

I. RISULTATI DI FISICA CLASSICA

Alla fine del secolo XIX si era completato il quadro della fisica classica: le scienze fisiche avevano raggiunto un grado di organizzazione dell'interpretazione dei fenomeni naturali che rendeva conto in modo soddisfacente degli aspetti macroscopici. Questo era il risultato di circa tre secoli di ricerche in cui l'attenzione del filosofo, cioè di colui che ama sapere, si era finalmente concentrata anche sui fenomeni naturali affrontando dapprima il problema del moto dei corpi.

Con i *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, attinenti alla meccanica e ai meccanismi locali* pubblicati a Leiden nel 1638, Galileo Galilei (1564–1642) sancisce la nascita della moderna meccanica quale fondamento di tutte le scienze¹. Successivamente Isaac Newton (1642–1727) definisce i principi della meccanica e il nuovo metodo di matematizzare la descrizione del movimento dei corpi materiali². La definitiva razionalizzazione della meccanica avviene nel 1788 con la pubblicazione a Parigi di un testo di meccanica analitica³ del matematico torinese Giuseppe Luigi Lagrange (1736–1813). In esso si completa quel processo di unificazione tra descrizione del moto e trattazione rigorosa matematica che permette di “ridurre la teoria meccanica e l'arte di risolvere i problemi che a essa si riferiscono a formule generali, il cui semplice sviluppo fornisce tutte le equazioni necessarie per la soluzione di ciascun problema”. Il successo di questo programma è fedelmente testimoniato nella ben nota affermazione di Pierre-Simon de Laplace (1749–1827): “Un'Intelligenza che conoscesse, a un dato istante, tutte le forze da cui è animata la natura e la disposizione di tutti gli enti che la compongono e che inoltre fosse sufficientemente profonda da sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe in

¹ *Le opere di Galileo Galilei*, Antonio Favaro ed., Firenze, 1890–1909, 20 voll.

² I. Newton: *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, Iussu Societatis Regiæ, Londra, 1687 [traduzione italiana di Alberto Pola: *Principi matematici della filosofia naturale*, UTET, Torino, 1965].

³ I due volumi del trattato *Mécanique analytique* nelle edizioni del 1811 e 1816 compaiono come volumi XI e XII nella raccolta: *Œuvres de Lagrange*, J.A. Serret, Parigi, 1867–1892, 14 voll.

una stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e degli atomi più leggeri; per essa nulla sarebbe incerto e ai suoi occhi sarebbero presenti sia il futuro che il passato"⁴. In altre parole, note a un certo istante la posizione e la velocità di tutte le particelle dell'universo e le loro mutue forze di interazione, le equazioni della meccanica permettono di conoscere l'evoluzione dell'intero universo in modo perfettamente deterministico e causale. Contemporaneamente, le equazioni del moto, per esempio quelle nella forma proposta da William Rowan Hamilton (1805–1865)⁵, sono reversibili, cioè prevedono che, se al presente si invertono le velocità di tutte le particelle, l'evoluzione verso il passato avvenga lungo la stessa traiettoria percorsa in senso inverso.

Anche i fenomeni macroscopici, in cui interviene il concetto di temperatura, vengono affrontati nella seconda metà del XIX secolo con questa impostazione di stampo illuministico. Il lungo travaglio che dal calorico ha portato allo sviluppo della termodinamica trae origine dalle osservazioni dell'americano Benjamin Thompson (1753–1814), divenuto nel 1792 conte di Rumford al servizio dell'esercito bavarese. Egli riconobbe *ante litteram* una nuova forma di energia quale responsabile del surriscaldamento dei fusti di cannone durante l'alesaggio, energia che non poteva che provenire dal lavoro compiuto dalle punte della fresa utilizzata. Ma l'equivalenza del calore con le altre forme di energia fu solo stabilita con il primo principio della termodinamica, espresso nel 1842 da Julius Robert von Mayer (1814–1878)⁶. L'intuizione del secondo principio della termodinamica è dovuta a Sadi-Nicolas-Léonard Carnot (1796–1832) che nel 1824 ne discute alcuni aspetti⁷ che restano però lettera morta fino alla loro riscoperta, operata nel 1848 da William Thomson Kelvin (1824–1907), e agli studi di James Prescott Joule (1818–1889). L'intrinseca irreversibilità dei processi naturali si scontra con l'ideale illuministico di Laplace e trova sistemazione teorica con i contributi di Rudolf Julius Emmanuel Clausius (1822–1888), James Clerk Maxwell (1831–1879) e Ludwig Boltzmann (1844–1906). Il concetto di entropia, introdotto da Clausius nel 1862, si adatta bene alla teoria del calore⁸ di Maxwell, basata su un modello cinetico già da lui introdotto per

⁴ *Œuvres complètes de Laplace*, Gauthier-Villars, Parigi, 1878–1912, 14 voll.

La frase citata è nell'*Essai philosophique sur les probabilités* [Saggio filosofico sulla probabilità], raccolto nel volume VII e tradotto in italiano in: *Opere di Pierre Simon Laplace*, a cura di Orietta Pesenti Cambursano, UTET, Torino, 1967, p. 233.

⁵ I fondamenti della meccanica analitica sono stati posti in una serie di lavori di Hamilton, il primo dei quali fu presentato all'Accademia Reale Irlandese il 3 dicembre 1824.

W.R. Hamilton: *Essay on the theory of systems of rays* [Saggio sulla teoria dei sistemi di raggi], *Transactions of the Royal Irish Academy* **15** (1828) 69–174; **16** (1830) 1–61; **16** (1831) 93–125; **17** (1837) 1–144.

⁶ J.R. Mayer: *Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur* [Osservazioni sulle forze della natura inanimata], *Annalen der Chemie und Pharmacie* **42** (1842) 233.

⁷ S. Carnot: *Réflexions sur la puissance du feu* [Riflessioni sulla potenza del fuoco], Bachelier, Parigi, 1824.

⁸ J.C. Maxwell: *The Theory of Heat*, Londra, 1871.

la dinamica dei gas ⁹ e si completa con il cosiddetto teorema *H* di Boltzmann ¹⁰ con cui si getta il ponte tra descrizione microscopica deterministica e descrizione macroscopica in termini di meccanica statistica. Il programma però trova grosse difficoltà ad essere accettato da tutti, principalmente per l'opposizione della scuola inglese ispirata da Lord Kelvin ¹¹ che con Peter Guthrie Tait (1831–1901) ¹² non condivideva l'impostazione matematica di Boltzmann. Uno sviluppo più sicuro fu possibile solo dopo la pubblicazione postuma del trattato ¹³ di Josiah Willard Gibbs (1839–1903), che aveva dato fondamentali contributi alla termodinamica degli stati di equilibrio e posto le basi della moderna meccanica statistica.

Su un altro versante, gli studi di ottica sono caratterizzati da una lunga polemica sulla natura della luce. Accanto alla teoria corpuscolare, proposta fin dal 1704 da Newton nel suo trattato sull'ottica ¹⁴, si venne affermando l'ipotesi ondulatoria sostenuta da Christian Huyghens (1629–1695) ¹⁵. Ma tale ipotesi poté prevalere solo dopo che Augustin–Jean Fresnel (1788–1827) divulgò nelle sue memorie ¹⁶ del 1818, ma pubblicate nel 1826, l'esito degli esperimenti di interferenza di Thomas Young (1773–1829) ¹⁷ e soprattutto dopo che la determinazione della velocità di propagazione della luce nel vuoto e in un mezzo da parte di Armand-Hippolyte-Louis Fizeau (1819–1896) ¹⁸ e di Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868) ¹⁹

⁹ J.C. Maxwell: *On the dynamical theory of gases [Teoria dinamica dei gas]*, Philosophical Magazine [4] **32** (1866) 390–393; [4] **35** (1868) 129–145, 185–217; Philosophical Transactions of the Royal Society of London **157** (1867) 49–88.

¹⁰ L. Boltzmann: *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen [Ulteriori studi sull'equipartizione del calore tra le molecole di un gas]*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Wien) **66** (1872) 275–370.

¹¹ W.T. Kelvin: *Nineteenth century clouds over the dynamical theory of heat and light [Nubi del diciannovesimo secolo sulla teoria dinamica del calore e della luce]*, Philosophical Magazine **2** (1901) 1–40.

Le nubi a cui allude Kelvin erano i problemi dell'etere cosmico e dell'equipartizione dell'energia, legati rispettivamente alla difficoltà di conciliare la meccanica con l'elettromagnetismo e alla interpretazione statistica dei fenomeni termodinamici, per lui inaccettabile.

¹² P.G. Tait: *On the foundations of the kinetic theory of gases [Sui fondamenti della teoria cinetica dei gas]*, Transactions of the Royal Society of Edinburgh **33** (1886) 65–95, 251–277.

¹³ J.W. Gibbs: *Elementary principles in statistical mechanics: Development with special reference to the rational foundations of thermodynamics*, Yale University Press, New Haven, Connecticut, 1902.

¹⁴ I. Newton: *Opticks, or a treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colour of light*, S. Smith, Londra, 1704.

¹⁵ Ch. Huyghens: *Traité de la lumière*, P. van der Aa, Leiden, 1690.

¹⁶ A. Fresnel: *Mémoires sur la diffusion de la lumière*, in *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Parigi, 1826, vol. 5.

¹⁷ T. Young: *On the theory of light and colour [Teoria della luce e del colore]*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **92** (1802) 12–24.

¹⁸ A. Fizeau: *Sur une expérience relative à la vitesse de propagation de la lumière [Su un'esperienza relativa alla velocità di propagazione della luce]*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **29** (1849) 90–92.

¹⁹ J. Foucault: *Méthode générale pour mesurer la vitesse de la lumière dans l'air et les milieux transparents [Metodo generale per misurare la velocità della luce nell'aria e nei mezzi trasparenti]*, Comptes Rendus

intorno alla metà del XIX secolo diede una risposta conclusiva in suo favore.

La propagazione dei segnali luminosi trova la sua descrizione più completa nel 1873 per opera di Maxwell che raggiunge una straordinaria sintesi tra fenomeni ottici e fenomeni elettrici e magnetici²⁰. Dopo i lavori iniziali di Alessandro Volta (1745–1827), Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806), André-Marie Ampère (1775–1836), Hans Christian Oersted (1777–1851), si fece luce l'idea che fosse possibile dare una trattazione unificata dei fenomeni elettrici e magnetici in termini di campo elettromagnetico. Questo programma, sostenuto da Michael Faraday (1791–1867), si perfeziona con la veste matematica delle equazioni di Maxwell²¹ che spiegano anche i fenomeni ottici. La conferma dell'esistenza delle onde elettromagnetiche venne da una serie di esperimenti iniziati nel 1886 da Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894).

I risultati raggiunti nell'arco di questi tre secoli costituiscono ancora oggi il fondamento irrinunciabile per ogni approccio dell'indagine fisica e certamente rappresentano il riferimento naturale per ogni progresso nella descrizione unificata dei processi fisici non solo a livello macroscopico, ma anche a livello microscopico di fisica atomica e nucleare. Perciò lo scopo di questo capitolo è di richiamare alcuni concetti fondamentali di fisica classica che sono essenziali per la formulazione e la comprensione della meccanica quantistica.

I.1. Meccanica analitica

La meccanica analitica studia il moto delle particelle di un sistema fisico supponendole puntiformi. Riconducendo l'azione esterna sul sistema e quella reciproca fra le particelle del sistema stesso a forze, che in ultima analisi sono forze conservative, la meccanica analitica stabilisce le equazioni del moto sulla base di metodi molto generali. Le equazioni risultanti sono in forma differenziale e, una volta risolte, permettono di conoscere istante per istante la posizione di tutte le particelle e quindi l'atto di moto complessivo del sistema. Anche se in linea di principio il programma della meccanica analitica può essere applicato a un numero qualsiasi di particelle, in pratica le equazioni del moto possono essere risolte in un numero limitato di casi. Tuttavia i metodi utilizzati e le quantità definite dalla meccanica analitica possiedono un significato concettuale e rivestono un ruolo propedeutico della massima importanza per ogni possibile sviluppo²².

de l'Académie des Sciences **30** (1850) 551–560.

²⁰ J.C. Maxwell: *Treatise on electricity and magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1873, 2 voll.

²¹ J.C. Maxwell: *A dynamical theory of electromagnetic field [Una teoria dinamica del campo elettromagnetico]*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **155** (1865) 459–512.

²² Per una trattazione elementare degli argomenti di questo paragrafo si veda ad esempio il testo di Herbert Goldstein: *Classical mechanics*, Addison Wesley Publ. Co., Reading, Massachusetts, 1980, seconda edizione [traduzione italiana della prima edizione a cura di Enzo Fuschini: *Meccanica classica*, Zanichelli, Bologna, 1971].

