere scritte in forma *covariante*,

tale cioè da mettere immediatamente in evidenza la loro natura invariante per trasformazioni di Lorentz. Nel vuoto, posto $A_\mu = (\mathbf{A}, i\phi)$, si ottiene:

$$\square A_\mu = -\frac{4\pi}{c}j_\mu. \quad (1.20)$$

Corrispondentemente, nel vuoto, la condizione di Lorentz (I.3.29) diventa

$$\sum_{\mu} \partial_{\mu} A_{\mu} = 0, \quad (1.21)$$

imponendo l'azzeramento della tetradivergenza del potenziale elettromagnetico. La (1.21) rappresenta la generalizzazione relativistica della condizione (I.3.26) per il gauge di Coulomb.

Anche le equazioni di Maxwell si possono compendiare in equazioni covarianti nel modo seguente:

$$\sum_{\nu} \partial_{\nu} F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j_{\mu}, \quad (1.22)$$

$$\partial_{\lambda} F_{\mu\nu} + \partial_{\mu} F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu} F_{\lambda\mu} = 0, \quad (1.23)$$

dove $F_{\mu\nu}$ è il tensore intensità del campo elettromagnetico:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

La (1.22) raggruppa la prima e la quarta delle equazioni di Maxwell (I.3.16), corrispondenti al teorema di Gauss per il campo elettrico e alla legge di Ampère–Maxwell, mentre la (1.23) contiene le altre due equazioni di Maxwell riguardanti la solenoidalità di \mathbf{B} e la legge di Faraday–Neumann. Inoltre, per costruzione, $F_{\mu\nu}$ risulta un tensore antisimmetrico nei suoi indici. Esso resta invariante per la trasformazione di gauge (I.3.25), che in forma covariante si riscrive:

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\psi. \quad (1.25)$$

Volendo utilizzare lo spazio-tempo anche per le leggi della meccanica, occorre riformularne i concetti fondamentali. Per quanto riguarda la forza, Einstein si attenne alla stessa definizione di Newton, quale variazione temporale della quantità di moto:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (1.26)$$

Però, per definire la quantità di moto occorre tenere presente la distinzione tra tempo proprio di una particella e tempo dell'osservatore rispetto al quale questa particella si

muove. Per l'osservatore fermo la velocità della particella è rapportata all'intervallo di tempo misurato dall'osservatore, mentre per la particella interviene il tempo proprio che per la (1.10) risulta dilatato di un fattore $\sqrt{1 - \beta^2}$. Di conseguenza la velocità v della particella rispetto al sistema fermo viene scalata dello stesso fattore. Indicando allora con m_0 la cosiddetta *massa a riposo* della particella, cioè la massa della particella nel sistema di riferimento in cui essa è in quiete, l'osservatore può continuare a definire la quantità di moto come prodotto di una massa m per la velocità v ,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (1.27)$$

pur di definire opportunamente la massa:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.28)$$

Per piccole velocità, m si riduce alla massa a riposo m_0 , che coincide con quella della meccanica non relativistica.

Il lavoro eseguito dalla forza sulla particella ne aumenta l'energia cinetica. Il calcolo relativistico indica che l'energia totale di una particella di massa a riposo m_0 è somma di un termine costante m_0c^2 , che corrisponde all'*energia a riposo*, e di un termine che rappresenta l'energia cinetica:

$$\begin{aligned} E &= mc^2 \\ &= m_0c^2 + (\gamma - 1)m_0c^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Per piccole velocità si può sviluppare il coefficiente γ ,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2$$

e quindi ottenere

$$E \simeq m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0V^2, \quad (1.30)$$

in accordo con l'espressione non relativistica dell'energia cinetica.

Esercizio 1.2

Verificare che l'energia di una particella libera può essere espressa in funzione del suo impulso e della sua massa a riposo nel modo seguente:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}. \quad (1.31)$$

Utilizzando il risultato dell'Esercizio 1.2 si verifica che la quantità

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2 \quad (1.32)$$

è un invariante per tutti i sistemi di riferimento inerziali. Questo suggerisce l'idea che, similmente alle coordinate spazio-temporali, si possa introdurre un tetravettore energia-impulso, $p_\mu \equiv (\mathbf{p}, iE/c)$, le cui componenti spaziali sono date dalla quantità di moto \mathbf{p} e la cui componente temporale è data da iE/c . È immediato riconoscere che tali componenti si trasformano in modo analogo alle (1.6):

$$\begin{cases} p'_{x'} = \gamma \left(p_x - \frac{\beta E}{c} \right), \\ p'_{y'} = p_y, \\ p'_{z'} = p_z, \\ E' = \gamma (E - V p_x). \end{cases} \quad (1.33)$$

Pertanto in dinamica relativistica non si può più considerare separatamente la conservazione dell'energia e quella della quantità di moto: i due teoremi di conservazione si fondono nell'unico teorema di conservazione del tetravettore energia-impulso.

II.2. La radiazione di corpo nero

Secondo la definizione di Kirchhoff, un corpo che assorbe tutte le radiazioni che vi incidono è un *corpo nero*. In pratica si può realizzare un corpo nero considerando una cavità le cui pareti sono a una certa temperatura T . Gli atomi delle pareti nel loro moto emettono radiazione elettromagnetica che rimane contenuta all'interno della cavità e può essere a sua volta assorbita dagli atomi delle pareti. In condizioni di equilibrio termodinamico, la densità di energia del campo elettromagnetico all'interno della cavità è costante, in quanto nell'unità di tempo l'energia assorbita dalle pareti è uguale all'energia emessa dalle pareti stesse. Se si pratica un piccolo foro nella parete della cavità, è possibile analizzare la radiazione emessa senza alterare significativamente l'equilibrio all'interno. A temperature elevate il foro appare brillante, mentre a basse temperature appare completamente nero: di qui il nome di *radiazione di corpo nero*.

L'esame sperimentale della densità di energia emessa, $U(\nu)$, in funzione della frequenza ν della radiazione a una certa temperatura T della cavità (fig. 2.1), mostra un picco che si sposta verso le alte frequenze con l'aumento della temperatura ²⁷.

²⁷ Studi sistematici furono fatti a Berlino da Otto Richard Lummer (1860–1925) e Ernst Pringsheim (1859–1917): *Die Strahlung eines "schwarzen Körpers" zwischen 100°C und 1300°C [La radiazione di un "corpo nero" tra 100°C e 1300°C]*, Annalen der Physik **63** (1897) 395–410; *Die Verteilung der Energie im Spektrum des schwarzen Körpers [La distribuzione dell'energia nello spettro del corpo nero]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **1** (1899) 23–41.

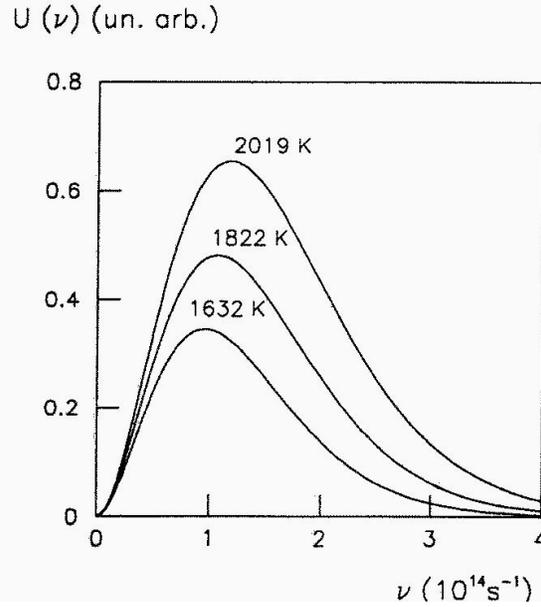


Fig. 2.1. Lo spettro della radiazione di corpo nero.

Questo spostamento segue la legge:

$$\lambda_m T = \text{costante}, \quad (2.1)$$

detta *legge dello spostamento* di Wien ²⁸, dove λ_m è la lunghezza d'onda corrispondente al massimo di $U(\nu)$ ad una data temperatura T .

La potenza totale irradiata risulta proporzionale alla quarta potenza della temperatura ²⁹, secondo quanto già enunciato nel 1879 da Stefan ³⁰. In termini di densità di energia U la *legge di Stefan* si scrive

$$U = \int_0^\infty d\nu U(\nu) = \sigma T^4, \quad (2.2)$$

²⁸ Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien (1864–1928): *Temperatur und Entropie der Strahlung [Temperatura ed entropia della radiazione]*, Annalen der Physik und der Chemie **52** (1894) 132–165. La legge di Wien è in ottimo accordo con i dati sperimentali raccolti da Lummer e Pringsheim (*loc. cit.*), per i quali la costante valeva 2.94×10^{-3} m K. Il valore della costante è oggi noto con grande precisione:

$$\lambda_m T = 2.897\,769\,4(49) \times 10^{-3} \text{ m K.}$$

²⁹ Louis Carl Heinrich Friedrich Paschen (1865–1947): *Über Gesetzmässigkeiten in dem Spektrum fester Körper [Regolarità nello spettro dei corpi solidi]*, Annalen der Physik und der Chemie **60** (1897) 662–723.

³⁰ Josef Stefan (1835–1893): *Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur [Relazione tra radiazione termica e temperatura]*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Wien) **79** (1879) 391–428.

dove sperimentalmente si trova

$$\sigma = 7.565\,91(26) \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-3}\text{K}^{-4}. \quad (2.3)$$

La giustificazione di queste leggi richiede una teoria in grado di fornire la distribuzione in frequenze della densità di energia $U(\nu)$ in funzione della temperatura. Per la determinazione di $U(\nu)$ si può assimilare la radiazione elettromagnetica nel vuoto a un insieme di infiniti oscillatori armonici, ciascuna frequenza dei quali corrisponde a una frequenza della radiazione. L'energia associata, calcolata col teorema di equipartizione dell'energia, risulterebbe però infinita.

Va rilevato che il numero di gradi di libertà è funzione della frequenza³¹. In una corda di lunghezza L , fissa agli estremi, si instaurano onde stazionarie di lunghezza d'onda λ , data dalla relazione

$$n \frac{\lambda}{2} = L \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Siccome è

$$\lambda\nu = c, \quad (2.5)$$

la frequenza delle onde stazionarie risulta

$$\nu = n \frac{c}{2L} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.6)$$

Pertanto il numero $Z(\nu)d\nu$ di oscillatori con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ è

$$Z(\nu)d\nu = \frac{2L}{c} d\nu, \quad (2.7)$$

in quanto $c/2L$ rappresenta la spaziatura tra le frequenze possibili.