Per una trattazione dedicata ai fondamenti matematici e utile per la discussione dei problemi di stabilità,

Nella meccanica analitica un sistema fisico con f gradi di libertà è individuato dalla sua lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, assegnata in funzione delle *coordinate lagrangiane* (q_1, q_2, \dots, q_f) , collettivamente indicate con q , delle loro derivate prime \dot{q} ed eventualmente del tempo t . Gli f gradi di libertà del sistema sono già depurati dei vincoli che qui e nel seguito si suppongono olonomi²³.

Ha interesse considerare sistemi soggetti a forze di tipo conservativo. Pertanto si può definire un'energia potenziale $V = V(q, t)$, posizionale ed eventualmente dipendente dal tempo t . Se $T = T(q, \dot{q}, t)$ rappresenta l'energia cinetica del sistema, si ha

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t). \quad (1.1)$$

È noto che le equazioni del moto, dette *equazioni di Lagrange*, sono deducibili da un principio variazionale, detto di Hamilton²⁴ e applicato all'integrale d'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t), \quad (1.2)$$

con la condizione che la variazione δS si annulli per variazioni arbitrarie di q e \dot{q} , che rispettino le configurazioni estreme in t_1 e t_2 e tali da mantenere $t_2 - t_1$ costante (*variazione sincrona*). La condizione

$$\delta S = 0, \quad (1.3)$$

che implica una condizione di estremo (massimo o minimo) per l'azione S , significa che, fra tutti i possibili cammini che il sistema può esplorare tra t_1 e t_2 , quello effettivamente percorso rende estremo l'integrale d'azione (1.2). Questa condizione può essere soddisfatta solo rispettando le equazioni del moto di Lagrange, che risultano

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (1.4)$$

Esercizio 1.1

Scrivere la lagrangiana di un oscillatore armonico monodimensionale con massa m e costante elastica k . Dedurre l'equazione del moto.

si veda il testo di Giovanni Gallavotti: *Meccanica elementare*, Boringhieri, Torino, 1980 [edizione in inglese: *Elements of Mechanics*, Springer, New York, 1983].

²³ Si definiscono olonomi i vincoli di tipo finito, esprimibili cioè mediante equazioni della forma

$$f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

che impongono restrizioni ai vettori di posizione $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ delle N particelle del sistema in esame. I gradi di libertà sono dunque $f = 3N - s$.

²⁴ Cfr. n. 5 p. 2.

Per un'esposizione critica dei metodi variazionali, si veda il testo di Cornelius Lanczos: *The variational principles of mechanics*, University of Toronto Press, Toronto, 1949.

Esercizio 1.2

La lagrangiana di una particella di massa m , soggetta a forze centrali descritte da un potenziale $V(r)$, funzione della sola distanza dall'origine del sistema di riferimento, in coordinate polari ha la seguente espressione:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) - V(r).$$

Dedurre le equazioni del moto.

Le equazioni di Lagrange hanno il pregio di essere invarianti rispetto a una arbitraria trasformazione di coordinate; cioè, data una trasformazione invertibile del tipo

$$q' = q'(q, t), \quad (1.5)$$

le equazioni di Lagrange si riscrivono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} = 0. \quad (1.6)$$

Inoltre la lagrangiana di un sistema non è univocamente definita. La trasformazione

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{dF}{dt}, \quad (1.7)$$

dove $F = F(q, t)$ è un'arbitraria funzione derivabile delle q e del tempo, produce una nuova lagrangiana \mathcal{L}' che per la (1.3) porta alle stesse equazioni di Lagrange (1.4).

Le equazioni di Lagrange costituiscono un sistema di f equazioni differenziali del secondo ordine nel tempo per le coordinate q . Il loro integrale generale dipende da $2f$ costanti arbitrarie, che sono univocamente determinate assegnando ad esempio q e \dot{q} a un certo istante e fissando quindi le *condizioni iniziali*.

Nota l'evoluzione temporale delle coordinate lagrangiane, risulta pure noto il comportamento nel tempo di una qualsiasi variabile dinamica, in quanto ogni altra quantità che caratterizza il sistema è esprimibile in funzione delle coordinate lagrangiane. Ad esempio, per una particella di massa m che si muove nello spazio ordinario a tre dimensioni con velocità \mathbf{v} e individuata dalla posizione \mathbf{r} , il momento angolare \mathbf{L} risulta $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$.

Esercizio 1.3

Esprimere in coordinate cartesiane e in coordinate polari le componenti del momento angolare \mathbf{L} di una particella di massa m che si muove nello spazio tridimensionale.

Alla formulazione lagrangiana è del tutto equivalente quella hamiltoniana ²⁵,

²⁵ W.R. Hamilton: *On a general method of expressing the path of light, and of planets, by the coefficients of a characteristic function* [Un metodo generale per descrivere il cammino percorso dalla luce, e dai pianeti, per mezzo dei coefficienti di una funzione caratteristica], Dublin University Review, 1833, pp. 795–826.

nella quale si definisce il *momento canonico* (o *momento coniugato* di q),

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \quad (1.8)$$

e si introduce la funzione hamiltoniana $H = H(q, p, t)$,

$$H = p\dot{q} - \mathcal{L}, \quad (1.9)$$

che per sistemi olonomi identifica l'energia totale:

$$H = T(p, q) + V(q, t). \quad (1.10)$$

Le equazioni del moto diventano allora

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (1.11)$$

note come *equazioni di Hamilton* in forma canonica. Esse costituiscono un insieme di $2f$ equazioni differenziali del primo ordine nel tempo per le $2f$ *variabili canoniche* (q, p) . Per la loro risoluzione occorre assegnare $2f$ costanti arbitrarie, che possono essere scelte fissando ad esempio q e p a un certo istante. Parimente a quanto avviene per le equazioni di Lagrange, con la conoscenza delle condizioni iniziali le equazioni di Hamilton determinano completamente l'evoluzione temporale del sistema.

Esercizio 1.4

Scrivere la hamiltoniana di un oscillatore armonico monodimensionale con massa m e costante elastica k . Dedurre l'equazione del moto dalle equazioni di Hamilton.

Esercizio 1.5

Esprimere in coordinate cartesiane e in coordinate polari il momento coniugato di una particella di massa m , posizione \mathbf{r} e velocità \mathbf{v} che si muove nello spazio tridimensionale, soggetta a un campo di forze esterne, funzione solo della posizione.

Esercizio 1.6

A partire sia dalle coordinate cartesiane, sia dalle coordinate polari di una particella che si muove nello spazio tridimensionale, esprimere mediante le coordinate canoniche la componente lungo l'asse z e il modulo quadrato del momento angolare.

Esercizio 1.7

Scrivere la hamiltoniana e dedurre le equazioni di Hamilton per la particella dell'Esercizio 1.2.

Si ottiene una terza forma delle equazioni del moto ricorrendo alle *parentesi di Poisson*²⁶. Date due funzioni A e B delle variabili canoniche (q, p) , si definisce parentesi di Poisson la seguente espressione:

$$\{A, B\} = \sum \left[\frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} \right], \quad (1.12)$$

dove \sum indica sommatoria sull'omesso indice che numera le variabili canoniche.

Notevoli sono alcune proprietà delle parentesi di Poisson:

$$\begin{aligned} \{A, A\} &= 0, \\ \{A, B\} &= -\{B, A\}, \\ \{A + B, C\} &= \{A, C\} + \{B, C\}, \\ \{AB, C\} &= \{A, C\}B + A\{B, C\}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Vale inoltre l'identità:

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A\}, B\} = 0, \quad (1.14)$$

nota come *identità di Jacobi*.

Esercizio 1.8

Verificare le seguenti parentesi di Poisson tra le variabili canoniche (*parentesi di Poisson fondamentali*):

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad (1.15)$$

dove il simbolo di Kronecker δ_{ij} vale

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j, \\ 0 & \text{per } i \neq j. \end{cases} \quad (1.16)$$

²⁶ Siméon-Denis Poisson (1781–1840): *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique* [Memoria sulla variazione delle costanti arbitrarie nei problemi di meccanica], Journal de l'École Polytechnique **8** (1809) 226–344.

Esercizio 1.9

Verificare le seguenti parentesi di Poisson tra le componenti cartesiane del momento angolare L di una particella di massa m che si muove nello spazio tridimensionale:

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k, \quad (1.17)$$

dove il tensore totalmente antisimmetrico ϵ_{ijk} risulta

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & (i, j, k) = (x, y, z) \text{ ciclici,} \\ -1, & (i, j, k) = (y, x, z) \text{ ciclici,} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (1.18)$$

Le parentesi di Poisson intervengono nel calcolo della derivata totale di una qualunque variabile dinamica del sistema. Infatti, se $Q = Q(q, p, t)$ è una tale variabile, risulta

$$\frac{dQ}{dt} = \sum \left[\frac{\partial Q}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p} \dot{p} \right] + \frac{\partial Q}{\partial t}$$

e quindi, ricorrendo alle equazioni di Hamilton (1.11), si ottiene

$$\frac{dQ}{dt} = \{Q, H\} + \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (1.19)$$

Le stesse equazioni di Hamilton si possono riscrivere in termini di parentesi di Poisson scegliendo per Q prima q e poi p :

$$\dot{q} = \{q, H\}, \quad \dot{p} = \{p, H\}. \quad (1.20)$$

Le forme (1.4), (1.11) e (1.20) sono tre forme equivalenti delle equazioni del moto, la cui risoluzione risolve il problema dell'atto di moto del sistema allo studio.

Esercizio 1.10

Dalle equazioni (1.20) dedurre l'equazione del moto per un oscillatore armonico monodimensionale con massa m e costante elastica k .

Esercizio 1.11

Dalle (1.20) dedurre le equazioni del moto per la particella dell'Esercizio 1.2.

In molti problemi, invece di risolvere completamente le equazioni del moto, può essere sufficiente riconoscere l'esistenza di variabili dinamiche che si mantengono costanti durante il moto. Se Q è una *costante del moto*, cioè

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad (1.21)$$

dalla (1.19) segue

$$\{Q, H\} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0. \quad (1.22)$$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine nel tempo e la variabile dinamica Q che la soddisfa si chiama *integrale primo*. Questo nome deriva dal fatto che la conoscenza di Q equivale ad avere eseguito un'integrazione sul tempo in una delle equazioni del moto, che sono in generale equazioni differenziali del secondo ordine nel tempo. Se Q non dipende esplicitamente dal tempo, cioè

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0, \quad (1.23)$$

allora la (1.22) si riduce alla relazione

$$\{Q, H\} = 0, \quad (1.24)$$

che è condizione necessaria e sufficiente perché Q sia un integrale primo.

Esercizio 1.12

Scrivere la hamiltoniana di un oscillatore armonico tridimensionale isotropo con massa m e costante elastica k . Verificare che il momento angolare è una costante del moto.

Esercizio 1.13

Verificare che per la particella dell'Esercizio 1.2 il momento angolare è una costante del moto.

Esercizio 1.14

Alla luce dell'Esercizio precedente il moto descritto dalla lagrangiana dell'Esercizio 1.2 è un moto piano. Verificare che la corrispondente hamiltoniana può porsi nella forma seguente:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\phi^2 \right) + V(r), \quad (1.25)$$

dove

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\phi = mr^2\dot{\phi} (= L) \quad (1.26)$$

sono i momenti coniugati delle coordinate lagrangiane r, ϕ (coordinate polari nel piano (x, y) : $\theta = \pi/2$).

Esercizio 1.15

Scelto nell'Esercizio precedente il potenziale coulombiano $V(r) = -e^2/r$, verificare che anche il vettore

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{e^2}{r} \mathbf{r}$$

è una costante del moto ²⁷.

Esercizio 1.16

Verificare le seguenti parentesi di Poisson tra le componenti del momento angolare \mathbf{L} e del vettore \mathbf{R} dell'Esercizio precedente:

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k, \quad (1.27)$$

$$\{L_i, R_j\} = \epsilon_{ijk} R_k, \quad (1.28)$$

$$\{R_i, R_j\} = -\frac{2}{m} H \epsilon_{ijk} L_k, \quad (1.29)$$

dove

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}.$$

Le equazioni del moto nella formulazione hamiltoniana si prestano a risoluzione mediante opportune trasformazioni delle variabili canoniche, dette appunto *trasformazioni canoniche*. Si definisce trasformazione canonica quella che trasforma l'insieme di variabili canoniche (q, p) nell'insieme (κ, π) , tale che le parentesi di Poisson rimangano invarianti, cioè

²⁷ Il vettore \mathbf{R} , spesso citato come vettore di Laplace–Runge–Lenz, è fondamentale nella definizione dell'orbita classica del problema di Keplero–Coulomb: esso punta nella direzione del raggio vettore al perielio dell'orbita e ha modulo $e^2\epsilon$, dove $\epsilon = \sqrt{1 + 2L^2 E / m e^4}$ è l'eccentricità dell'orbita percorsa con energia E .

P. Laplace: *Traité de Mécanique Céleste*, Parigi, 1799, vol. 1, pp. 165 e segg.; *Œuvres*, Gauthiers–Villars, Parigi, 1843, vol. 1, pp. 187 e segg.

Carl David Tolmé Runge (1856–1927): *Vektoranalysis*, Hirzel, Lipsia, 1919, vol. 1.

Wilhelm Lenz (1888–1957): *Über den Bewegungsverlauf und die Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung* [Evoluzione del moto e stati quantici del moto di Keplero perturbato], *Zeitschrift für Physik* **24** (1924) 197–207.

Il vettore \mathbf{R} è stato ripreso per la descrizione quantistica dell'atomo di idrogeno (cfr. Esercizio IV.1.14) da Wolfgang Pauli (1900–1958): *Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neueren Quantenmechanik* [Lo spettro dell'idrogeno dal punto di vista della nuova meccanica quantistica], *Zeitschrift für Physik* **36** (1926) 336–363.

$$\{A, B\}_{q,p} = \{A, B\}_{\kappa,\pi}, \quad (1.30)$$

dove nel primo membro A e B sono due variabili dinamiche considerate funzioni di (q, p) , mentre nel secondo membro A e B sono funzioni di (κ, π) . In particolare restano invariati le *parentesi di Poisson fondamentali*

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad (1.31)$$

dove il simbolo di Kronecker δ_{ij} vale

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } i = j, \\ 0 & \text{per } i \neq j. \end{cases} \quad (1.32)$$

Si ha cioè anche

$$\{\kappa_i, \kappa_j\} = \{\pi_i, \pi_j\} = 0, \quad \{\kappa_i, \pi_j\} = \delta_{ij}. \quad (1.33)$$

Le nuove variabili (κ, π) sono anch'esse canoniche, nel senso che è possibile definire una nuova funzione hamiltoniana, $K = K(\kappa, \pi, t)$, tale che le equazioni del moto per le nuove variabili siano ancora in forma canonica:

$$\dot{\kappa} = \frac{\partial K}{\partial \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\partial K}{\partial \kappa}. \quad (1.34)$$

Esercizio 1.17

Per un oscillatore armonico lineare con massa m e costante elastica k verificare che la trasformazione

$$q = \sqrt{\frac{2A}{m\omega}} \cos \alpha, \quad p = -\sqrt{2m\omega A} \sin \alpha,$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$, produce nuove variabili canoniche α e A .

Esercizio 1.18

Delle nuove variabili α e A dell'Esercizio precedente, quale è la coordinata lagrangiana e quale il momento coniugato? Quali sono le dimensioni di A ? Costruire la nuova hamiltoniana e scrivere le nuove equazioni del moto.

Esercizio 1.19

Estendere al caso tridimensionale isotropo la trasformazione dell'Esercizio 1.17 e calcolare le parentesi di Poisson tra le componenti cartesiane del momento angolare \mathbf{L} espresse in funzione delle nuove variabili canoniche. Verificare che \mathbf{L} si conserva.

Esempio 1.1

Come risultato degli Esercizi 1.17 e 1.18, l'energia totale E di un oscillatore armonico lineare può scriversi in termini della variabile d'azione A :

$$E = \omega A, \quad (1.35)$$

dove la pulsazione ω è 2π volte la frequenza ν di oscillazione. È notevole il fatto che l'azione A si mantiene costante non solo per il singolo moto di energia E , ma anche quando, per un'azione esterna, ω varia in modo infinitamente lento. Perciò il rapporto

$$\frac{E}{\nu} = \text{costante} \quad (1.36)$$

viene detto *invariante adiabatico* del sistema.

Si può dimostrare in modo generale che l'invariante adiabatico si presenta per una qualsiasi hamiltoniana che dia origine a un moto risultante periodico²⁸. Qui si può ritrovare questo risultato nel caso di un pendolo semplice su cui viene fatto del lavoro per accorciare il filo, variandone corrispondentemente la frequenza di oscillazione²⁹.

La legge del moto del pendolo semplice, di lunghezza L e massa m ,

$$-mg \sin \theta = mL\ddot{\theta},$$

per piccole oscillazioni fornisce

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi),$$

dove θ è l'angolo di oscillazione rispetto alla verticale e θ_0 il suo valore massimo;

$$\omega \equiv 2\pi\nu = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

e g è l'accelerazione di gravità. L'energia di oscillazione è

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 L^2 \theta_0^2 = \frac{1}{2}mgL\theta_0^2.$$

Se il filo viene sottoposto a trazione con tensione τ , è necessario studiare anche l'equazione che regola la parte del moto longitudinale rispetto al filo,

$$\tau - mg \cos \theta = mL\dot{\theta}^2,$$

che per piccole oscillazioni diventa

$$\begin{aligned} \tau &\simeq mg(1 - \frac{1}{2}\theta^2) + mL\dot{\theta}^2 \\ &= mg - mg\theta_0^2 \left[\frac{1}{2} \cos^2(\omega t + \phi) - \sin^2(\omega t + \phi) \right]. \end{aligned}$$

²⁸ Il concetto di invariante adiabatico è stato introdotto da Boltzmann. Per una discussione sulla sua validità, si veda, ad esempio, il testo di Sin-Itiro Tomonaga (1906–1979): *Quantum Mechanics*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1962, vol.1, app. VI.

²⁹ John William Strutt (Baron Rayleigh, 1842–1919): *On the pressure of vibrations [La pressione delle vibrazioni]*, Philosophical Magazine 3 (1902) 338–346.

Se la trazione del filo è lenta rispetto al periodo di oscillazione, interessa la media temporale di τ , cioè

$$\bar{\tau} = mg + \frac{1}{4}mg\theta_0^2.$$

Allora il lavoro fatto sul pendolo per accorciare il filo di δL è

$$\begin{aligned}\delta W &= -\bar{\tau}\delta L \\ &= -mg\delta L - \frac{1}{4}mg\theta_0^2\delta L.\end{aligned}$$

Il primo termine rappresenta l'incremento di energia gravitazionale del pendolo, a seguito dell'accorciamento del filo che innalza la posizione a riposo della massa m ; il secondo termine è l'incremento δE dell'energia di oscillazione. Si ha

$$\frac{\delta E}{E} = -\frac{1}{2}\frac{\delta L}{L}.$$

La variazione (negativa) di δL provoca però anche una variazione di ω e quindi di frequenza di oscillazione:

$$\begin{aligned}\delta\omega &= 2\pi\delta\nu = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{\delta L}{L} \\ &= -\frac{1}{2}2\pi\nu\frac{\delta L}{L}.\end{aligned}$$

Pertanto risulta

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\delta\nu}{\nu},$$

da cui segue la (1.36).

A seconda di come si raggruppano le $4f$ variabili canoniche (q, p, κ, π) e di quali si scelgano quale punto di partenza, si possono definire quattro tipi di *funzioni generatrici* di trasformazioni canoniche:

$$F_1(q, \kappa, t), \quad F_2(q, \pi, t), \quad F_3(p, \kappa, t), \quad F_4(p, \pi, t). \quad (1.37)$$

A seguito dell'applicazione della trasformazione canonica, la lagrangiana

$$\mathcal{L} = p\dot{q} - H \quad (1.38)$$

si trasforma nella lagrangiana

$$\mathcal{L}' = \pi\dot{\kappa} - K. \quad (1.39)$$

Se la trasformazione è canonica, \mathcal{L} e \mathcal{L}' devono essere legate dalla condizione (1.7), che risulta una condizione sulla funzione generatrice F . Si scelga ad esempio $F = F_1(q, \kappa, t)$; allora

$$\begin{aligned} p\dot{q} - H &= \pi\dot{\kappa} - K + \frac{dF_1}{dt} \\ &= \pi\dot{\kappa} - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F_1}{\partial \kappa}\dot{\kappa}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Siccome q e κ sono tra di loro indipendenti, l'equazione può valere solo se si annullano separatamente i coefficienti di \dot{q} e $\dot{\kappa}$, cioè

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad \pi = -\frac{\partial F_1}{\partial \kappa}. \quad (1.41)$$

Perciò risulta

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (1.42)$$

Partendo invece dalle variabili q e π conviene utilizzare F_2 . La seconda delle (1.41) suggerisce che F_2 si possa esprimere in termini di F_1 :

$$F_2(q, \pi, t) = F_1(q, \kappa, t) + \kappa \pi. \quad (1.43)$$

Allora, riscrivendo la (1.40) con la F_1 ricavata dalla (1.43), si ottiene in modo simile

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad \kappa = \frac{\partial F_2}{\partial \pi}. \quad (1.44)$$

Con lo stesso procedimento, partendo da p e κ con F_3 , si ottiene

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, \quad \pi = -\frac{\partial F_3}{\partial \kappa}; \quad (1.45)$$

partendo da p e π con F_4 si ottiene

$$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \quad \kappa = \frac{\partial F_4}{\partial \pi}. \quad (1.46)$$

In ogni caso risulta sempre

$$K = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (1.47)$$

dove F è la funzione generatrice prescelta per la trasformazione canonica.

Esercizio 1.20

Costruire la trasformazione canonica che permette di passare dalle coordinate canoniche q e p alle nuove coordinate canoniche α e A per l'oscillatore armonico lineare dell'Esercizio 1.17.

Con una scelta opportuna della funzione generatrice si riesce talvolta a eliminare la dipendenza della hamiltoniana da una o più coordinate lagrangiane. Per le (1.34), i corrispondenti momenti coniugati sono costanti del moto e quindi integrali primi del sistema. Si supponga che queste coordinate lagrangiane abbiano derivata temporale costante. Relativamente a queste coordinate lagrangiane, il moto risulta allora periodico, con pulsazione pari alla loro derivata temporale costante. Un esempio di queste coordinate lagrangiane e dei loro momenti coniugati è dato dalla variabile angolare α e dalla variabile d'azione A dell'Esercizio 1.17, in cui il moto periodico dell'oscillatore armonico è caratterizzato dalla pulsazione ω . Per analogia, in generale si chiamano *variabili angolari* le coordinate lagrangiane che non entrano nell'espressione della hamiltoniana e *variabili d'azione* i corrispondenti momenti coniugati costanti.

Un sistema con f gradi di libertà è detto *integrabile* se possiede f integrali primi indipendenti. In tal caso esiste sempre una trasformazione canonica che permette di passare dalle coordinate canoniche (q, p) alle coordinate (canoniche) angolari e d'azione (α, A) , in modo che la hamiltoniana $H(q, p)$ si trasformi nella hamiltoniana $K(A)$, indipendente dalle α , e le equazioni del moto siano date dalle relazioni

$$\dot{A} = 0, \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial K}{\partial A} \equiv \omega(A). \quad (1.48)$$

Per un sistema integrabile allora la risoluzione delle equazioni del moto è riconducibile alla determinazione delle f pulsazioni che intervengono nella dipendenza lineare dal tempo delle variabili angolari. Le condizioni iniziali fissano i valori iniziali delle variabili angolari e i valori costanti delle variabili d'azione.

È possibile dimostrare³⁰ che condizione necessaria e sufficiente perché un sistema con f gradi di libertà sia integrabile è che gli $f - 1$ integrali primi indipendenti A_1, A_2, \dots, A_{f-1} abbiano parentesi di Poisson nulle tra di loro, oltre che con la hamiltoniana H :

$$\{A_i, A_j\} = \{A_i, H\} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, f - 1. \quad (1.49)$$

In tal caso si dice che le $f - 1$ variabili dinamiche A_i sono *in involuzione* tra di loro e con la hamiltoniana H .

Esercizio 1.21

Individuare gli integrali primi per il moto della particella dell'Esercizio 1.2 e mostrare che il sistema è integrabile.

Una trasformazione canonica particolare è la *trasformazione identità*:

$$\begin{cases} \kappa = q, \\ p = \pi. \end{cases} \quad (1.50)$$

³⁰ G. Gallavotti, *loc. cit.* (n. 22 p. 4).