Si può applicare lo stesso ragionamento alla determinazione di $Z(\nu)$ per le onde stazionarie in un volume cubico V di spigolo L , per cui le frequenze possibili sono:

$$\nu = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \frac{c}{2L}, \quad (2.8)$$

con l, m, n interi positivi. I numeri l, m, n si possono considerare le coordinate cartesiane in uno spazio tridimensionale del punto che rappresenta la frequenza ν della (2.8), contornato da un volumetto $\Delta = (c/2L)^3$ nel quale non figurano altri punti rappresentativi.

Il numero di oscillatori con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ è ora dato dal rapporto tra il volume elementare $4\pi\nu^2 d\nu$ e il volumetto Δ , riferito al primo ottante (in quanto l, m, n sono positivi):

³¹ Per la deduzione della legge di distribuzione per $U(\nu)$ viene qui utilizzato l'argomento proposto da Petrus Josephus Wilhelmus Debye [Peter Debye] (1884–1966): *Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Theorie der Strahlung [Il concetto di probabilità nella teoria della radiazione]*, *Annalen der Physik* **33** (1910) 1427–1434.

$$\begin{aligned} Z(\nu)d\nu &= \frac{1}{8} \frac{1}{\Delta} 4\pi\nu^2 d\nu \\ &= \frac{4\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ciò conferma la dipendenza di $Z(\nu)$ da ν . Tenendo inoltre presente che nel caso del corpo nero ci sono due stati di polarizzazione (trasversa) della radiazione, per ottenere il numero di gradi di libertà occorre ancora moltiplicare per due. Si ha dunque:

$$Z(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu. \quad (2.10)$$

Applicando ora il teorema di equipartizione dell'energia al volume V , si ottiene la densità di energia nell'intervallo di frequenze comprese tra ν e $\nu + d\nu$:

$$\begin{aligned} U(\nu)d\nu &= kT \frac{1}{V} Z(\nu)d\nu \\ &= \frac{8\pi}{c^3} kT \nu^2 d\nu, \end{aligned} \quad (2.11)$$

che è nota come *formula di Rayleigh-Jeans*³².

L'andamento parabolico in ν della (2.11) bene si accorda col dato sperimentale alle basse frequenze, ma l'integrale di $U(\nu)$ su tutte le frequenze diverge e fornirebbe di nuovo una assurda densità di energia infinita.

D'altra parte, sia la legge dello spostamento di Wien, sia la legge di Stefan possono essere giustificate con semplici considerazioni termodinamiche applicate alla radiazione, senza ricorrere esplicitamente alla conoscenza di $U(\nu)$.

Per dimostrare la legge di Stefan basta ricorrere al primo e al secondo principio della termodinamica, applicati a trasformazioni reversibili subite da un sistema descritto dalle variabili indipendenti di pressione p e di volume V . Utilizzando la relazione (I.2.17), nella forma (I.2.30), e ricordando che è $E = UV$, si ottiene

$$U = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p. \quad (2.12)$$

La pressione di radiazione p all'interno di una cavità in equilibrio è data dalla (I.3.22). Perciò

$$U = \frac{1}{3} T \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V - \frac{1}{3} U. \quad (2.13)$$

³² Essa fu sostanzialmente proposta nel giugno 1900 da Lord Rayleigh. Ma la sua importanza fu riconosciuta da James Hogwood Jeans (1877–1946) che la divulgò corredandola del giusto fattore moltiplicativo 8π .

J.W. Strutt (Baron Rayleigh): *Remarks upon the law of complete radiation [Osservazioni sulla legge di radiazione di corpo nero]*, Philosophical Magazine **49** (1900) 539–540.

J.H. Jeans: *On the partition of energy between matter and ether [Sulla ripartizione di energia tra materia e etere]*, Philosophical Magazine **10** (1905) 91–98.

La (2.13) si integra facilmente confermando la legge di Stefan:

$$U = aT^4. \quad (2.14)$$

La costante di integrazione a resta indeterminata in questo contesto teorico, in quanto non deducibile per via termodinamica. Solo con un'analisi di come U si distribuisce sulle varie frequenze, cioè con la conoscenza esplicita della funzione $U(\nu)$, si può ricavare a e verificare la sua identità con la costante σ della (2.3).

La legge di Wien può essere dedotta³³ con un ragionamento che si basa sul risultato

$$\frac{\nu}{T} = \text{costante}, \quad (2.15)$$

valido per processi adiabatici³⁴. Esso deriva dalla (I.2.28) applicata alla radiazione, la cui pressione è data dalla (I.3.22):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T &= \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \\ &= \frac{1}{3} \frac{dU}{dT}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Infatti, utilizzando la (2.14) si può integrare la (2.16),

$$S = \frac{4}{3} a T^3 V, \quad (2.17)$$

e ottenere quindi per processi adiabatici ($S = \text{costante}$)

$$T^3 V = \text{costante}. \quad (2.18)$$

Ma per la (2.8) è pure

$$\nu^3 V = \text{costante} \quad (2.19)$$

e quindi segue la (2.15).

Per la (2.5), la (2.15) implica la legge dello spostamento (2.1).

In accordo con quanto proposto da Wien, per determinare la funzione $U(\nu)$ occorre riprendere il concetto di invariante adiabatico di un oscillatore (Esempio I.1.1), per il quale è

³³ W. Wien: *Über die Energieverteilung im Emissionsspektrum eines schwarzen Körpers* [Sulla distribuzione di energia nello spettro di emissione di un corpo nero], *Annalen der Physik und der Chemie* **58** (1896) 662–669.

³⁴ Paul Ehrenfest (1880–1933) per primo riconobbe l'importanza del principio adiabatico per spiegare i nuovi fenomeni che si presentavano come inconciliabili con la fisica classica, proponendo la deduzione della legge di Wien come conseguenza della relazione tra i due invarianti adiabatici E/ν e ν/T .

P. Ehrenfest: *A mechanical theorem of Boltzmann and its relation to theory of energy quanta* [Un teorema di meccanica di Boltzmann e la sua relazione con la teoria dei quanti], *Verslag van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam* **16** (1914) 591–597.

$$\frac{E}{\nu} = \text{costante.} \quad (2.20)$$

Infatti la (2.20) e la (2.15) implicano la relazione

$$\frac{E}{\nu} = f\left(\frac{\nu}{T}\right), \quad (2.21)$$

dove $f(x)$ è un'arbitraria funzione dell'argomento x . Questa relazione si sostituisce al risultato del teorema di equipartizione dell'energia per definire l'energia E da attribuire ad ogni grado di libertà. Perciò la densità di energia nell'intervallo di frequenze comprese tra ν e $\nu + d\nu$ diventa:

$$\begin{aligned} U(\nu)d\nu &= \frac{1}{V} \nu f\left(\frac{\nu}{T}\right) Z(\nu)d\nu \\ &= \frac{8\pi}{c^3} f\left(\frac{\nu}{T}\right) \nu^3 d\nu. \end{aligned} \quad (2.22)$$

La (2.21) contiene come risultato particolare anche il teorema di equipartizione dell'energia. È infatti immediato ritrovare la (2.11) se si sceglie:

$$E = \nu f\left(\frac{\nu}{T}\right) = kT. \quad (2.23)$$

Invece Wien propose:

$$E = \nu f\left(\frac{\nu}{T}\right) = k\alpha\nu e^{-\alpha\nu/T}. \quad (2.24)$$

Con un'opportuna scelta della costante α , la *formula di Wien* (2.24), introdotta nella (2.22), riproduce i dati sperimentali per $\nu/T \gtrsim 10^{11} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1}$, ma fallisce a basse frequenze dove invece ha successo la formula di Rayleigh-Jeans (2.11) ³⁵.

È merito di Planck avere intuito la corretta formula della funzione $f(\nu/T)$ ponendo

$$E = \nu f\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (2.25)$$

che per $h\nu/kT \ll 1$ si riduce alla (2.23) e per $h\nu/kT \gg 1$ diventa la (2.24) se si pone $\alpha = h/k$. Una volta inserita la (2.25) nella (2.22), si ottiene così la *formula di Planck*,

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \nu^3 d\nu, \quad (2.26)$$

³⁵ Heinrich Leopold Rubens (1865–1922) e Ferdinand Kurlbaum (1857–1927): *Anwendung der Methode der Reststrahlen zur Prüfung des Strahlungsgesetzes* [Applicazione del metodo dei raggi a riposo alla dimostrazione della legge di radiazione], *Annalen der Physik* **4** (1901) 649–666.

che fornisce la densità di energia della radiazione di corpo nero in funzione della frequenza e della temperatura. La costante

$$h = 6.626\,075\,5(40) \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (2.27)$$

ha le dimensioni di un'azione ed è nota come *costante di Planck*. Essa è stata fissata in modo da riprodurre i dati sperimentali ³⁶.

Nota la distribuzione dell'energia, è ora possibile calcolare la costante σ della legge di Stefan (2.3):

$$\begin{aligned} U &= \int_0^\infty d\nu U(\nu) \\ &= \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3} T^4 \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

da cui

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} \\ &= \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

Esercizio 2.1

Inserendo i valori corretti delle costanti nella (2.29) ritrovare il risultato (2.3).

Esempio 2.1

La funzione (2.25) proposta da Planck può essere dedotta dal teorema di equipartizione dell'energia, imponendo alla hamiltoniana dell'oscillatore armonico microscopico,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad (2.30)$$

che interviene nel calcolo di E la possibilità di assumere solo valori discreti ³⁷:

$$H(q, p) = n \epsilon, \quad (2.31)$$

dove ϵ è una quantità prefissata di energia e $n = 0, 1, 2, \dots$. In tal modo le variabili canoniche q e p non sono più indipendenti e nel calcolo dell'energia come valore medio di $H(q, p)$ secondo la (I.2.54),

³⁶ Sulla base dei risultati di Rubens e Kurlbaum, Planck presentò la sua formula e fissò il valore della costante h in 6.55×10^{-27} erg s.