Essa si realizza scegliendo la seguente funzione generatrice:

$$F_2(q, \pi, t) = q\pi. \quad (1.51)$$

Tale scelta rispetta la condizione necessaria per l'invertibilità della trasformazione:

$$\det \frac{\partial^2 F_2}{\partial q \partial \pi} \neq 0. \quad (1.52)$$

Un ruolo importante hanno le *trasformazioni canoniche infinitesimali*. Esse si possono ottenere a partire dalla trasformazione identità mediante la seguente funzione generatrice:

$$F = q\pi - \epsilon G(q, \pi, t), \quad (1.53)$$

con ϵ infinitesimo. Allora si ottiene

$$\begin{cases} \kappa = \frac{\partial F}{\partial \pi} = q - \epsilon \frac{\partial G(q, \pi, t)}{\partial \pi} = q - \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial p} + O(\epsilon^2), \\ p = \frac{\partial F}{\partial q} = \pi - \epsilon \frac{\partial G(q, \pi, t)}{\partial q} = \pi - \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial q} + O(\epsilon^2). \end{cases} \quad (1.54)$$

Ne segue

$$K = H - \epsilon \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (1.55)$$

Può essere interessante considerare trasformazioni canoniche che lascino la hamiltoniana *invariante in forma*, tali cioè che K abbia la stessa dipendenza da (κ, π) che H ha da (q, p) . Queste trasformazioni riflettono l'esistenza di simmetrie del sistema fisico in esame e l'impossibilità di distinguere la descrizione fatta con le coordinate (q, p) da quella fatta con le coordinate (κ, π) . La funzione generatrice G rappresenta il *generatore* dell'operazione di simmetria associata alla trasformazione (1.54). Si può dimostrare³¹ che condizione necessaria e sufficiente perché H rimanga invariante in forma è che sia

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H\} = 0, \quad (1.56)$$

cioè che la funzione generatrice della trasformazione infinitesimale sia una costante del moto.

Se la trasformazione non dipende esplicitamente dal tempo, è

$$\{G, H\} = 0, \quad (1.57)$$

³¹ Si veda ad esempio: H. Goldstein, *loc. cit.* (n. 22 p. 4).

cioè il generatore G è un integrale primo. Viceversa, se vale la (1.57), nell'espressione della hamiltoniana H compare la variabile d'azione G e non la corrispondente variabile angolare su cui opera la trasformazione infinitesimale generata da G . Pertanto ogni variabile angolare, per la quale sia possibile stabilire una legge di trasformazione in accordo con la simmetria del sistema, ha associata una variabile d'azione che si conserva durante il moto.

Esercizio 1.22

Se non dipende esplicitamente dal tempo, la hamiltoniana H è ovviamente una costante del moto. Ponendo $\epsilon = -dt$, mostrare che H è il generatore delle traslazioni temporali.

Esercizio 1.23

Se H non dipende da x , ponendo $\epsilon = -dx$, mostrare che la funzione $G = p_x$ è il generatore di una traslazione lungo l'asse x e che p_x si conserva.

Esercizio 1.24

Se H non dipende dall'angolo di rotazione ϕ (in senso antiorario) intorno all'asse z , ponendo $\epsilon = d\phi$, mostrare che la funzione $G = L_z$ è il generatore di una rotazione intorno all'asse z e che L_z si conserva.

Un altro modo elegante di risolvere le equazioni del moto è quello di utilizzare una trasformazione canonica che faccia passare dalle originali variabili canoniche (q, p) a nuove variabili canoniche (κ, π) costanti nel tempo. Ciò si realizza richiedendo per esempio che la nuova hamiltoniana K sia identicamente nulla, perché in questo caso si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \pi} &= \dot{\kappa} = 0, \\ -\frac{\partial K}{\partial \kappa} &= \dot{\pi} = 0. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Siccome $K = H + \partial F / \partial t$, ciò è possibile scegliendo F in modo da soddisfare l'equazione

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{1.59}$$

Conviene scegliere $F = F_2(q, \pi, t)$, con $p = \partial F_2 / \partial q$. In tal modo si ottiene

$$H \left(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{1.60}$$

che è l'equazione di Hamilton-Jacobi ³².

L'equazione di Hamilton-Jacobi si risolve mediante l'integrale di azione (1.2) che va ora considerato in generale tra una configurazione iniziale $q^{(1)}$ all'istante t_1 e un'altra configurazione $q^{(2)}$ all'istante finale t_2 :

$$S(q^{(2)}, q^{(1)}; t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt [p\dot{q} - H(q, p, t)]. \quad (1.61)$$

A tale scopo si valuti il suo differenziale considerando le due seguenti configurazioni estreme:

$$t'_1 = t_1 + dt_1, \quad q'^{(1)} = q^{(1)} + dq^{(1)}, \quad (1.62)$$

$$t'_2 = t_2 + dt_2, \quad q'^{(2)} = q^{(2)} + dq^{(2)}. \quad (1.63)$$

Risulta

$$\begin{aligned} dS &= \int_{t'_1}^{t'_2} dt (p' \dot{q}' - H') - \int_{t_1}^{t_2} dt (p\dot{q} - H) \\ &= [p^{(2)} \dot{q}^{(2)} - H(q^{(2)}, p^{(2)}, t)] dt_2 - [p^{(1)} \dot{q}^{(1)} - H(q^{(1)}, p^{(1)}, t)] dt_1 \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} dt \delta(p\dot{q} - H). \end{aligned}$$

D'altra parte è

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \delta(p\dot{q}) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta p \dot{q} + \int_{t_1}^{t_2} dt p \delta \dot{q} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta p \dot{q} + p^{(2)} \delta q^{(2)} - p^{(1)} \delta q^{(1)} - \int_{t_1}^{t_2} dt \dot{p} \delta q. \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} dS &= [p^{(2)} \dot{q}^{(2)} - H(q^{(2)}, p^{(2)}, t)] dt_2 - [p^{(1)} \dot{q}^{(1)} - H(q^{(1)}, p^{(1)}, t)] dt_1 \\ &\quad + p^{(2)} \delta q^{(2)} - p^{(1)} \delta q^{(1)} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right]. \end{aligned}$$

Tenendo conto delle relazioni

³² Karl Gustav Jacobi (1804–1851): *Vorlesungen über Dynamik*, 1843 [*Lezioni sulla dinamica*, pubblicate postume da Alfred Clebsch (1833–1872), Reiner, Berlino, 1866].

$$\delta q^{(2)} \equiv q'(t_2) - q(t_2) = q^{(2)} - \dot{q}^{(2)} dt_2 - q^{(2)} = dq^{(2)} - \dot{q} dt_2,$$

$$\delta q^{(1)} = dq^{(1)} - \dot{q} dt_1$$

e delle equazioni del moto (1.11), si ottiene infine

$$dS = p^{(2)} dq^{(2)} - H^{(2)} dt_2 - p^{(1)} dq^{(1)} + H^{(1)} dt_1, \quad (1.64)$$

che è un differenziale esatto. Pertanto

$$p^{(1)} = -\frac{\partial S}{\partial q^{(1)}}, \quad p^{(2)} = \frac{\partial S}{\partial q^{(2)}}, \quad (1.65)$$

$$H^{(1)} = \frac{\partial S}{\partial t_1}, \quad H^{(2)} = -\frac{\partial S}{\partial t_2}. \quad (1.66)$$

Le (1.65) mostrano che l'azione S data dalla (1.61) è una particolare funzione generatrice (del tipo F_1) di una trasformazione canonica. Con la seconda delle (1.65) la seconda delle (1.66) è un'equazione di Hamilton-Jacobi per la S , intendendo per $(q^{(2)}, p^{(2)}, t_2)$ le variabili (q, p, t) generiche da cui dipende la S e per $(q^{(1)}, p^{(1)})$ le costanti arbitrarie relative all'istante iniziale t_1 .

Esercizio 1.25

Costruire l'equazione di Hamilton-Jacobi per l'oscillatore armonico lineare e determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica che la soddisfa.

Se H non dipende esplicitamente dal tempo,

$$\delta H(q(t), p(t)) = 0, \quad (1.67)$$

per lo studio del moto si può utilizzare una variante del metodo variazionale applicato all'integrale d'azione (1.2), basata su *variazioni asincrone* che rispettano le configurazioni estreme *a fissata energia*³³. Scegliendo infatti

$$t'_1 = t_1, \quad t'_2 = t_2 + dt_2, \quad (1.68)$$

il rispetto delle condizioni estreme ($dq^{(1)} = dq^{(2)} = 0$) permette di dedurre dalla (1.64) che per il moto reale è

$$\delta S = -H^{(2)} dt_2. \quad (1.69)$$

³³ Questo metodo fu proposto da Pierre-Louis de Maupertuis (1698–1759) nel 1744 ed è esposto nel secondo volume delle sue opere (*Œuvres*, Lione, 1756). Successivamente il metodo fu ripreso da Leonhard Euler (1707–1783) e da Giuseppe Luigi Lagrange (1736–1813).

D'altra parte per la (1.67) e la (1.68) è anche

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt H(q(t), p(t)) = H^{(2)} dt_2. \quad (1.70)$$

Il confronto di (1.69) con (1.70) implica

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt p\dot{q} = 0, \quad (1.71)$$

che esprime il *principio di minima azione nella forma di Maupertuis*.

Per una forma quadratica dell'energia cinetica T del tipo

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2, \quad (1.72)$$

si può sostituire

$$p\dot{q} = 2T.$$

Allora in tal caso il principio di minima azione di Maupertuis è espresso dalla condizione

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt T = 0. \quad (1.73)$$

Esercizio 1.26

Applicare il principio di minima azione di Maupertuis a una particella libera descritta da un solo grado di libertà.

Si può utilizzare questo principio per determinare la traiettoria descritta da una particella di impulso p che si muove nello spazio ordinario dal punto 1 al punto 2. Indicando con ds l'elemento di traiettoria che collega il punto 1 al punto 2 la (1.71) può risciversi

$$\delta \int_1^2 p ds = 0. \quad (1.74)$$

Questa condizione di estremo permette di individuare, tra le infinite possibili traiettorie da 1 a 2, quella che effettivamente viene descritta dalla particella mantenendo la sua energia costante al valore prefissato E . In presenza di potenziale V la (1.74) diventa

$$\delta \int_1^2 ds \sqrt{E - V} = 0. \quad (1.75)$$

In questa forma, il principio di Maupertuis acquista un'interpretazione geometrica. La traiettoria descritta dalla particella viene individuata dalla geodetica che collega il punto 1 al punto 2 sulla superficie a E costante. Su tale superficie la metrica $ds^2(E - V)$ è definita positiva ed è funzione del punto in virtù della dipendenza spaziale del potenziale V .

È bene richiamare l'attenzione sul fatto che il metodo variazionale nella forma di Hamilton utilizza variazioni sincrone che rispettano le configurazioni estreme e produce le equazioni del moto di Lagrange che sono equazioni differenziali di secondo ordine nel tempo. Invece il metodo variazionale nella forma di Maupertuis è basato su variazioni asincrone a fissata energia e quindi contiene già in sé gli effetti di un integrale primo delle equazioni del moto: di conseguenza il metodo di Maupertuis può solo determinare la traiettoria descritta durante il moto.

Esercizio 1.27

Trascurando la resistenza dell'aria, determinare la traiettoria descritta da un grave lanciato verso l'alto con inclinazione θ rispetto al piano orizzontale sulla superficie terrestre.

1.2. Macrofisica

La termodinamica studia le proprietà macroscopiche di un corpo esteso e i processi che esso subisce in seguito a scambi di energia e di materia con il resto del mondo fisico. In generale, nonostante l'elevato numero di particelle che lo costituiscono, il sistema può essere adeguatamente descritto mediante pochi parametri che ne caratterizzano lo stato interno e che sono chiamati *variabili di stato*. Esempi di variabili di stato sono la temperatura T , la pressione p , il volume V , l'energia interna E , l'entropia S , il numero N_i di particelle della specie i -esima che compongono il sistema.

Le variabili di stato indipendenti definiscono i gradi di libertà termodinamici del sistema e, attraverso le leggi della termodinamica, fissano tutte le altre funzioni di stato. Per lo stesso sistema le variabili di stato indipendenti possono essere diverse a seconda del tipo di processo in esame e dei vincoli che sono imposti dall'esterno.

Se il numero di particelle è fissato e l'energia si mantiene costante, il sistema è *isolato* dal resto dell'universo. Un sistema invece viene detto *chiuso* se può scambiare energia, ma non materia con l'esterno, e viene detto *aperto* nel caso più generale in cui siano consentiti scambi sia di energia, sia di materia. In ogni caso, dopo un tempo sufficientemente lungo durante il quale i vincoli esterni non vengono modificati, ogni sistema raggiunge uno stato stazionario di equilibrio, in cui le sue variabili indipendenti rimangono costanti nel tempo e omogenee su tutto il sistema, fino a quando non si alterano le condizioni esterne. Per esempio, per un sistema descritto dalle variabili p, V, T , le variabili indipendenti sono due, in quanto sussiste un'equazione del tipo

$$f(p, V, T) = 0, \quad (2.1)$$

detta *equazione di stato*, che permette di conoscere lo stato termodinamico di equilibrio del sistema.

Esercizio 2.1

L'equazione di stato dei gas perfetti, gas costituiti idealmente da molecole puntiformi non interagenti, è

$$pV = nRT, \quad (2.2)$$

dove n è il numero di moli ³⁴ e $R = 8.314 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ è la costante dei gas perfetti. Individuare possibili variabili di stato indipendenti per trasformazioni isocore ($V = \text{costante}$), isoterme ($T = \text{costante}$) e isobariche ($p = \text{costante}$).

Il fatto sperimentale che due corpi, posti a contatto, raggiungano uno stato comune di equilibrio termodinamico alla stessa temperatura T è alla base del *principio zeresimo* della termodinamica, secondo il quale due corpi, ciascuno dei quali è in equilibrio termodinamico con un terzo corpo, sono in equilibrio termodinamico anche tra di loro. Questo principio giustifica la costruzione del termometro e la possibilità di misurare la temperatura di un corpo.

La conservazione dell'energia è il contenuto del *primo principio* della termodinamica, che estende agli scambi di calore il teorema di conservazione dell'energia meccanica. Indicando con dE la variazione di energia interna, con dQ la quantità di calore ricevuta dal sistema, con dW il lavoro meccanico eseguito dal sistema e con dN_i la variazione del numero di particelle della specie i -esima, in accordo col primo principio della termodinamica il bilancio energetico del sistema fornisce la relazione generale

$$dE = dQ - dW + \sum_i \mu_i dN_i, \quad (2.3)$$

dove μ_i è il cosiddetto *potenziale chimico* della specie i -esima e rappresenta il tasso energetico richiesto per la variazione di composizione indotta da dN_i .

Con analogia meccanica, il lavoro dW può essere espresso anche in termodinamica mediante il prodotto tra una forza generalizzata Y e uno spostamento dX dovuto alla variazione di uno dei parametri del sistema associato alle sue dimensioni (gradi di libertà microscopici e estensione spaziale). Le variabili di tipo X , come il volume V , la magnetizzazione M e la polarizzazione elettrica P , vengono dette

³⁴ Una mole di gas contiene sempre un numero di molecole pari a $N = 6.022\,136\,7(36) \times 10^{23}$. È questo il numero di Avogadro, così chiamato in omaggio ad Amadeo Avogadro (1776–1856) che nel 1811 riconobbe che volumi uguali di gas, nelle stesse condizioni di temperatura e pressione, contengono un ugual numero di molecole.

variabili estensive; invece le variabili di tipo Y , come la pressione p , il campo magnetico \mathbf{B} e il campo elettrico \mathbf{E} , che definiscono l'intensità delle forze generalizzate, sono dette *variabili intensive*. Perciò, per esempio, si ha

$$dW = p dV - \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} - \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M}, \quad (2.4)$$

e in generale ³⁵

$$dW = -Y dX. \quad (2.5)$$

Esercizio 2.2

Scrivere la relazione del primo principio della termodinamica per un sistema omogeneo isolato termicamente e per un sistema chiuso.

Esercizio 2.3

Definiti il calore specifico a pressione costante,

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p, \quad (2.6)$$

e il calore specifico a volume costante,

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V, \quad (2.7)$$

discutere le condizioni per cui è $C_p > C_V$ per un sistema termodinamico omogeneo, descritto dalle variabili di stato indipendenti p e V .

Esercizio 2.4

Per un gas perfetto l'energia interna E dipende solo dalla temperatura e C_V è costante. Dimostrare che per n moli di gas perfetto è

$$E = n C_V (T - T_0), \quad (2.8)$$

dove T_0 è una temperatura di riferimento.

³⁵ Si conviene che la variabile estensiva X aumenti con la forza applicata Y . Eccezione a questa regola si verifica solo nel caso della pressione: aumentando la pressione *applicata*, il volume del sistema diminuisce. Coerentemente, nella (2.4) p rappresenta la pressione *interna* del sistema, cioè la pressione esercitata dal sistema sull'ambiente circostante.

Esercizio 2.5

Mostrare che per una mole di gas perfetto vale la *relazione di Mayer*:

$$C_p = C_V + R. \quad (2.9)$$

Le trasformazioni da uno stato di equilibrio termodinamico iniziale a un altro finale sono distinguibili in due categorie: *reversibili* e *irreversibili*. È possibile che tutti gli stati intermedi del sistema differiscano infinitamente di poco da una situazione di equilibrio termodinamico. Nella realizzazione di un processo di questo tipo occorre che le variabili di stato cambino molto lentamente a causa dell'azione esterna, in modo da permetterne un continuo riequilibrio all'interno del sistema. Queste trasformazioni sono perciò dette *quasi-statiche* e sono di difficile attuazione; se però non sono accompagnate da effetti dissipativi, queste trasformazioni possono essere invertite, col risultato di raggiungere di nuovo lo stato iniziale di partenza senza produrre alcun cambiamento nel resto dell'universo. Perciò in tal caso vengono chiamate trasformazioni reversibili.

Invece la maggior parte dei processi in natura è di tipo irreversibile, con trasformazioni che avvengono spontaneamente attraverso stati intermedi non riproducibili e lontani dalla condizione di equilibrio termodinamico, anche se poi il risultato finale è ancora uno stato di equilibrio. Mentre il tempo è un parametro che non gioca un ruolo particolare nei processi reversibili, che sono invarianti per riflessioni temporali³⁶, si può dire che il senso del tempo acquista significato proprio in virtù dell'esistenza dei processi irreversibili e del secondo principio della termodinamica.

Il *secondo principio* della termodinamica stabilisce l'impossibilità di totale conversione dell'energia interna del sistema in lavoro meccanico verso l'esterno. Ciò è conseguenza di uno stato di disordine interno che impedisce la necessaria coerenza d'azione di tutte le particelle del sistema per compiere lavoro.

Per caratterizzare questo stato di disordine è conveniente introdurre l'*entropia* S , che è una funzione di stato e il cui differenziale è perciò un differenziale esatto. Allora un'espressione del secondo principio della termodinamica consiste nella *diseguaglianza di Clausius*,

$$dS \geq \frac{dQ}{T}, \quad (2.10)$$

valida per trasformazioni infinitesime che coinvolgono scambi di calore dQ alla temperatura T . Il segno di uguale nella (2.10) si verifica esclusivamente nel caso in cui la trasformazione sia reversibile. Se il sistema è isolato termicamente, $dQ = 0$. Allora

$$dS \geq 0, \quad (2.11)$$

³⁶ Invertendo il senso del tempo il processo si inverte ripercorrendo a rovescio la sua storia, così come invariante per inversioni temporali è tutta la meccanica analitica.

e acquista senso l'affermazione di Clausius³⁷ che l'entropia dell'universo non può che aumentare: la situazione di entropia massima corrisponde all'equilibrio termodinamico di un sistema isolato.

Combinando il primo e il secondo principio della termodinamica (equazioni (2.3), (2.5) e (2.10)), per trasformazioni reversibili si trova

$$T dS = dE - Y dX - \sum_i \mu_i dN_i, \quad (2.12)$$

da cui si ricavano le seguenti relazioni:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{X, N_i} = \frac{1}{T}, \quad (2.13)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X} \right)_{E, N_i} = -\frac{Y}{T}, \quad (2.14)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N_j} \right)_{E, X, N_{i \neq j}} = -\frac{\mu_j}{T}, \quad (2.15)$$

che rappresentano *equazioni di stato* per il sistema termodinamico. Esse determinano il comportamento del sistema sottoposto a trasformazioni reversibili. La loro forma esplicita dipende dall'espressione dell'entropia.

Esercizio 2.6

Riscrivere la (2.12) per n moli di gas perfetto.

Esercizio 2.7

Partendo dalla (2.12), ricavare la seguente espressione per l'entropia di n moli di gas perfetto:

$$S = n C_v \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + n R \ln \left(\frac{V}{V_0} \right), \quad (2.16)$$

dove T_0, V_0 sono la temperatura e il volume di uno stato di riferimento.

³⁷ R. Clausius: *Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie* [Varie forme di equazioni fondamentali della teoria meccanica del calore convenienti per le applicazioni], *Annalen der Physik* **125** (1865) 353–400.

La scelta del nome "entropia" è stata fatta da Clausius in modo improprio, riprendendo il vocabolo greco $\epsilon\nu\tau\rho\pi\eta$ che significa "trasformazione".

Esercizio 2.8

Per un sistema termodinamico descritto dalle variabili di stato indipendenti p e V , mostrare che vale la relazione

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p. \quad (2.17)$$

L'entropia è una funzione di stato che, oltre ad essere una variabile estensiva, è anche una quantità additiva: l'entropia dell'intero sistema è la somma delle entropie dei singoli sottoinsiemi indipendenti che compongono il sistema totale. Da un punto di vista matematico questa proprietà si traduce nel fatto che l'entropia $S = S(E, X, N_i)$ è una funzione omogenea del primo ordine nelle variabili estensive del sistema:

$$S(\lambda E, \lambda X, \lambda N_i) = \lambda S(E, X, N_i).$$

Perciò

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda S) = S = \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda E}\right)_{X, N_i} E + \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda X}\right)_{E, N_i} X + \sum_j \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda N_j}\right)_{E, X, N_{i \neq j}} N_j.$$

Tenendo conto delle (2.13) – (2.15), si ottiene quindi

$$S = \frac{E}{T} - \frac{YX}{T} - \sum_i \frac{\mu_i N_i}{T}, \quad (2.18)$$

che è l'*equazione fondamentale della termodinamica*. La (2.18) contiene tutte le informazioni termodinamiche possibili sul sistema. Una volta nota l'entropia, le equazioni di stato (2.13) – (2.15) completano la descrizione del sistema nell'ambito della *termodinamica degli stati di equilibrio*.

Ogni altra funzione di stato, utile nello studio del sistema termodinamico, è ottenibile in funzione delle variabili estensive E , X , N_i e dell'entropia S . Per esempio, si definiscono l'*entalpia*³⁸,

$$H = E + pV, \quad (2.19)$$

l'*energia libera (di Helmholtz)*,

$$F = E - TS, \quad (2.20)$$

e l'*energia libera (di Gibbs)*,

³⁸ Purtroppo lo stesso simbolo H viene usato in meccanica analitica per la hamiltoniana e in termodinamica per l'entalpia.

$$G = E - TS - YX. \quad (2.21)$$

Esercizio 2.9

Per un sistema termodinamico descritto dalle variabili di stato indipendenti p e V , mostrare che le variazioni infinitesime di energia interna, di entalpia, di energia libera di Helmholtz e di energia libera di Gibbs sono date dai seguenti differenziali esatti:

$$dE = TdS - pdV, \quad (2.22)$$

$$dH = TdS + Vdp, \quad (2.23)$$

$$dF = -pdV - SdT, \quad (2.24)$$

$$dG = Vdp - SdT. \quad (2.25)$$

Esercizio 2.10

Dai risultati (2.22) – (2.25) dedurre le seguenti relazioni:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V, \quad (2.26)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p, \quad (2.27)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T, \quad (2.28)$$

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T, \quad (2.29)$$

che sono dette *equazioni di Maxwell*, valide per ogni stato di equilibrio termodinamico di un sistema descritto dalle variabili p , V e T .

Esercizio 2.11

Per lo stesso sistema dell'Esercizio 2.9 dedurre la relazione

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p. \quad (2.30)$$

Per un sistema omogeneo, combinando primo e secondo principio della termodinamica (equazioni (2.3) e (2.10)) si trova un limite superiore al lavoro meccanico

che il sistema può compiere:

$$dW \leq TdS - dE. \quad (2.31)$$

Se il sistema è in equilibrio termico con l'ambiente, questo lavoro deriva dall'energia che il sistema, secondo la (2.20), possiede sotto forma di energia libera (di Helmholtz):

$$dW \leq -dF. \quad (2.32)$$

Non tutta l'energia interna E è dunque convertibile in lavoro meccanico, ma solo quella frazione, $F = E - TS$, depurata del termine entropico che dà una misura del grado di disordine all'interno del sistema.

Se il sistema, oltre che in equilibrio termico con l'ambiente, è anche isolato meccanicamente ($dW = 0$), dalla (2.32) segue

$$dF \leq 0, \quad (2.33)$$

che è una condizione di equilibrio termodinamico: il sistema evolve verso la situazione di energia libera minima. Perciò l'energia libera in questo caso gioca il ruolo di un *potenziale termodinamico*³⁹, analogo al potenziale meccanico i cui valori estremi definiscono una situazione di equilibrio meccanico.