³⁷ Questo esempio è fondato su un argomento utilizzato da Einstein nel lavoro in cui propone una analoga interpretazione per l'energia di un solido cristallino per calcolarne il calore specifico (Esempio 2.3).

$$E = \frac{\int dq \int dp (p^2/2m + m\omega^2 q^2/2) e^{-\beta(p^2/2m + m\omega^2 q^2/2)}}{\int dq \int dp e^{-\beta(p^2/2m + m\omega^2 q^2/2)}} \quad (2.32)$$

$$\equiv \frac{I_1}{I_2}$$

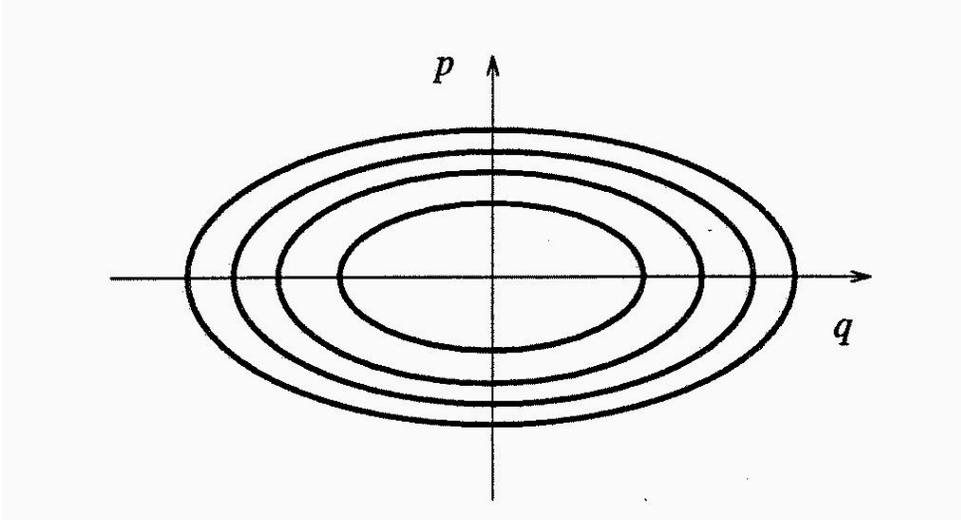


Fig. 2.2. Le traiettorie nello spazio delle fasi per gli oscillatori di Planck.

Il calcolo si semplifica eseguendo un cambiamento di variabili che trasformi l'ellisse in una circonferenza (cfr. Esercizio I.1.17):

$$q = \sqrt{\frac{2A}{m\omega}} \cos \alpha, \quad p = -\sqrt{2m\omega A} \sin \alpha. \quad (2.33)$$

Le nuove variabili sono ora A (che ha le dimensioni di un'azione) e α (che fornisce l'arco di circonferenza descritto dal punto che rappresenta il moto dell'oscillatore; cfr. fig. 2.3). La hamiltoniana (2.30) diventa ora indipendente da α ,

$$H = \omega A, \quad (2.34)$$

e il punto che rappresenta il moto dell'oscillatore si muove lungo la circonferenza della fig. 2.3b) con moto circolare uniforme: $\alpha = \omega t + \alpha_0$.

Con la trasformazione (2.33) si ottiene, per esempio,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int dq \int dp e^{-\beta(p^2/2m + m\omega^2 q^2/2)} \\ &= - \int dA d\alpha e^{-\beta\omega A} \\ &= -2\pi \int dA e^{-\beta\omega A}. \end{aligned}$$

Però la (2.31) impone nella (2.34)

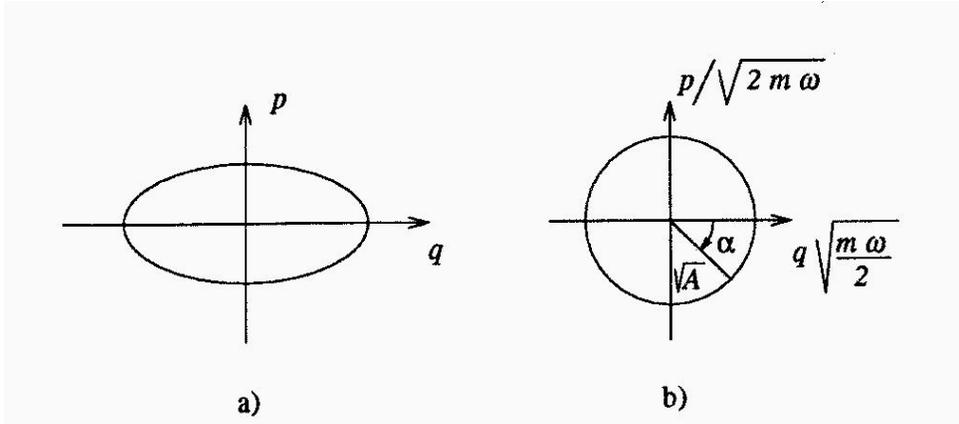


Fig. 2.3. Rappresentazione del moto di un oscillatore armonico lineare.

$$A = n \frac{h}{2\pi} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.35)$$

e converte l'integrale in una serie,

$$I_2 = -2\pi \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \epsilon},$$

che è una serie geometrica. La somma della serie fornisce il risultato seguente:

$$I_2 = -2\pi \frac{e^{\beta \epsilon}}{e^{\beta \epsilon} - 1}.$$

Similmente si ottiene

$$I_1 = -2\pi \int dA \omega A e^{-\beta \omega A},$$

cioè

$$\begin{aligned} I_1 &= -2\pi \sum_{n=0}^{\infty} n \epsilon e^{-\beta n \epsilon} \\ &= 2\pi \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n \epsilon} \\ &= -2\pi \frac{\epsilon e^{\beta \epsilon}}{(e^{\beta \epsilon} - 1)^2}. \end{aligned}$$

In conclusione, la (2.32) diventa

$$E = \frac{\epsilon}{e^{\beta \epsilon} - 1}, \quad (2.36)$$

che si identifica con la formula di Planck (2.25) se si pone

$$\epsilon = h\nu. \quad (2.37)$$

Invece la teoria classica, in cui l'energia dell'oscillatore armonico varia in modo continuo, dà origine alla formula di Rayleigh-Jeans. Tale formula si ritrova qui come caso limite, quando l'energia $h\nu$ sia molto piccola rispetto alle energie caratteristiche in gioco, tipicamente dell'ordine di kT : allora non si riesce ad apprezzare la discretizzazione dei valori d'energia assunti dalla (2.31) e le ellissi nella fig. 2.2 risultano molto addensate, sì da ricoprire il piano (p, q) in modo praticamente continuo. Così si recupera il limite classico, che in queste condizioni corrisponde a far tendere h a zero³⁸.

Il risultato (2.37) dell'Esempio 2.1 permette di riscrivere la distribuzione di energia (2.26) per lo spettro di corpo nero in una forma di immediata interpretazione. Si ottiene infatti

$$VU(\nu)d\nu = n(\nu)h\nu Z(\nu)d(\nu), \quad (2.38)$$

dove

$$n(\nu) = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2.39)$$

è il numero di *quanti* di energia $h\nu$ che alla temperatura T vanno attribuiti ad ognuno degli $Z(\nu)d\nu$ gradi di libertà, che concorrono alla formazione dello spettro relativo alle frequenze comprese tra ν e $\nu + d\nu$.

Esempio 2.2

Le fluttuazioni dell'energia associata alle frequenze della radiazione di corpo nero, comprese tra ν e $\nu + d\nu$, possono essere calcolate mediante la (I.2.78). A seconda dell'espressione che si sceglie per l'energia E da attribuire ai vari gradi di libertà si ottengono risultati diversi per le corrispondenti fluttuazioni.

Adottando l'espressione di Planck (2.25), che per la (2.39) diventa

$$E = n(\nu)h\nu, \quad (2.40)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta E^2 &= -\frac{\partial E}{\partial \beta} \\ &= (h\nu)^2 n^2(\nu) e^{h\nu/kT}, \end{aligned}$$

cioè

$$\Delta E^2 = (h\nu)^2 n(\nu) [1 + n(\nu)]. \quad (2.41)$$

Le fluttuazioni sono dunque dovute a due contributi, uno lineare in $n(\nu)$ e uno quadratico. Nel limite di alte temperature ($h\nu \ll kT$), per cui $n(\nu) \rightarrow kT/h\nu \gg 1$, domina il termine quadratico e si ottiene:

³⁸ M. Planck: *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung [Lezioni sulla teoria della radiazione termica]*, J.A. Barth, Lipsia, 1906.

$$\Delta E^2 = (kT)^2. \quad (2.42)$$

Alle basse temperature ($h\nu \gg kT$), per cui $n(\nu) \rightarrow \exp(-h\nu/kT) \ll 1$, prevale il termine lineare e si trova:

$$\Delta E^2 = (h\nu)^2 e^{-h\nu/kT}. \quad (2.43)$$

A questi stessi due risultati si giunge anche utilizzando nella (I.2.78), al posto della (2.25), le espressioni (2.23) e (2.24) corrispondenti alle formule di Rayleigh-Jeans e di Wien, rispettivamente.

La (2.42) è in accordo col teorema di equipartizione dell'energia applicato a un'assemblea di oscillatori, cui è stato assimilato il comportamento ondulatorio della radiazione. Infatti, siccome l'energia di un'onda è proporzionale al quadrato della sua ampiezza, una fluttuazione che raddoppi l'ampiezza moltiplica per quattro l'energia associata: perciò ΔE^2 deve essere proporzionale a E^2 , che in questo caso è appunto pari a $(kT)^2$.

La (2.43) invece corrisponde alla fluttuazione di densità per un insieme di particelle indipendenti. Infatti, la descrizione statistica di n particelle, che si muovono indipendentemente una dall'altra nel volume V all'interno di un più grande volume, è regolata dalla *distribuzione di Poisson*, che fornisce la probabilità $p(n)$ di trovare n particelle entro V :

$$p(n) = e^{-\rho V} \frac{(\rho V)^n}{n!}, \quad (2.44)$$

dove ρ è il numero di particelle per unità di volume. Allora il valore medio $\langle n \rangle$ del numero n di particelle che si trovano nel volume V preso in esame è:

$$\langle n \rangle = e^{-\rho V} \sum_n n \frac{(\rho V)^n}{n!} = \rho V, \quad (2.45)$$

e il numero quadratico medio $\langle n^2 \rangle$ è ($n^2 = n(n-1) + n$):

$$\langle n^2 \rangle = e^{-\rho V} \sum_n n^2 \frac{(\rho V)^n}{n!} = \langle n \rangle^2 + \langle n \rangle. \quad (2.46)$$

Di conseguenza, la fluttuazione fornita dallo scarto quadratico medio è:

$$\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle. \quad (2.47)$$

Pertanto la (2.43), che indica una fluttuazione percentuale di energia $\Delta E^2 / (h\nu)^2 = \Delta n^2$ proporzionale al numero $n(\nu)$ di fotoni, è analoga alla (2.47) e sottolinea un comportamento corpuscolare della radiazione di corpo nero alle basse temperature.