Anche l'energia libera (di Gibbs) è un potenziale termodinamico. Per trasformazioni in equilibrio termico con l'ambiente, che avvengano a $Y = \text{costante}$, risulta

$$dG \leq 0. \quad (2.34)$$

Esempio 2.1

Si vuole determinare la configurazione di equilibrio termodinamico per due gas perfetti posti in equilibrio termico con l'ambiente, rispettivamente nei volumi V_1 e V_2 , separati da una parete mobile all'interno del volume costante $V = V_1 + V_2$. Il sistema complessivo è isolato meccanicamente: lo spostamento della parete che separa i due volumi non è responsabile di lavoro meccanico esterno. Perciò si può applicare la (2.33), con F pari alla somma delle energie libere dei due gas:

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 \\ &= E_1 - TS_1 + E_2 - TS_2. \end{aligned}$$

Derivando rispetto a V_1 (oppure a V_2) e uguagliando la derivata a zero, si ha una condizione necessaria per l'esistenza di un minimo di F . Ricordando le espressioni (2.16) per l'entropia e (2.8) per l'energia interna del gas perfetto, si ottiene

$$\frac{1}{T} \frac{dF}{dV_1} = -n_1 R \frac{1}{V_1} - n_2 R \left(-\frac{1}{V - V_1} \right) = 0,$$

cioè:

³⁹ Lo stesso ruolo è assunto dall'entropia per i sistemi isolati, eq. (2.11).

$$\frac{n_1}{V_1} = \frac{n_2}{V_2}. \quad (2.35)$$

Le concentrazioni molari dei due gas in equilibrio sono uguali nei due volumi V_1 e V_2 : di conseguenza anche le pressioni esercitate dai due gas sulla parete mobile sono uguali e la parete si sistema in modo da separare V_1 e V_2 in accordo con la (2.35).

L'ipotesi atomistica della struttura della materia permette di considerare un corpo esteso macroscopico come costituito da numerose particelle, a ciascuna delle quali si applicano i metodi della meccanica analitica per studiarne il moto. Le proprietà macroscopiche del corpo derivano in linea di principio dalla risoluzione del sistema di equazioni che determinano il moto microscopico. Però, anche supponendo di conoscere le forze reciproche tra le particelle e utilizzando i più sofisticati elaboratori elettronici, il problema in pratica diventa rapidamente insolubile con l'aumentare del numero di particelle. D'altra parte, non appare neppure utile conoscere istante per istante posizione e velocità di ogni singola particella quando sperimentalmente si ha accesso solo a pochi parametri macroscopici quali, ad esempio, temperatura, pressione, conducibilità elettrica, stato di magnetizzazione, concentrazione, ecc.

Tuttavia, se l'ipotesi atomistica è fondata, deve essere possibile stabilire una connessione tra descrizione microscopica e descrizione macroscopica quale risultato di un processo di media sulle informazioni microscopiche relative al moto individuale delle singole particelle. È questo il programma della meccanica statistica avviato da Maxwell e Boltzmann ⁴⁰.

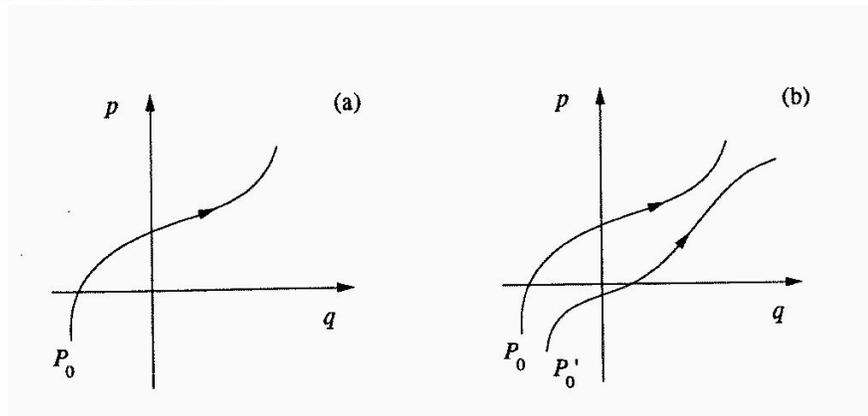


Fig. 2.1. (a) Assegnate le condizioni iniziali mediante le coordinate (q, p) del punto P_0 , le equazioni del moto determinano univocamente la traiettoria nello spazio delle fasi percorsa dal punto rappresentativo del sistema. (b) A condizioni iniziali distinte corrispondono traiettorie distinte che non si intersecano nello spazio delle fasi.

⁴⁰ Per una trattazione della meccanica statistica in riferimento anche alla termodinamica di non equilibrio, si vedano i testi di Radu Balescu: *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, J. Wiley & Sons, New York, 1975, e di L.E. Reichl: *A Modern Course in Statistical Physics*, Edward Arnold Publ. (GB), 1980.

L'atto di moto di un sistema di particelle, descritto da $2f$ variabili canoniche (q, p) , può essere visualizzato assegnando le coordinate (q, p) di un punto rappresentativo del sistema in un opportuno spazio, detto *spazio delle fasi*, a $2f$ dimensioni. Istante per istante, la risoluzione delle equazioni del moto fornisce i valori (q, p) che costituiscono le coordinate del punto rappresentativo nello spazio delle fasi. Al moto del sistema corrisponde dunque una traiettoria nello spazio delle fasi percorsa dal punto rappresentativo. Siccome il moto è univocamente determinato dalle condizioni iniziali, non c'è possibilità di incrocio nello spazio delle fasi per due traiettorie corrispondenti a moti distinti (fig. 2.1).

Esercizio 2.12

Determinare la traiettoria descritta nello spazio delle fasi dal punto che rappresenta il moto di un oscillatore armonico lineare. Che cosa rappresenta l'area racchiusa dalla traiettoria dopo un periodo di oscillazione?

Esercizio 2.13

Se nell'Esercizio precedente si usano variabili d'angolo e d'azione, come risulta la traiettoria descritta dal punto rappresentativo?

Esercizio 2.14

Come può essere determinata la traiettoria del punto rappresentativo nello spazio delle fasi nel caso di un sistema integrabile?

Esercizio 2.15

Studiare la traiettoria descritta nello spazio delle fasi dal punto rappresentativo corrispondente al seguente sistema:

$$\dot{p} = \omega_1, \quad \dot{q} = \omega_2,$$

con le limitazioni

$$0 < p < 1, \quad 0 < q < 1.$$

Discutere le soluzioni ottenute quando il rapporto ω_1/ω_2 è un numero razionale oppure è un numero irrazionale.

Se la risoluzione delle equazioni del moto non è esatta o comunque la conoscenza di (q, p) è solo approssimata, non si riesce ad individuare con assoluta precisione la posizione del punto rappresentativo nello spazio delle fasi (fig. 2.2): si può solo parlare della *probabilità* di trovare tale punto rappresentativo all'interno di un dato volumetto dello spazio delle fasi. Alternativamente, volendo descrivere solo lo stato macroscopico di un sistema, senza specificare completamente una delle particolari configurazioni dinamiche microscopiche corrispondenti, si può considerare simul-

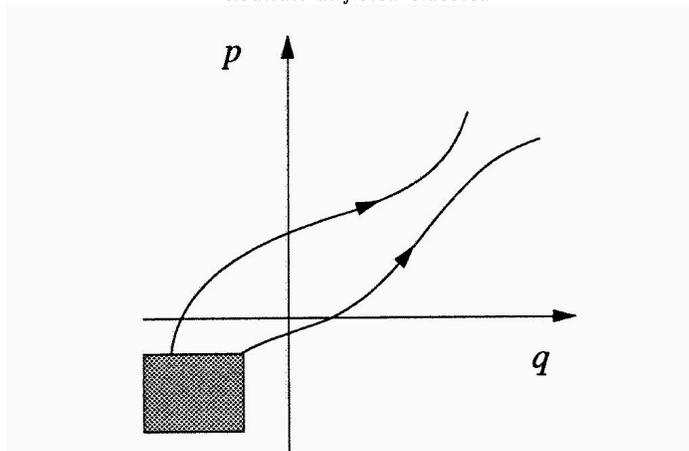


Fig. 2.2. La conoscenza approssimata delle coordinate (q, p) a un certo istante non permette di prevedere quale traiettoria nello spazio delle fasi viene poi percorsa dal punto che rappresenta il sistema.

taneamente un numero grandissimo di repliche dello stesso sistema fisico, in modo da includere ogni combinazione concepibile di configurazioni e di velocità corrispondente allo stesso stato termodinamico⁴¹. L'insieme dei punti rappresentativi di queste repliche si distribuisce nello spazio delle fasi addensandosi o sparpagliandosi a seconda di quanto precisamente vengono definite le condizioni iniziali. Si può così seguire l'evoluzione del sistema allo studio, considerando l'evoluzione della distribuzione dell'insieme di punti rappresentativi.

Indicata con $\rho(q, p, t)$ la densità di questa distribuzione, $\rho(q, p, t)dq dp$ costituisce la frazione del numero di repliche del sistema cui corrisponde un punto rappresentativo situato nell'elemento di volume $dq dp$ dello spazio delle fasi. La variazione nell'unità di tempo del numero di punti rappresentativi all'interno di un arbitrario volumetto dello spazio delle fasi è determinata dal bilancio del numero di punti che attraversano nell'unità di tempo la superficie che lo delimita. Perciò si stabilisce un'equazione di continuità per la ρ ⁴²

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.36)$$

dove \mathbf{u} è la velocità, di componenti (\dot{q}, \dot{p}) , con cui si muovono i punti rappresentativi nello spazio delle fasi. Sviluppando la divergenza si ottiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} \right) + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.37)$$

⁴¹ È questo l'insieme statistico considerato da J.W. Gibbs, *loc. cit.* (n. 13 p. 3).

⁴² Il simbolo vettoriale ∇ è detto *nabla* e ha componenti cartesiane $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Pertanto, moltiplicato scalarmente per un vettore \mathbf{a} , $\nabla \cdot \mathbf{a}$, ne rappresenta la divergenza; quando moltiplicato vettorialmente per il vettore \mathbf{a} , $\nabla \times \mathbf{a}$, ne fornisce il rotore. Applicato a una funzione ϕ , $\nabla \cdot \phi$, ne produce invece il gradiente.

Ma l'ultimo addendo nel primo membro si annulla grazie alle equazioni del moto:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= \sum \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} \right) \\ &= \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Pertanto la (2.36) diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0.\tag{2.39}$$

che è l'equazione di Liouville⁴³. Per la (1.19) ciò significa che è

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,\tag{2.40}$$

cioè la ρ è una costante del moto. Questo risultato va sotto il nome di *primo teorema di Liouville* e costituisce il teorema di conservazione della densità nello spazio delle fasi.

Il *secondo teorema di Liouville* deriva dalla (2.38), per la quale il flusso dei punti rappresentativi nello spazio delle fasi possiede divergenza nulla. Pertanto la densità di punti rappresentativi si mantiene costante nel tempo e il loro flusso nello spazio delle fasi corrisponde a quello di un fluido incomprimibile (fig. 2.3).

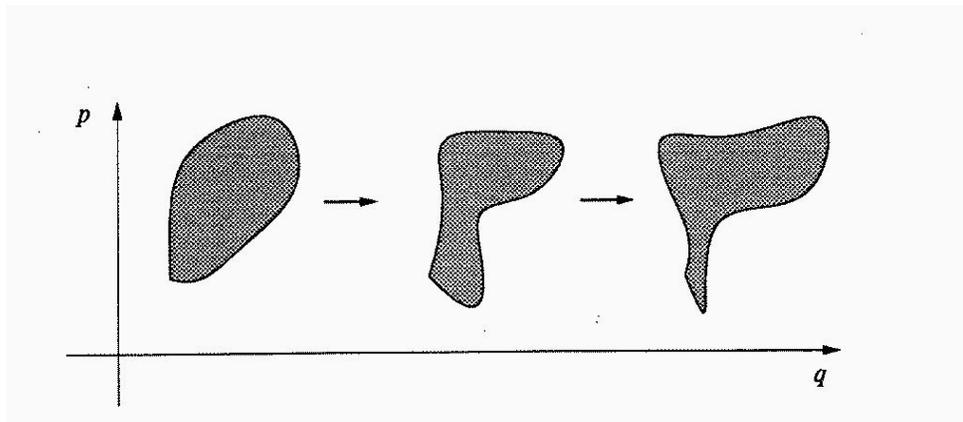


Fig. 2.3. Conservazione del volume nello spazio delle fasi come conseguenza dei teoremi di Liouville.

⁴³ Joseph Liouville (1809–1882) è autore di oltre 400 articoli e memorie su vari aspetti di matematica pura e applicata, con significativi contributi alla teoria dei numeri, delle equazioni algebriche e dei gruppi. Molti di questi lavori costituiscono i primi 39 volumi della rivista *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, da lui pubblicati tra il 1836 e il 1874.

In condizioni di *equilibrio statistico* si ha anche

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (2.41)$$

e quindi

$$\{\rho, H\} = 0. \quad (2.42)$$

In questo caso la densità di distribuzione risulta un integrale primo, funzione degli integrali primi del moto microscopico.

La conoscenza della ρ permette di calcolare il valor medio di una qualunque variabile dinamica $A = A(q, p)$ mediante la relazione ⁴⁴

$$\langle A \rangle = \int dq \int dp A(q, p) \rho(q, p, t), \quad (2.43)$$

Siccome per l'equazione di Liouville (2.39) la densità ρ è costruita a partire dalla hamiltoniana che descrive il moto microscopico delle particelle del sistema, la relazione (2.43) stabilisce il legame voluto tra la descrizione microscopica della meccanica analitica e quella statistica macroscopica della termodinamica.

Per completare questo collegamento è necessario costruire con la ρ anche l'espressione esplicita dell'entropia. L'entropia è una funzione additiva, mentre la distribuzione ρ di un sistema è il prodotto delle ρ corrispondenti ai sottoinsiemi separati. Perciò si garantisce l'additività dell'entropia ricorrendo alla funzione logaritmo. L'argomento del logaritmo deve legare l'entropia al grado di disordine microscopico del sistema, cioè al numero di modi in cui è possibile realizzare lo stesso stato termodinamico partendo da configurazioni microscopiche per le N particelle del sistema. Con Boltzmann si può assumere la funzione $\ln(C^N \rho)$, dove C^N è un'opportuna costante che rende adimensionale il prodotto $C^N \rho$. L'entropia del sistema in equilibrio è allora definita dalla seguente media d'insieme:

$$S = -k \int dq \int dp \rho(q, p) \ln(C^N \rho(q, p)), \quad (2.44)$$

dove il segno negativo rende S definita positiva; la costante k è la *costante di Boltzmann*,

$$k = 1.380\,651\,3(25) \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}, \quad (2.45)$$

e serve per ristabilire le corrette dimensioni di S . La ρ non dipende esplicitamente dal tempo nella (2.44) per l'ipotesi di equilibrio statistico.

La soluzione dell'equazione di Liouville è notevolmente semplificata se al flusso dei punti rappresentativi nello spazio delle fasi si impongono condizioni capaci di riprodurre la situazione di equilibrio termodinamico. Per un sistema isolato

⁴⁴ Si suppone che sia $\int dq \int dp \rho(q, p, t) = 1$. Cfr. eq. (2.47) più avanti.

L'unica variabile dinamica (microscopica) importante nella descrizione macroscopica è l'energia, che si mantiene costante. Le possibili traiettorie dei punti rappresentativi del sistema sono perciò confinate sulla superficie a energia costante. Se, a meno di un insieme di misura nulla, tutti i punti di questa superficie sono raggiungibili seguendo il flusso dei punti rappresentativi, si dice che il flusso è *ergodico*⁴⁵.

Il criterio per riconoscere il flusso ergodico è stato precisato da Birkhoff⁴⁶ e si basa sulla possibilità di identificare il risultato di medie temporali di funzioni dei punti dello spazio delle fasi con medie spaziali sulla superficie a energia costante. Questa possibilità significa che il punto rappresentativo in media spende tempi uguali su aree uguali della superficie a energia costante. Ne deriva che la probabilità di trovarlo in un intorno di un prefissato punto è pari all'area dell'intorno stesso e indipendente dal tempo. Perciò tutti gli stati sulla superficie di energia sono equiprobabili, in accordo con l'idea di equilibrio termodinamico.

L'insieme statistico che realizza il flusso ergodico per un sistema isolato con energia compresa tra E ed $E + \Delta E$ è stato chiamato da Gibbs *insieme microcanonico*. La corrispondente densità ρ risulta

$$\rho(q, p) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega(E, V, N)}, & \text{per } E \leq H(q, p) \leq E + \Delta E, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (2.46)$$

dove $\Omega(E, V, N)$ è la frazione di volume dello strato compreso tra le superfici E ed $E + \Delta E$. La densità relativa all'insieme microcanonico è indipendente dal tempo ed è una soluzione stazionaria dell'equazione di Liouville. Inoltre il suo integrale esteso a tutto lo spazio delle fasi risulta uguale a 1:

$$\int dq \int dp \rho(q, p) = 1, \quad (2.47)$$

in accordo con l'interpretazione della ρ come densità di probabilità di trovare il punto rappresentativo del sistema all'interno dello spazio delle fasi.

⁴⁵ Un esempio di flusso ergodico è fornito dalla soluzione dell'Esercizio 2.15 per ω_1/ω_2 pari a un numero irrazionale, per cui la traiettoria è densa nel quadrato $[0 < q < 1, 0 < p < 1]$. Invece, per ω_1/ω_2 pari a un numero razionale la traiettoria è periodica.

Il termine *ergodico* deriva dai vocaboli greci $\epsilon\rho\gamma\omicron\nu$ = lavoro (inteso come energia) e $\delta\delta\omicron\varsigma$ = cammino ed è stato coniato da L. Boltzmann: *Über die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik [Analogie meccaniche del secondo principio fondamentale della termodinamica]*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle Journal) **100** (1887) 201–212. Cfr. anche il §10 dell'articolo di Paul e Tatiana Ehrenfest: *Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik [Fondamenti concettuali dell'interpretazione statistica nella meccanica]*, Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften IV 2, II, Teubner, Lipsia, 1912.

⁴⁶ George David Birkhoff (1884–1944): *Proof of the Ergodic Theorem [Dimostrazione del teorema ergodico]*, Proceedings of the National Academy of Science (U.S.) **17** (1931) 656–660.

Esercizio 2.16

Sostituendo la (2.46) nella (2.44) trovare l'espressione esplicita dell'entropia ⁴⁷:

$$S = k \ln \left(\frac{\Omega(E, V, N)}{C^N} \right). \quad (2.48)$$

Anche per un sistema chiuso, in equilibrio termico con l'ambiente alla temperatura T , l'equazione di Liouville ammette una soluzione stazionaria. Imponendo che l'entropia (2.44) sia massima, col vincolo di un valore medio prefissato dell'energia interna, si ottiene

$$\rho(q, p) = \frac{1}{C^N Z} e^{-\beta H(q, p)}, \quad (2.49)$$

dove il parametro β risulta

$$\beta = \frac{1}{kT}. \quad (2.50)$$

Nella (2.49) la funzione Z , detta *funzione di partizione* ⁴⁸, è definita dalla relazione

$$Z = \frac{1}{C^N} \int dq \int dp e^{-\beta H(q, p)} \quad (2.51)$$

e serve a garantire anche in questo caso la (2.47).

Esercizio 2.17

La hamiltoniana di una mole di gas perfetto monoatomico è

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}. \quad (2.52)$$

Mostrare che la funzione di partizione associata è

$$Z = \frac{V^N}{C^N} (2\pi m k T)^{3N/2}, \quad (2.53)$$

dove V è il volume occupato dal gas.

⁴⁷ In fisica classica il valore della costante C^N resta indeterminato, ma ciò non costituisce una difficoltà perché in fisica classica si considerano solo *variazioni* di entropia. Con argomenti di meccanica quantistica si può riconoscere che per un sistema di N particelle classiche, in linea di principio distinguibili una dall'altra, C^N è pari a h^{3N} , dove h si identifica con la costante di Planck (cfr. Tab. D.1). Per particelle quantistiche (indistinguibili tra di loro), risulta $C^N = N! h^{3N}$.

⁴⁸ La funzione di partizione viene solitamente indicata col simbolo Z , iniziale del vocabolo tedesco *Zustandsumme* (= *somma sugli stati*), utilizzato da Boltzmann per chiamare l'integrale che compare nella (2.51).

Sistemi in relazione con una grande riserva di energia a temperatura costante T , descritti dalla densità (2.49), sono associati a quelli che Gibbs definì come *insiemi canonici*.

L'energia totale di un sistema in equilibrio termico con l'ambiente alla temperatura T , si calcola inserendo la (2.49) nella (2.43) applicata alla hamiltoniana, col seguente risultato:

$$E \equiv \langle H \rangle = \frac{\int dq \int dp H(q, p) e^{-\beta H(q, p)}}{\int dq \int dp e^{-\beta H(q, p)}}. \quad (2.54)$$

Equivalentemente, ricorrendo alla funzione di partizione (2.51), si può scrivere

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z. \quad (2.55)$$

Esercizio 2.18

Utilizzando la (2.55) mostrare che l'energia interna di una mole di gas perfetto monoatomico è

$$E = \frac{3}{2} R T, \quad (2.56)$$

dove

$$R = kN \quad (2.57)$$

è la costante dei gas perfetti.

Esercizio 2.19

La hamiltoniana di un insieme di N oscillatori armonici è

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r_i^2 \right).$$

Calcolare la funzione di partizione e mostrare che l'energia media dell'insieme è

$$E = 3RT. \quad (2.58)$$

Calcolare il calore specifico a volume costante.

La funzione di partizione gioca un ruolo fondamentale nel collegamento tra descrizione microscopica e descrizione termodinamica. Infatti, per quanto visto in precedenza, dall'energia interna E e dall'entropia S è possibile risalire a ogni altra funzione di stato termodinamica. La (2.55) fornisce il legame tra funzione di partizione e energia. Si può inoltre dimostrare che l'entropia associata a un insieme canonico risulta

$$S = \frac{E}{T} + k \ln Z. \quad (2.59)$$

Esercizio 2.20

Ricorrendo alla definizione statistica (2.44) dell'entropia e alla soluzione (2.49) dell'equazione di Liouville per un insieme canonico, dimostrare la (2.59).

Esercizio 2.21

Utilizzando la (2.56) e la (2.59), mostrare che l'entropia di una mole di gas perfetto monoatomico è

$$S = S_0 + R \ln V + \frac{3}{2} R \ln T, \quad (2.60)$$

dove

$$S_0 = \frac{3}{2} R + k \ln \left(\frac{(2\pi mk)^{3N/2}}{C^N} \right). \quad (2.61)$$

La meccanica statistica è dunque in grado di fissare il valore dell'entropia, senza bisogno di ricorrere a uno stato di riferimento come avviene con l'equazione (2.16) in termodinamica classica ⁴⁹.

Note l'energia e l'entropia, si può derivare ogni altra funzione di stato: per esempio, l'energia libera (di Helmholtz) è

$$\begin{aligned} F &= E - TS \\ &= -kT \ln Z. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Quindi l'uso della funzione di partizione completa il collegamento tra meccanica analitica e termodinamica, stabilito attraverso il quadro dell'insieme statistico di punti rappresentativi nello spazio delle fasi.

⁴⁹ La (2.60) è nota come legge di Sackur-Tetrode per l'entropia di una mole di gas perfetto. Per la sua derivazione originale era necessario ipotizzare una misteriosa suddivisione dello spazio delle fasi in celle di volume h^3 : ciò permetteva di valutare correttamente il valore della costante C^N che compare nella funzione di partizione e nelle funzioni di stato da essa derivate (cfr. Esercizio 2.16).

Otto Sackur: *Die Anwendung der kinetischen Theorie der Gase auf chemische Probleme [L'applicazione della teoria cinetica dei gas a problemi chimici]*, Annalen der Physik **36** (1911) 958–989; *Die universelle Bedeutung des sogenannten elementaren Wirkungsquantums [Il significato universale del cosiddetto quanto d'azione elementare]*, Annalen der Physik **40** (1912) 67–86.

Hugo Tetrode: *Bemerkungen über den Energieinhalt einatomiger Gase und über die Quantentheorie für Flüssigkeiten [Osservazioni sul contenuto energetico dei gas monoatomici e sulla teoria quantistica per i fluidi]*, Physikalische Zeitschrift **14** (1913) 212–214; *Die chemische Konstante der Gase und das elementare Wirkungsquantum [La costante chimica dei gas e il quanto d'azione elementare]*, Annalen der Physik **38** (1912) 434–442.

In questo ambito è importante il *teorema di equipartizione dell'energia*⁵⁰.

Se la hamiltoniana di un sistema di particelle è una forma quadratica delle variabili canoniche,

$$H(q, p) = ap^2 + bq^2, \quad (2.63)$$

il teorema di equipartizione dell'energia stabilisce che l'energia media E per grado di libertà è

$$E = kT. \quad (2.64)$$

Infatti

$$\begin{aligned} E &= \frac{\int dq \int dp (ap^2 + bq^2) e^{-\beta H(q,p)}}{\int dq \int dp e^{-\beta H(q,p)}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \int dq \int dp e^{-\beta ap^2} - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \int dq \int dp e^{-\beta bq^2}. \end{aligned}$$

Ricordando l'integrale di Poisson,

$$\int_0^\infty dy e^{-y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad (2.65)$$

si dimostra l'asserto (2.64).