Le fluttuazioni di energia secondo la formula di Planck sono dunque il risultato della somma di due contributi, uno di tipo corpuscolare alla Wien e uno di tipo ondulatorio alla Rayleigh-Jeans. Il primo domina a bassa temperatura, l'altro alle alte temperature³⁹.

³⁹ Questo importante risultato, che prelude alla duplice natura corpuscolare e ondulatoria della radiazione (e della materia), è stato ottenuto da A. Einstein: *Über die Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung [Sviluppo dei nostri punti di vista sulla natura e la costituzione della radiazione]*, *Physikalische Zeitschrift* **10** (1909) 817–826.

Esempio 2.3

La regola di Dulong e Petit per i calori specifici dei solidi cristallini monoatomici, che viene giustificata alla luce del teorema di equipartizione dell'energia (Esempio I.2.2), viene disattesa in molti casi: le misure fatte a temperature ambientali già nel XIX secolo indicavano violazioni della regola da parte di elementi come il berillio, il boro, il carbonio (diamante) e il silicio. Ma il dato più preoccupante per la teoria è che il calore specifico dipende dalla temperatura T : in particolare, esso tende a zero in prossimità dello zero assoluto con un comportamento proporzionale a T^3 (fig. 2.4).

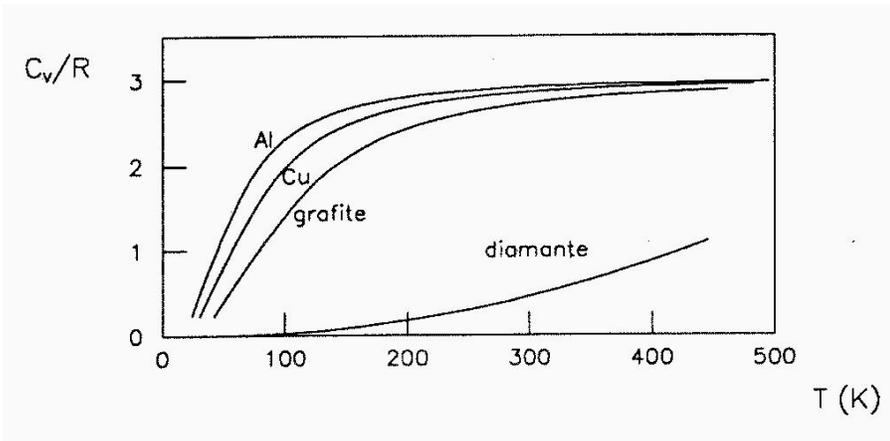


Fig. 2.4. I calori specifici dipendono dalla temperatura.

Un importante suggerimento per l'interpretazione microscopica dei calori specifici fu portato nel 1907 da Einstein⁴⁰ assimilando la dinamica interna di un solido cristallino a un insieme di oscillatori armonici: l'ipotesi è fondata sul fatto che in prima approssimazione gli atomi del solido eseguono un moto di oscillazione intorno alle loro posizioni di equilibrio. Perciò, come per la radiazione di corpo nero, l'energia totale risulta la somma dei contributi corrispondenti alle varie frequenze associate all'insieme di oscillatori.

Nel modello di Einstein tutti gli atomi vibrano con la stessa frequenza. In realtà, secondo quanto rilevato nel 1912 da Debye⁴¹, nei solidi vi sono sia onde di tipo longitudinale che si propagano con velocità c_l , sia onde trasversali che si propagano con velocità c_t e con due possibili stati di polarizzazione. Allora per trovare il numero di oscillatori con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$, si possono ripetere i ragionamenti che hanno portato alla (2.9), tenendo presente che questa però è valida per un solo tipo di onde. Si ottiene così

$$Z(\nu)d\nu = 4\pi V \left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3} \right) \nu^2 d\nu. \quad (2.48)$$

⁴⁰ A. Einstein: *Die Planksche Theorie der Strahlung, und die Theorie der spezifischen Wärme [La teoria della radiazione di Planck e la teoria dei calori specifici]*, *Annalen der Physik* **22** (1907) 180–190.

⁴¹ P. Debye: *Zur Theorie der spezifischen Wärme [Teoria dei calori specifici]*, *Annalen der Physik* **39** (1912) 789–839.

Inoltre in un solido con N particelle ci sono $3N$ gradi libertà: quindi il numero totale di oscillatori non è infinito come per la radiazione, ma è limitato a $3N$. Ciò impone che ci sia una frequenza massima ν_D , detta *frequenza di Debye*, definita dalla condizione che il numero totale di gradi di libertà sia $3N$:

$$\int_0^{\nu_D} d\nu Z(\nu) = 3N. \quad (2.49)$$

Inserendo la (2.48), si trova

$$\nu_D^3 = \frac{9N}{4\pi V} \left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3} \right)^{-1}. \quad (2.50)$$

Se si applicano le stesse considerazioni fatte da Planck per la densità di energia della radiazione di corpo nero e si utilizza la (2.25), occorre adesso limitare l'integrale della (2.28) al valore massimo ν_D della frequenza. L'energia di una mole di solido cristallino monoatomico risulta allora:

$$\begin{aligned} V U &= \int_0^{\nu_D} \nu f \left(\frac{\nu}{T} \right) Z(\nu) d\nu \\ &= 3RT D(x_D), \end{aligned} \quad (2.51)$$

dove $R = Nk$ e la funzione

$$D(x_D) = \frac{3}{x_D^3} \int_0^{x_D} dx \frac{x^3}{e^x - 1} \quad (2.52)$$

è la funzione di Debye con

$$x_D = \frac{h\nu_D}{kT}. \quad (2.53)$$

In generale si preferisce definire la *temperatura di Debye*,

$$\Theta = \frac{h\nu_D}{k}, \quad (2.54)$$

che è una caratteristica del solido, e utilizzare il parametro adimensionale Θ/T . Così la funzione $D(\Theta/T)$ diventa indipendente dalla particolare sostanza.

Nota l'energia, si ottiene il calore molare,

$$C_V = V \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R \left\{ 4D \left(\frac{\Theta}{T} \right) - \frac{3\Theta/T}{e^{\Theta/T} - 1} \right\}, \quad (2.55)$$

che ha un andamento generale in funzione di Θ/T uguale per tutte le sostanze.

Dalla (2.52), per $x_D \rightarrow 0$ (cioè per $T \gg \Theta$), segue $D(x_D) \rightarrow 1$; si ritrova in tali condizioni la regola di Dulong e Petit, che quindi appare rispettata da tutte le sostanze che hanno una temperatura di Debye molto inferiore alla temperatura ambientale. Ora però per $x_D \rightarrow \infty$ (cioè per $T \ll \Theta$) l'andamento in funzione di T del calore molare riproduce molto bene i risultati sperimentali anche per quelle sostanze, con Θ molto grande, che

violano la regola di Dulong e Petit. In particolare viene riprodotto il comportamento proporzionale a T^3 alle basse temperature ⁴² (fig. 2.5).

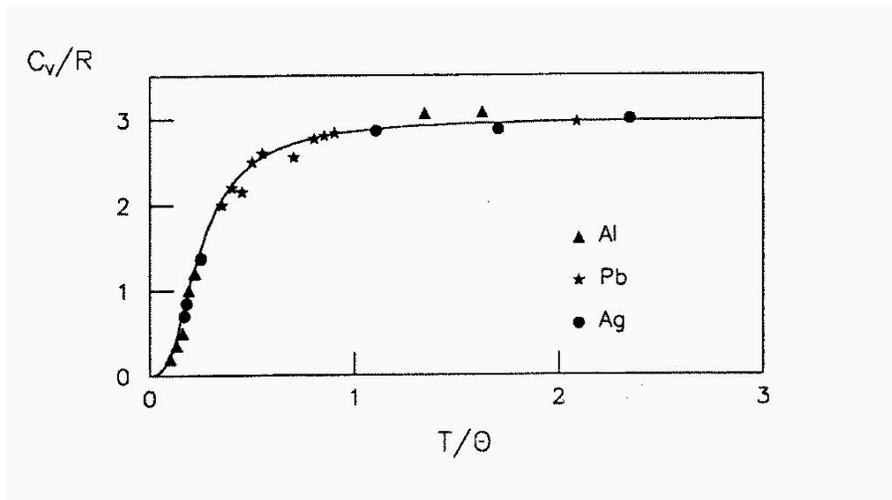


Fig. 2.5. I calori specifici secondo la teoria di Debye.

L'ipotesi di quanti elementari di energia si riflette anche sugli argomenti della meccanica statistica. Secondo il teorema di Liouville il volume elementare dello spazio delle fasi $dqdp$ rimane invariante durante l'evoluzione di q e p secondo le equazioni di Hamilton. Ma ciò presuppone la possibilità per q e p di variare in modo continuo, indipendentemente uno dall'altro. Se invece vale l'ipotesi di una hamiltoniana che può assumere solo valori discreti $n h\nu$, anche l'azione risulta quantizzata, con valori che sono multipli del quanto d'azione h . Perciò il volume elementare dello spazio delle fasi ha estensione finita e pari a $\int dq \int dp = h$. Questa è l'origine della comparsa di h nella costante C^N che entra nella definizione (I.2.51) della funzione di partizione e nella formula di Sackur–Tetrode (I.2.61).

⁴² Una teoria più completa che tiene conto della dinamica reticolare è stata formulata da Max Born e Theodor von Kármán (1881–1963): *Über Schwingungen in Raumgittern* [Vibrazioni in reticoli tridimensionali], *Physikalische Zeitschrift* **13** (1912) 298–309; *Zur Theorie der spezifischen Wärme* [Teoria dei calori specifici], *Physikalische Zeitschrift* **14** (1913) 15–19.

II.3. Aspetti corpuscolari della radiazione

Nel 1902 Lenard⁴³ portò a termine un'accurata analisi dell'effetto fotoelettrico con le seguenti conclusioni sperimentali:

- 1) l'energia degli elettroni, emessi per effetto fotoelettrico dalla sostanza colpita dalla radiazione, è indipendente dall'intensità della radiazione incidente;
- 2) il numero di elettroni emessi aumenta con l'intensità della radiazione;
- 3) l'energia del singolo elettrone aumenta col diminuire della lunghezza d'onda della radiazione.

Questi risultati non si spiegano se gli elettroni ricevono l'energia da una radiazione descritta in termini di intensità di un'onda, e quindi secondo le leggi dell'elettromagnetismo classico. Nel 1905 Einstein propose una spiegazione⁴⁴ ispirandosi alla discretizzazione dell'energia della radiazione, così come ipotizzata da Planck. Se l'energia dell'onda di frequenza ν è un multiplo di $h\nu$, nel processo elementare di assorbimento della radiazione da parte della materia non è l'intensità (legata al fattore di multiplo), ma il singolo quanto di energia $h\nu$ che conta. Parlando di *fotoni*⁴⁵ di energia $h\nu$, l'intensità è legata al numero di fotoni, e quindi determina il numero di elettroni che i vari fotoni possono liberare con un'interazione elementare fotone-elettrone. Invece l'energia cinetica E del singolo elettrone emesso risulta dalla differenza tra $h\nu$ e l'energia W necessaria per estrarre l'elettrone stesso dal materiale:

$$E = h\nu - W. \quad (3.1)$$

Fissato il potenziale di estrazione W , E aumenta linearmente con ν ⁴⁶.

Una conferma notevole di questo comportamento corpuscolare della radiazione si ebbe con la serie di esperimenti condotti da Compton negli anni 1921–1923,

⁴³ Philipp Eduard Anton von Lenard (1862–1947): *Erzeugung von Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht [Produzione di raggi catodici mediante luce ultravioletta]*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Wien) **108** (1899) 1649–1666; *Über die Lichtelektrische Wirkung [L'effetto fotoelettrico]*, Annalen der Physik **8** (1902) 149–198.

⁴⁴ Cfr. n. 16 p. 65.

⁴⁵ Fu Gilbert Newton Lewis il primo a usare il termine di *fotone* per indicare il quanto di luce, nome per lui non completamente appropriato “se si assume che passa solo una minuscola frazione della sua esistenza come portatore di energia raggianti, mentre per il resto del tempo rimane un importante elemento strutturale all'interno dell'atomo. Perciò - prosegue Lewis - per questo nuovo atomo ipotetico, che non è luce ma gioca un ruolo essenziale in ogni processo di radiazione ho preso la libertà di proporre il nome di fotone”. G.N. Lewis: *The conservation of photons [Conservazione dei fotoni]*, Nature **118** (1926) 874–875.

⁴⁶ La (3.1) fu confermata sperimentalmente da Millikan in una serie di esperimenti tra il 1914 e il 1916. Dalla pendenza della retta che rappresenta in un grafico l'energia cinetica E in funzione della frequenza ν della radiazione incidente, Millikan ottenne la prima accurata determinazione della costante di Planck h , indipendentemente da ogni considerazione riguardante la forma dello spettro della radiazione di corpo nero.

R.A. Millikan: *A direct determination of h [Determinazione diretta di h]*, Physical Review **4** (1914) 73–75; *A direct photoelectric determination of Planck's h [Una determinazione fotoelettrica diretta della costante di Planck h]*, Physical Review **7** (1916) 355–388.

riguardanti la variazione di lunghezza d'onda dei raggi X , diffusi per esempio dalle molecole di un gas ⁴⁷ (fig 3.1).

L'analisi della radiazione diffusa fornisce la relazione:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_0(1 - \cos \theta), \quad (3.2)$$

tra la lunghezza d'onda λ' della radiazione diffusa e quella λ della radiazione incidente, con la costante λ_0 che assume il valore:

$$\lambda_0 = 0.024 \text{ \AA}. \quad (3.3)$$

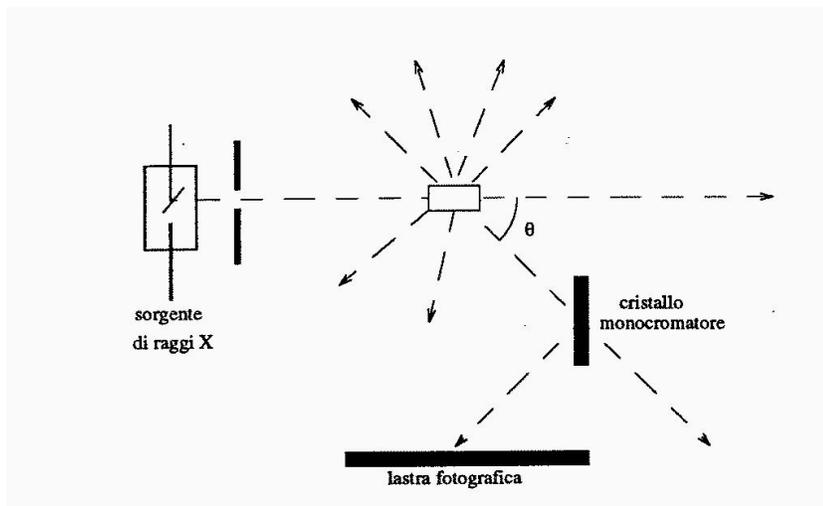


Fig. 3.1. Diffusione di raggi X .

La teoria classica della diffusione della radiazione, così come sviluppata da Thomson ⁴⁸, prevedeva un'intensità diffusa dipendente dall'angolo, ma non era in grado di spiegare questa variazione di lunghezza d'onda, che è ora nota come *effetto Compton*.

Ripetendo l'esperimento mediante una camera di Wilson ⁴⁹, è possibile constatare che il processo elementare è riconducibile all'urto di un fotone della radia-

⁴⁷ Cfr. n. 17 p. 65.

⁴⁸ J.J. Thomson: *Conduction of electricity through gases [Conduzione di elettricità nei gas]*, Cambridge University Press, 1906.

⁴⁹ Si deve allo scozzese Charles Thomson Rees Wilson (1869–1959) l'invenzione di una speciale camera in grado di visualizzare la traccia lasciata da particelle cariche nell'attraversare un gas soprassaturo, grazie ai nuclei di condensazione provocati dalla ionizzazione degli atomi del gas. Questo dispositivo è stato successivamente migliorato con le più moderne camere a bolle e ha costituito prezioso strumento d'indagine sulle particelle elementari.

C.T.R. Wilson: *On an expansion apparatus for making visible the tracks of ionising particles in gases and some results obtained by its use [Un dispositivo a espansione per visualizzare le tracce di particelle ionizzanti nei gas e alcuni risultati ottenuti con il suo uso]*, Proceedings of the Royal Society of London **A87** (1912) 277–292.

zione incidente con un elettrone di un atomo del gas presente nella camera. La fotografia della camera visualizza la traiettoria percorsa dagli elettroni emessi dalla radiazione, mettendo così in evidenza il meccanismo elementare del processo (fig. 3.2)⁵⁰. Nell'emettere un elettrone ad un angolo θ' rispetto alla direzione della radiazione incidente, il raggio X viene diffuso ad un angolo θ . Successivamente il raggio diffuso può emettere un altro elettrone, che quindi con la sua traccia iniziale rivela la direzione di diffusione del raggio X .

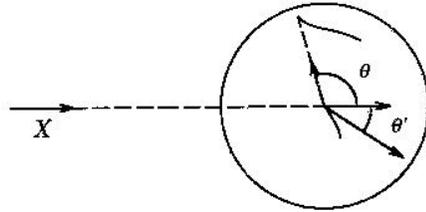


Fig. 3.2. Diffusione di raggi X in camera di Wilson.

Compton spiegò la (3.2) attribuendo al fotone, oltre all'energia $h\nu$, anche una quantità di moto di modulo $h\nu/c$. Conservazione dell'energia e della quantità di moto nell'urto fotone-elettrone impongono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} h\nu = h\nu' + (\gamma - 1)m_0c^2, \\ \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + \gamma m_0 c \beta \cos \theta', \\ 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta + \gamma m_0 c \beta \sin \theta'. \end{cases} \quad (3.4)$$

Nelle (3.4) si sono usate le espressioni relativistiche dell'energia e della quantità di moto dell'elettrone di massa a riposo m_0 . Risolvendo le (3.4) si ottiene

$$\nu - \nu' = \frac{h}{m_0c^2} \nu \nu' (1 - \cos \theta). \quad (3.5)$$

Questa relazione coincide con la (3.2) se si definisce

$$\lambda_0 = \frac{h}{m_0c}, \quad (3.6)$$

che viene detta *lunghezza d'onda Compton* dell'elettrone⁵¹: essa possiede il valore numerico (3.3) quando si sostituiscano i corrispondenti valori di h , m_0 e c .

⁵⁰ A.H. Compton e A.W. Simon: *Directed quanta of scattered X-rays [Quanti direzionati di raggi X diffusi]*, Physical Review **26** (1925) 289-299.

⁵¹ Oggi si preferisce definire la lunghezza d'onda Compton per l'elettrone come $\bar{\lambda} = \lambda_0/2\pi$ (cfr. Tab. D.1).

L'esperimento di Compton e Simon è importante storicamente per due ragioni. In primo luogo, attraverso la fotografia dell'evento in camera di Wilson è stato possibile dimostrare l'aspetto corpuscolare della radiazione e confermare l'ipotesi di fotone formulata da Einstein. Ma è anche importante il fatto che, descrivendo l'urto fotone-elettrone in termini corpuscolari, si salva il principio di conservazione dell'energia e della quantità di moto anche a livello di processi elementari. A quell'epoca infatti c'era chi sosteneva che il principio probabilmente valeva solo in media su scala macroscopica⁵². Questo avveniva perché era difficile conciliare gli aspetti continui dell'elettromagnetismo classico con quelli discontinui dei processi di assorbimento e di emissione degli atomi che implicavano il concetto di fotone: o si ridefinisce il significato di scambio energetico tramite l'accettazione dell'ipotesi di fotone, oppure si pensa alla conservazione dell'energia in modo statistico. L'evidenza sperimentale dell'effetto Compton ha fatto preferire l'idea del quanto di luce, o di fotone⁵³. Nell'assimilazione della componente di frequenza ν della radiazione di corpo nero a un oscillatore armonico, il risultato (2.38) indica che il contributo energetico allo spettro da parte della frequenza ν avviene *come se* nella radiazione ci fossero $n(\nu)$ fotoni di energia $h\nu$. La spiegazione dell'effetto Compton è resa possibile assegnando al fotone anche un impulso di modulo $p = h\nu/c$ e quindi promuovendolo ad essere considerato a tutti gli effetti come una particella.

⁵² Nel tentativo di costruire una teoria quantistica della dispersione di luce si era tentati di postulare che il fenomeno macroscopico avvenisse come media di molti processi elementari casuali nei quali il principio di conservazione dell'energia potesse essere violato: in tale ipotesi l'energia si conservava solo su scala macroscopica come risultato della media sui processi elementari. In particolare, Niels Hendrik David Bohr (1885–1962), Hendrik Antoon Kramers (1894–1952) e John Clarke Slater (1900–1976) ebbero l'idea di associare all'atomo una *nuvola* di oscillatori armonici virtuali, dotati ciascuno di una delle frequenze che l'atomo può assorbire o emettere. Potevano così descrivere la dispersione della luce ricorrendo solo a minime correzioni della teoria classica della dispersione: una tuttavia era essenziale e imponeva che l'energia si conservasse solo in media, come risultato di un processo statistico.

Charles Galton Darwin (1887–1962): *Critique of the foundations of physics [Critica dei fondamenti della fisica]*, Library of the American Physical Society, manoscritto del 1919; *A quantum theory of optical dispersion [Teoria quantistica della dispersione ottica]*, Nature **110** (1922) 841–842.

J.C. Slater: *Radiation and atoms [Radiazione e atomi]*, Nature **113** (1924) 307–308.

N. Bohr, H.A. Kramers e J.C. Slater: *Über die Quantentheorie der Strahlung [Teoria quantistica della radiazione]*, Zeitschrift für Physik **24** (1924) 69–87.

⁵³ Nonostante la conferma sperimentale portata da Millikan, molti, compreso lo stesso Millikan, erano riluttanti ad accettare l'ipotesi di fotone formulata da Einstein per la spiegazione dell'effetto fotoelettrico. Fu solo dopo la scoperta dell'effetto Compton che l'idea di fotone si impose; a tal punto, che il premio Nobel per la Fisica del 1921 fu attribuito a Einstein nel 1922 proprio per la sua spiegazione dell'effetto fotoelettrico e non già, come si sarebbe anche potuto proporre, per la sua teoria della relatività.

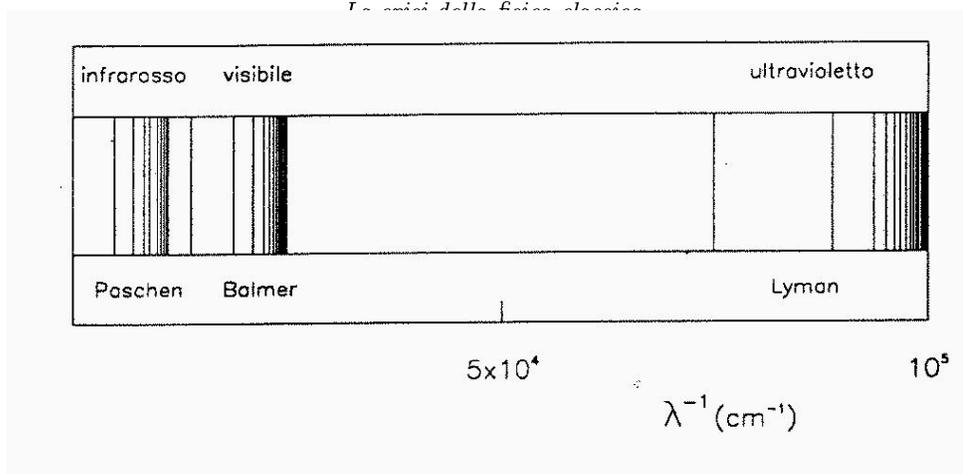


Fig. 4.1. Porzione dello spettro a righe dell'atomo di idrogeno.

Negli spettri di emissione e di assorbimento degli atomi si presentano righe disposte con regolarità a valori ben precisi di lunghezza d'onda. Nel caso dell'atomo di idrogeno, per esempio, il cui spettro è schematicamente riprodotto in fig. 4.1, si hanno raggruppamenti di righe in serie che possono essere caratterizzate mediante la relazione

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (4.1)$$

che è nota come *principio di combinazione delle linee spettrali*⁵⁴. Nella (4.1) il numero d'onda⁵⁵, $k = 2\pi/\lambda$, è espresso in termini dei numeri interi positivi m e n e della costante di Rydberg⁵⁶:

$$R_{\infty} = 10\,973\,731.571(4) \text{ m}^{-1}. \quad (4.2)$$

La relazione (4.1) è detta anche *formula di Balmer*, dal nome del matematico svizzero⁵⁷ che la propose nel 1885 per classificare le righe nella parte visibile

⁵⁴ Walter Ritz (1878–1909): *Über ein neues Gesetz der Serienspektren [Una nuova legge degli spettri a righe]*, *Physikalische Zeitschrift* **9** (1908) 521–529; *On a law of series spectra [Una legge degli spettri a righe]*, *Astrophysical Journal* **28** (1908) 237–243.

⁵⁵ La descrizione degli spettri atomici mediante il numero d'onda fu introdotta da George Johnstone Stoney nel 1871, migliorando la classificazione introdotta da Anders Jonas Ångström (1814–1872).

G.J. Stoney: *On the advantage of referring the position of lines in the spectrum to a scale of wave-numbers [Vantaggio di riferire la posizione delle righe spettrali a una scala di numeri d'onda]*, *British Association Reports*, Edinburgh, **41** (1871) 42–43.

A.J. Ångström: *Recherches sur le spectre solaire [Ricerche sullo spettro solare]*, Uppsala, 1868.

⁵⁶ Johannes Robert Rydberg (1854–1919): *Recherches sur la constitution des spectres d'émission des éléments chimiques [Ricerche sulla struttura degli spettri di emissione degli elementi chimici]*, *Kungliga Vetenskaps Akademiens Handlingar* **23** (1890) n. 11; *On the structure of the line-spectra in the chemical elements [Struttura degli spettri a righe degli elementi chimici]*, *Philosophical Magazine* **29** (1890) 331–337.

⁵⁷ Johann Jakob Balmer (1858–1898): *Notiz über die Spektrallinien des Wasserstoffs [Nota sulle righe spettrali dell'idrogeno]*, *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel* **7** (1885) 548–560.

Spettri atomici

dello spettro dell'atomo d'idrogeno. Una descrizione accurata dello spettro discreto può essere fatta attribuendo opportuni valori alla coppia di numeri interi m e n ⁵⁸:

$$\begin{aligned}
 m = 1, \quad n = 2, 3, 4, \dots & \quad \text{serie di Lyman,} \\
 m = 2, \quad n = 3, 4, 5, \dots & \quad \text{serie di Balmer,} \\
 m = 3, \quad n = 4, 5, 6, \dots & \quad \text{serie di Paschen,} \\
 m = 4, \quad n = 5, 6, 7, \dots & \quad \text{serie di Brackett,} \\
 m = 5, \quad n = 6, 7, 8, \dots & \quad \text{serie di Pfund.}
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

La presenza di uno spettro a righe non si concilia con il modello di atomo proposto da Rutherford⁵⁹, perché secondo l'elettromagnetismo classico gli elettroni che ruotano intorno al nucleo atomico dovrebbero irraggiare in modo continuo su una banda di frequenze perdendo progressivamente energia. A causa di ciò si arriverebbe alla problematica conclusione che l'elettrone, continuando a perdere energia, finisce per essere catturato dal nucleo atomico con conseguente collasso dell'atomo. Per evitare ciò, Bohr⁶⁰ ipotizzò nell'atomo l'esistenza di *stati stazionari* di energia costante occupati dagli elettroni. Fintanto che un elettrone si trova in uno di questi stati, non ci sarebbe irraggiamento. La radiazione è provocata dalla transizione di un elettrone da uno stato stazionario ad un altro di energia inferiore, così come la transizione a uno stato di energia maggiore avverrebbe con assorbimento di radiazione. Imponendo che il salto energetico sia provocato dall'emissione o dall'assorbimento di un singolo fotone di energia $h\nu$, si avrebbe

$$\Delta E = E_n - E_m = h\nu \tag{4.4}$$

e quindi

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{\Delta E}{hc},$$

cioè

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc}(E_n - E_m). \tag{4.5}$$

Ipotizzando i salti quantici e confrontando la (4.1) con la (4.5), Bohr poteva dare espressione esplicita alla costante di Rydberg,

⁵⁸ Theodor Lyman (1874–1954): *An extension of the spectrum in the extreme violet [Estensione dello spettro nell'estremo ultravioletto]*, Physical Review **3** (1914) 504–504.

F. Paschen: *Zur Kenntnis ultra-roter Linienspektren [Nota sulle righe spettrali infrarosse]*, Annalen der Physik **27** (1908) 537–570.

F. Brackett: *A new series of spectrum lines [Una nuova serie di righe spettrali]*, Nature **109** (1922) 209.

A.H. Pfund: *The emission of nitrogen and hydrogen in the infrared [Emissione nell'infrarosso da parte di azoto e idrogeno]*, Journal of the Optical Society of America **9** (1924) 193–196.

⁵⁹ Cfr. n. 15 p. 64.

⁶⁰ Cfr. n. 22 p. 67.

$$R_{\infty} = -\frac{n^2 E_n}{hc}, \quad (4.6)$$

assegnando contemporaneamente un preciso valore all'energia degli stati stazionari dell'idrogeno:

$$E_n = -\frac{hcR_{\infty}}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.7)$$

L'evidenza sperimentale di stati stazionari con valori discreti di energia fu dimostrata in una serie di esperimenti iniziata nel 1913 da Franck e Hertz ⁶¹.

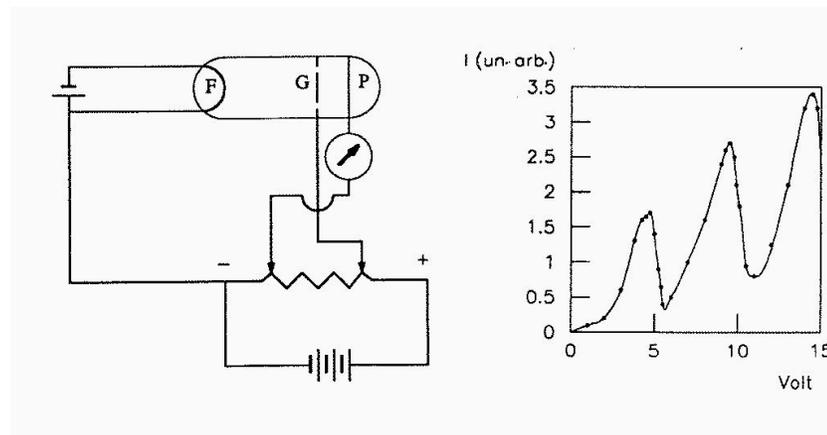


Fig. 4.2. Esperimento di Franck–Hertz.

Negli esperimenti di Franck e Hertz, un'ampolla è riempita per esempio da vapori di mercurio: un catodo, costituito da un filamento caldo F , emette elettroni che vengono accelerati verso l'anodo P (fig. 4.2). Il circuito esterno viene così attraversato da una corrente I che risulterà tanto più intensa quanto maggiore è il numero di elettroni che raggiungono l'anodo. Una griglia, interposta tra anodo e catodo, si trova ad un potenziale V rispetto a F , leggermente superiore alla differenza di potenziale tra P e F : al variare di V , la griglia può quindi catturare gli elettroni se questi non hanno energia sufficiente per superare il debole campo antagonista tra G e P . Ciò può per esempio verificarsi quando gli elettroni nel loro cammino tra anodo e catodo urtano anelasticamente gli atomi del vapore di mercurio. Sperimentalmente,

⁶¹ James Franck (1882–1964) e Gustav Ludwig Hertz (1887–1975): *Über Zusammenstöße zwischen langsamen Elektronen und Gasmolekülen [Urti tra elettroni lenti e molecole di gas]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **15** (1913) 373–390, 613–620; *Über Zusammenstöße zwischen Elektronen und den Molekülen der Quecksilberdampfes und die Ionisierungsspannung desselben [Urti tra elettroni e molecole del vapore di mercurio e sua tensione di ionizzazione]*, Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **16** (1914) 457–467; *Die Bestätigung der Bohrschen Atomtheorie im optischen Spektrum durch Untersuchungen der unelastischen Zusammenstöße langsamer Elektronen mit Gasmolekülen [Conferma della teoria atomica di Bohr dello spettro ottico mediante studio degli urti anelastici di elettroni lenti con molecole di gas]*, Physikalische Zeitschrift **20** (1919) 132–143.

Le regole di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld

sovrapposti a un andamento generalmente crescente della corrente I con l'aumentare del potenziale V , si verificano anche dei minimi di corrente in corrispondenza di multipli di un ben preciso valore di V . L'interpretazione di questa discretizzazione dei valori di energia perduta dagli elettroni in moto tra anodo e catodo è semplice, se si ricorre all'ipotesi di Bohr degli stati stazionari di energia ben definita, occupati dagli elettroni degli atomi di mercurio: il primo minimo di corrente si realizza allora quando, colpito da un elettrone in moto tra anodo e catodo, un elettrone di un atomo di mercurio, inizialmente nel livello di energia più bassa, salta a un livello con energia immediatamente superiore. Nell'urto l'elettrone in moto tra anodo e catodo perde un ammontare corrispondente di energia e non è più in grado di raggiungere il catodo. L'elettrone dell'atomo di mercurio ha compiuto una transizione dallo stato stazionario *fondamentale*, cioè quello di energia più bassa in cui si trova inizialmente, verso il suo primo stato eccitato⁶²; similmente, il secondo minimo, che si verifica a potenziale V doppio, è provocato dalla perdita dello stesso ammontare di energia in seguito a *due* urti successivi con gli atomi di mercurio.

Dunque il risultato fondamentale degli esperimenti di Franck e Hertz è che l'energia, una quantità che in fisica classica può variare con continuità, viene a trovarsi invece discretizzata quando riguarda moti chiusi come quello dell'elettrone sulla sua orbita intorno all'atomo. Questo fatto ricorda la stessa conclusione raggiunta da Einstein per l'oscillatore armonico associato alla singola frequenza della radiazione di corpo nero (Esempio 2.1) oppure al moto di un atomo in un cristallo (Esempio 2.3).

II.5. Le regole di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld

La *discretizzazione* opposta alla *continuità* della fisica classica ispira la ricerca di una nuova teoria dei quanti basata sulle regole di quantizzazione proposte da Bohr nel 1913 per definire l'energia degli stati stazionari dell'atomo e generalizzate da Sommerfeld nel 1916⁶³. Queste regole, note oggi come *regole di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld*, impongono che l'azione, estesa a una traiettoria chiusa e percorsa con energia costante, sia multipla del quanto d'azione elementare h :

$$\oint p dq = n h \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.1)$$

Dalla quantizzazione dell'azione discende la discretizzazione dei possibili valori di energia per il moto periodico.

⁶² Franck e Hertz ritenevano inizialmente che questa era l'energia di ionizzazione e non quella tra lo stato fondamentale e il primo livello eccitato. Fu Bohr a convincerli di ciò solo nel 1919.

⁶³ Cfr. n. 23 p. 67.

Esercizio 5.1

Applicare la regola di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld (5.1) all'energia di un oscillatore armonico lineare, verificando la (2.40), cioè

$$E = n h \nu. \quad (5.2)$$

Ad esempio, si può considerare il caso dell'oscillatore armonico di Planck-Einstein, la cui hamiltoniana risulta quantizzata secondo la (2.31). Questo risultato può essere ritrovato dalla condizione di quantizzazione (5.1), utilizzando la trasformazione di variabili (2.33), dalla (5.1) si ha

$$nh = \oint p dq = \sqrt{2m\omega A} \sqrt{\frac{2A}{m\omega}} \int_0^{2\pi} d\alpha \sin^2 \alpha = 2\pi A.$$

Perciò l'azione A dell'oscillatore risulta quantizzata e multipla del quanto d'azione elementare rappresentato dalla costante di Planck h , in accordo con la (2.35). Di conseguenza, non tutti i valori sono consentiti all'energia E , ma solo quelli che sono multipli interi del quanto elementare di energia $h\nu$, in accordo col risultato di Einstein (2.40) oppure (5.2).

Le regole di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld acquistano significato più profondo alla luce del *principio adiabatico*, enunciato da Ehrenfest⁶⁴ e valido per moti periodici soggetti a perturbazione esterna. Tale perturbazione provoca transizioni tra stati stazionari; ma, se essa avviene in modo adiabatico, è possibile individuare delle quantità, dette *invarianti adiabatici*, che hanno le dimensioni di un'azione e che si mantengono costanti. Le regole di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld impongono che questi invarianti siano multipli interi del quanto di azione elementare h . Per un moto periodico, che si sviluppa in una sola dimensione, esiste un solo invariante adiabatico J che coincide con l'azione estesa a un ciclo del moto, come nella (5.1). Dunque risulta

$$J = n h, \quad (5.3)$$

dove n è un intero non negativo.

⁶⁴ Ehrenfest, confortato dalla sua spiegazione della legge di Wien (cfr. n. 33 p. 80), innalzò a principio la discretizzazione degli invarianti adiabatici di un sistema quantistico.

P. Ehrenfest: *Over adiabatische veranderingen van een stelsel in verband met de theorie der quanta* [Cambiamenti adiabatici di un sistema in connessione con la teoria dei quanti], Verslag der Kongelige Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **25** (1916) 412–433; *Adiabatische Invarianten und Quantentheorie* [Invarianti adiabatici e teoria dei quanti], Annalen der Physik **51** (1916) 327–352; *Adiabatic invariants and the theory of quanta* [Invarianti adiabatici e teoria dei quanti], Philosophical Magazine **33** (1917) 500–513.

Esercizio 5.2

Alla luce dell'Esempio I.1.1, riconoscere l'invariante adiabatico J di un oscillatore armonico lineare.

In generale però, considerando moti periodici in tre dimensioni, esistono più invarianti adiabatici, uno per ognuna delle variabili d'azione che risultano costanti del moto, come l'azione A dell'oscillatore armonico lineare. Di conseguenza, alla luce del principio adiabatico di Ehrenfest, altre variabili del sistema, che secondo la fisica classica potrebbero variare con continuità, si vengono invece a trovare discretizzate.

L'esempio più importante è costituito dal momento angolare, la cui quantizzazione è stata dimostrata nel 1921 dall'esperimento di Stern e Gerlach⁶⁵. L'esperimento fu originariamente eseguito con un fascio monoenergetico di atomi di argento che attraversava un campo magnetico non omogeneo. La scelta dell'argento permetteva di studiare praticamente il comportamento di un solo elettrone, quello più esterno e più mobile, responsabile delle principali proprietà fisiche e chimiche dell'argento. Nel suo moto orbitale questo elettrone possiede un momento angolare \mathbf{L} e può essere quindi assimilato a una spira di corrente che per la (I.3.67) ha associato un momento magnetico $\boldsymbol{\mu} = -(e/2mc)\mathbf{L}$; perciò l'elettrone interagisce col campo magnetico \mathbf{B} attraversato (fig. 5.1), subendo una forza

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}). \quad (5.4)$$

La disposizione sperimentale prevede che il fascio di atomi viaggi in direzione dell'asse y , attraversando la regione tra le espansioni polari del magnete in direzione ortogonale a quella (praticamente costante) del campo magnetico \mathbf{B} , disposto lungo l'asse z . Il modulo di \mathbf{B} varia con la posizione, molto nella direzione z e poco nella direzione x . Allora la forza subita dall'elettrone dell'atomo di argento ha l'unica componente diversa da zero lungo l'asse z :

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (5.5)$$

Di conseguenza l'atomo di argento viene deviato dalla sua traiettoria rettilinea incidente in misura proporzionale alla componente μ_z del suo momento magnetico e quindi alla componente L_z del suo momento angolare.

In linea di principio, secondo la fisica classica, \mathbf{L} può essere diretto in modo arbitrario: perciò su uno schermo successivo ai poli del magnete ci si aspetterebbe di raccogliere gli atomi di argento distribuiti in modo continuo lungo una traccia diretta come z , con estremi fissati dai valori $\pm\mu$. Invece sperimentalmente si ottengono solo

⁶⁵ Otto Stern (1888–1969) e Walter Gerlach (1899–1979): *Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms [Dimostrazione sperimentale del momento magnetico dell'atomo di argento]*, Zeitschrift für Physik **8** (1921) 110–111; *Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung [Dimostrazione sperimentale della quantizzazione della direzione]*, Zeitschrift für Physik **9** (1922) 349–352; *Das magnetische Moment des Silberatoms [Il momento magnetico dell'atomo di argento]*, Zeitschrift für Physik **9** (1922) 353–355.

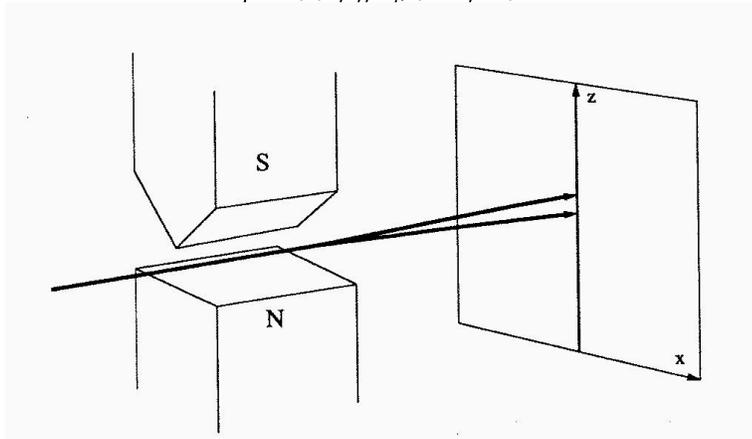


Fig. 5.1. Esperimento di Stern–Gerlach.

due macchie, simmetriche rispetto a quella che si otterrebbe senza campo magnetico per l'arrivo del fascio indisturbato: ciò indica che L può solo disporsi in direzione parallela o antiparallela a z .

Ripetendo l'esperimento con altri fasci atomici il numero di macchie cambia a seconda del tipo di atomo, a dimostrazione che il numero di valori possibili per la componente di L lungo l'asse z dipende dal modulo di L stesso ed è comunque un numero finito.

L'esperimento di Stern e Gerlach dimostra dunque una *quantizzazione spaziale* del momento angolare che può assumere solo determinate direzioni discrete, individuabili da un numero quantico m che rappresenta la componente di L lungo la direzione prefissata. Se si pone

$$L \sim lh, \quad (5.6)$$

m assume sempre e solo i $2l + 1$ valori: $-l, -l + 1, \dots, l - 1, l$.

Esercizio 5.3

Per la hamiltoniana dell'Esercizio I.1.14 le regole di quantizzazione di Bohr–Sommerfeld impongono:

$$\oint dr p_r = kh, \quad \oint d\phi p_\phi = lh, \quad (5.7)$$

dove k e l sono rispettivamente i *numeri quantici radiale e azimutale*. Scegliendo $V(r) = -e^2/r$, verificare i seguenti risultati:

$$L = l\hbar, \quad E \equiv E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad (5.8)$$

dove $n = l + k$ è il *numero quantico principale* e $\hbar = h/2\pi$.

Esempio 5.1

La quantizzazione del momento angolare può essere dedotta dalle regole di Bohr-Sommerfeld imposte agli invarianti adiabatici del moto. Come esempio si consideri il caso di un elettrone (di massa m e carica $-e$) che sente l'attrazione coulombiana del nucleo dell'atomo di idrogeno (di carica $+e$). La sua hamiltoniana può essere scritta in coordinate polari:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - \frac{e^2}{r}. \quad (5.9)$$

Alternativamente, si ha

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} p_\phi^2 \right) - \frac{e^2}{r}, \quad (5.10)$$

dove

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\phi = mr^2\dot{\phi} \sin^2 \theta \quad (5.11)$$

sono i momenti coniugati delle coordinate lagrangiane r, θ, ϕ .

Come per tutti i moti centrali, anche per questa hamiltoniana il momento angolare L resta costante. Infatti dalle equazioni del moto si possono verificare i seguenti risultati:

$$L_z \equiv p_\phi = \text{costante}, \quad L^2 \equiv p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = \text{costante}. \quad (5.12)$$

Le condizioni di Bohr-Sommerfeld impongono:

$$\begin{aligned} J_r &= \oint dr p_r = n'h, \\ J_\theta &= \oint d\theta p_\theta = l'h, \\ J_\phi &= \oint d\phi p_\phi = mh, \end{aligned} \quad (5.13)$$

dove n', l' e m sono numeri interi non negativi. Dall'ultima delle (5.13) si ottiene

$$J_\phi = 2\pi L_z = mh,$$

cioè

$$L_z = m \frac{h}{2\pi}, \quad (5.14)$$

che fornisce la quantizzazione della componente del momento angolare lungo l'asse z . Per il suo ruolo nell'esperimento di Stern e Gerlach, il numero m viene detto *numero quantico magnetico*.

Integrando la seconda delle (5.13) lungo un'orbita completa, occorre calcolare

$$J_\theta = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}} = l'h,$$

dove θ_1 e θ_2 sono le due radici comprese tra 0 e π dell'equazione

$$L^2 \sin^2 \theta - L_z^2 = 0.$$

Si ottiene

$$J_\theta = 2\pi(L - |L_z|) = l'h,$$

cioè

$$L = (l' + |m|) \frac{h}{2\pi} \equiv l \frac{h}{2\pi}. \quad (5.15)$$

Dunque anche il modulo del momento angolare risulta quantizzato secondo il numero l che viene denominato *numero quantico azimutale*, in accordo con la (5.6). Siccome l e l' sono non negativi, dalla (5.15) si deve avere

$$|m| \leq l, \quad (5.16)$$

in accordo col fatto che m caratterizza i valori possibili della componente del momento angolare lungo l'asse z scelto.

Dalla prima delle (5.13) segue infine in modo simile la quantizzazione dell'energia:

$$J_r = -2\pi \left(L - \frac{me^2}{\sqrt{-2mE}} \right)$$

$$E = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \frac{1}{(n' + l)^2},$$

cioè

$$E \equiv E_n = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \frac{1}{n^2}. \quad (5.17)$$

I numeri n' e n sono rispettivamente il *numero quantico radiale* e il *numero quantico principale*.

La (5.17) conferma la discretizzazione dei valori di energia per un moto periodico, corrispondente in questo caso agli stati legati dell'elettrone dell'atomo di idrogeno (4.7). Essa fornisce tra l'altro la possibilità di esprimere la costante di Rydberg (4.6) mediante le costanti fondamentali che intervengono nel problema:

$$R_\infty = -\frac{n^2 E_n}{hc} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3 c}. \quad (5.18)$$

Esercizio 5.4

Applicare la regola di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld (5.1) al caso di una particella di massa m confinata tra pareti rigide di altezza infinita. Si assuma un potenziale del tipo

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq a, \\ \infty & |x| > a, \end{cases} \quad (5.19)$$

e si consideri il ciclo elementare ottenuto variando la posizione x della particella per un andirivieni lungo l'asse x a partire da $-a$.

Il principio adiabatico e le regole di Bohr-Sommerfeld permettono l'applicazione della meccanica classica alla teoria dei quanti, relativamente allo studio degli stati stazionari. Le transizioni tra stati stazionari invece possono essere studiati con la meccanica classica in virtù del *principio di corrispondenza*. Esso si basa sul fatto che, se si fa tendere a zero la differenza di energia tra i livelli stazionari, lo spettro diventa continuo; in termini di azione e di invarianti adiabatici ciò significa che i salti energetici coinvolgono variazioni Δn piccoli rispetto n . In tale limite le frequenze delle righe spettrali dell'atomo di idrogeno si addensano come in una banda continua e tendono a valori calcolabili con l'elettrodinamica classica. Sebbene implicito fin dai primi lavori di Bohr, il principio di corrispondenza viene enunciato esplicitamente solo nel 1920 come guida fondamentale per una generalizzazione razionale della teoria classica della radiazione⁶⁶. Esso permette di spiegare l'intensità delle linee spettrali e l'emissione spontanea di radiazione, che era stata suggerita da Einstein nel 1916 con considerazioni di equilibrio termodinamico della radiazione⁶⁷.

Il modello di Bohr fu utilizzato anche per un'analisi degli spettri atomici in presenza di un campo elettrico o di un campo magnetico. La presenza di un campo magnetico provoca una separazione delle righe dello spettro in multipletti, con particolari proprietà di polarizzazione della luce associata. Una parte di questo fenomeno, noto come *effetto Zeeman* dal nome di chi lo scoprì nel 1897⁶⁸, è riconducibile agli schemi dell'epoca e alla quantizzazione spaziale della direzione del momento angolare orbitale degli elettroni nell'atomo, ma il cosiddetto effetto Zeeman *anomalo* può essere spiegato solo con l'ipotesi dello spin (cfr. paragrafo IX.3). Sebbene lo spin abbia caratteristiche di momento angolare, gli effetti di spin però non possono essere trattati in modo classico.

⁶⁶ N. Bohr: *Über die Linienspektren der Elemente [Gli spettri a righe degli elementi]*, Zeitschrift für Physik **2** (1920) 423–464.

⁶⁷ A. Einstein: *Quantentheorie der Strahlung [Teoria quantistica della radiazione]*, Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft, Zürich, **18** (1916) 47–62; *Zur Quantentheorie der Strahlung [Teoria quantistica della radiazione]*, Physikalische Zeitschrift **18** (1917) 121–128.

⁶⁸ Pieter Zeeman (1865–1943): *Over den invloed eener magnetisatie op den aard van het door een stof uitgezonden licht [Influenza del magnetismo sulla natura della luce emessa da una sostanza]*, Verslag van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **5** (1896) 181–185, 242–248; *Doublets and triplets in the spectrum produced by external magnetic forces [Doppietti e tripletti nello spettro prodotti da forze magnetiche esterne]*, Philosophical Magazine **44** (1897) 55–60, 255–259.

Anche la presenza di un campo elettrico può provocare una separazione delle righe dello spettro. L'effetto, noto oggi come *effetto Stark*, fu previsto teoricamente nel 1901 da Voigt, che però stimò la separazione troppo piccola per essere messa in evidenza⁶⁹. Una decina di anni dopo l'effetto fu misurato indipendentemente e contemporaneamente da Stark e Lo Surdo⁷⁰. Anche l'effetto Stark poteva essere in parte interpretato alla luce del modello di Bohr. Tuttavia resta comunque artificioso il meccanismo di discretizzazione dell'azione che è alla base di questi tentativi di interpretazione dei dati sperimentali e che non ha alcuna giustificazione teorica⁷¹.

⁶⁹ Woldemar Voigt (1850–1919): *Über das elektrische Analogon des Zeeman-effektes [Analogo elettrico dell'effetto Zeeman]*, *Annalen der Physik* **4** (1901) 197–208.

⁷⁰ Antonino Lo Surdo (1880–1949): *Sul fenomeno analogo a quello di Zeeman nel campo elettrico*, *Atti della Reale Accademia dei Lincei* **22** (1913) 664–666.

Johannes Stark (1874–1957): *Beobachtung über den Effekt des elektrischen Feldes auf Spektrallinien [Osservazione dell'effetto del campo elettrico sulle righe spettrali]*, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)* (1913) 932–946; *Annalen der Physik* **43** (1914) 965–1047.

⁷¹ Per una rassegna dello sviluppo e dei risultati della vecchia teoria dei quanti, si veda ad esempio il citato testo di Sin-Itiro Tomonaga: *Quantum Mechanics*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1962, vol. 1, cap. 3.

Una trattazione sistematica della fisica atomica nell'interpretazione della vecchia teoria dei quanti è esposta nel testo di Max Born (1882–1970): *Vorlesungen über Atommechanik*, J. Springer, Berlino, 1925.