Esercizio 2.22

Ritrovare la (2.64) utilizzando nel calcolo degli integrali il cambiamento di variabili dalle coordinate canoniche alle variabili d'azione e d'angolo dell'Esercizio 1.17.

⁵⁰ Una prima formulazione di questo teorema, che appariva piuttosto un principio, è dovuta a John James Waterstone: *On the physics of media that are composed of free and perfectly elastic molecules in a state of motion* [Fisica dei mezzi composti da molecole in moto, libere e perfettamente elastiche], Philosophical Transactions of the Royal Society of London **183** (1893) 1–79. Questo lavoro era stato presentato senza riscuotere alcun interesse della *Royal Society* nel 1845 e fu pubblicato per merito di Lord Rayleigh solo molto più tardi. La prima dimostrazione del teorema si trova in J.C. Maxwell: *Illustrations of the dynamical theory of gases* [Illustrazioni della teoria dinamica dei gas], Philosophical Magazine **20** (1860) 21–37. La sua generalizzazione a particelle dotate di gradi di libertà interni è dovuta a L. Boltzmann: *Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten* [Studi sull'equipartizione della forza viva tra punti materiali in moto], Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Wien) **58** (1868) 517–560.

La successiva estensione al caso di una hamiltoniana qualsiasi fatta da J.C. Maxwell (*On Boltzmann's theorem on the average distribution of energy in a system of material points* [Il teorema di Boltzmann sulla distribuzione media di energia in un sistema di punti materiali], Transactions of the Cambridge Philosophical Society **12** (1878) 547–570) suscitò le aspre critiche di P.G. Tait che convinse il mondo scientifico anglosassone della non validità del teorema, suscitando anche molti dubbi sull'intero approccio atomistico alla struttura della materia introdotto da Boltzmann (cfr. n. 12 p. 3).

Esempio 2.2

Il teorema di equipartizione dell'energia ha immediata applicazione nel calcolo dei calori specifici. Per una mole di sostanza, il calore molare a volume costante è la derivata della sua energia interna E rispetto alla temperatura T a volume costante (cfr. equazione (2.7)):

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V. \quad (2.66)$$

Nel caso del gas perfetto monoatomico, $b = 0$ nella (2.63) e pertanto l'energia media per grado di libertà è $\frac{1}{2}kT$. Ciò implica $E = 3N\frac{1}{2}kT = \frac{3}{2}RT$, in accordo con la (2.56). Pertanto si ottiene $C_V = \frac{3}{2}R$.

Similmente, per un solido cristallino monoatomico, per cui la (2.63) è una buona approssimazione per descrivere il moto di oscillazione dell'atomo intorno ad una posizione di equilibrio nel reticolo cristallino, l'energia è $E = 3NkT$ e quindi $C_V = 3R$. Tale risultato è da tempo noto come regola di Dulong e Petit⁵¹ e trova riscontro sperimentale ad alte temperature, ma con alcune eccezioni anche a temperatura ambiente.

Esempio 2.3

Nella teoria cinetica dei gas perfetti si riesce a dedurre l'equazione di stato del gas perfetto (2.2) con considerazioni di meccanica statistica.

Innanzitutto occorre calcolare la distribuzione di velocità delle molecole del gas. La densità di probabilità $F(\mathbf{p}_1)$ che la molecola 1 abbia impulso \mathbf{p}_1 si ottiene integrando la distribuzione $\rho(q, p)$ su tutte le coordinate di posizione \mathbf{q}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) e sulle variabili di impulso $\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N$:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}_1) &= \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 \dots \int d\mathbf{q}_N \int d\mathbf{p}_2 \dots \int d\mathbf{p}_N \rho(q, p) \\ &= \left(\frac{\beta}{2\pi m} \right)^{3/2} e^{-\beta \mathbf{p}_1^2 / 2m}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Questa è la distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Similmente si può ricavare la densità di probabilità $F(\mathbf{v})$ di trovare una particella con velocità compresa tra $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$:

$$F(\mathbf{v}) = \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta m \mathbf{v}^2 / 2}. \quad (2.68)$$

La pressione esercitata dal gas sulle pareti del suo recipiente è data dalla forza media impressa dagli urti delle molecole alla parete, divisa per la superficie della parete stessa; tale forza media deriva dall'impulso trasferito negli urti durante un certo intervallo di tempo. In ogni singolo urto viene trasferito perpendicolarmente alla parete in direzione dell'asse z l'impulso $2mv_z$. Nel tempo dt il numero di particelle che incidono sulla parete di superficie dS e che hanno velocità compresa tra \mathbf{v} e $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ sono

⁵¹ “Les atomes de tous les corps simples ont exactement la même capacité pour la chaleur [Gli atomi di tutti corpi semplici hanno esattamente la stessa capacità termica]”, secondo quanto affermano Pierre-Louis Dulong (1785–1838) e Alexis Thérèse Petit (1791–1820): *Sur quelques points importants de la théorie de la chaleur [Alcuni punti importanti della teoria del calore]*, *Annales de Chemie et de Physique* **10** (1819) 395–413.

Macrofisica

$$dn(\mathbf{v}) = n F(\mathbf{v}) dv v_z dt dS,$$

dove $n = N/V$ è il numero di particelle per unità di volume. Perciò la pressione corrispondente è

$$dp(\mathbf{v}) = (2mv_z)v_z n F(\mathbf{v}) dv.$$

La pressione totale si ottiene integrando su tutte le velocità

$$p = 2n m \int dv v_z^2 F(\mathbf{v}),$$

cioè, essendo $v_z = v \cos \theta$, con $0 \leq \theta \leq \pi/2$,

$$p = \frac{1}{3} n m \langle v^2 \rangle, \quad (2.69)$$

dove

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= 4\pi \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{3/2} \int_0^\infty dv v^4 e^{-\beta m v^2/2} \\ &= 3 \frac{kT}{m} \end{aligned} \quad (2.70)$$

è la *velocità quadratica media* delle molecole del gas.

L'energia cinetica media risulta dunque proporzionale alla temperatura:

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (2.71)$$

in accordo con la (2.56).

L'equazione di stato del gas perfetto si ottiene allora eseguendo il prodotto pV e utilizzando la (2.69) e la (2.71):

$$pV = NkT. \quad (2.72)$$

Esempio 2.4

L'energia interna di un sistema ottenuta con la (2.54) ne rappresenta il valore medio relativo all'intero volume occupato dal sistema stesso. Però localmente la densità di energia subisce fluttuazioni intorno al suo valore medio, coerentemente con la situazione statistica ipotizzata. Si vuole ottenere un'espressione per queste fluttuazioni.

Se il sistema possiede f gradi di libertà indipendenti che partecipano alla formazione dell'energia media, ciascuno con il suo contributo medio E_s in accordo con il teorema di equipartizione dell'energia, la hamiltoniana H totale è somma delle hamiltoniane relative ai singoli gradi di libertà H_s :

$$H(q, p) = \sum_{s=1}^f H_s(q_s, p_s). \quad (2.73)$$

Anche la (2.54) si riscrive come somma di contributi relativi ai vari gradi di libertà:

$$E = \sum_{s=1}^f E_s, \quad (2.74)$$

dove E_s è data dalla relazione

$$E_s = \frac{\int dq_s \int dp_s H_s(q_s, p_s) e^{-\beta H_s(q_s, p_s)}}{\int dq_s \int dp_s e^{-\beta H_s(q_s, p_s)}}. \quad (2.75)$$

La fluttuazione di E è misurata dallo scarto quadratico medio ΔE^2 , definito dalla relazione

$$\begin{aligned} \Delta E^2 &= \langle (H - E)^2 \rangle \\ &= \sum_{s=1}^f \sum_{s'=1}^f \langle (H_s - E_s)(H_{s'} - E_{s'}) \rangle. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Grazie all'ipotesi di gradi di libertà indipendenti, non c'è correlazione tra s e s' . Allora la (2.76) diventa

$$\Delta E^2 = \sum_{s=1}^f \langle (H_s - E_s)^2 \rangle = \sum_{s=1}^f \{ \langle H_s^2 \rangle - E_s^2 \}. \quad (2.77)$$

Se si applica la (2.75) nel valutare l'espressione

$$-\frac{\partial E}{\partial \beta} = - \sum_{s=1}^f \frac{\partial E_s}{\partial \beta},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E}{\partial \beta} &= \sum_{s=1}^f \left\{ \frac{\int dq_s \int dp_s H_s^2(q_s, p_s) e^{-\beta H_s(q_s, p_s)}}{\int dq_s \int dp_s e^{-\beta H_s(q_s, p_s)}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left(\int dq_s \int dp_s H_s(q_s, p_s) e^{-\beta H_s(q_s, p_s)} \right)^2}{\left(\int dq_s \int dp_s e^{-\beta H_s(q_s, p_s)} \right)^2} \right\} \\ &= \sum_{s=1}^f \{ \langle H_s^2 \rangle - E_s^2 \}. \end{aligned}$$

Confrontando questo risultato con la (2.77), si ricava la relazione

$$\Delta E^2 = - \frac{\partial E}{\partial \beta}, \quad (2.78)$$

che permette di ottenere la fluttuazione dell'energia, una volta che sia noto il suo valore medio in funzione della temperatura.

Esercizio 2.23

Valutare le fluttuazioni di energia per un insieme di N oscillatori armonici e per una mole di gas perfetto.

I.3. Elettrodinamica

L'elettrodinamica, come studio dei fenomeni connessi con la presenza e il moto di cariche elettriche nella materia, è basata su due leggi fondamentali. La prima riguarda la forza F subita dalla carica Q per effetto della presenza di una carica Q' posta a distanza r . Il modulo e il segno di questa forza, che agisce lungo la congiungente le due cariche, supposte puntiformi, sono dati dalla *legge di Coulomb*:

$$F = k_e \frac{QQ'}{r^2}. \quad (3.1)$$

La forza è repulsiva per cariche di uguale segno, attrattiva per cariche di segno diverso.

La seconda legge si riferisce alla forza F' che si stabilisce tra due fili conduttori paralleli di lunghezza unitaria posti a distanza r quando in essi fluiscono le correnti I e I' . Il modulo di questa forza è dato dalla *legge di Ampère*:

$$F' = k_m \frac{2II'}{r}. \quad (3.2)$$

La forza è attrattiva per correnti equiverse, repulsiva altrimenti.

Le due costanti che compaiono nelle due leggi sono collegate dalla relazione

$$\frac{k_e}{k_m} = c^2, \quad (3.3)$$

dove

$$c = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ms}^{-1} \quad (3.4)$$

è la velocità della luce nel vuoto ⁵².

⁵² Sulla base di queste leggi nel 1948 la *IX Conferenza Generale sui Pesi e Misure* ha imposto

$$k_m = 10^{-7} \text{NA}^{-2},$$

in modo da definire l'*Ampère* quale unità di misura della corrente. Così 1 A è la corrente costante che, fluendo in due conduttori rettilinei paralleli, indefinitamente lunghi, di sezione circolare e trascurabile, posti alla distanza di un metro nel vuoto, produce tra di loro una forza di $2 \times 10^{-7} \text{N}$ per metro di conduttore. Di conseguenza il *Coulomb* è l'unità di carica elettrica il cui flusso è responsabile della corrente di 1 A e

$$k_e = 10^{-7} c^2 = 8.987\,551\,79 \times 10^9 \text{Nm}^2 \text{C}^{-2}.$$

Nel 1960 la *XI Conferenza Generale sui Pesi e Misure* ha affiancato l'*Ampère* alle altre unità del sistema MKS per definire il sistema internazionale (SI) di unità di misura. Per i valori di alcune costanti fisiche di interesse nel presente contesto, si veda la Tab. D.1.

Gli effetti della presenza di una distribuzione di cariche (con densità di volume ρ) e di correnti (di densità \mathbf{j}) sono descritti in modo sintetico dalle *equazioni di Maxwell*. Queste determinano la dipendenza temporale dei vettori che caratterizzano il campo elettromagnetico prodotto dal moto delle cariche, assegnandone divergenza e rotore. Nel sistema internazionale di unità di misura si scrivono

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{cases} \quad (3.5)$$

In queste equazioni \mathbf{E} rappresenta il *campo elettrico* e \mathbf{B} il *campo magnetico*⁵³. Il vettore \mathbf{D} di *induzione elettrica*⁵⁴ in generale differisce da \mathbf{E} per tenere conto di effetti del mezzo dielettrico. Analogamente, il campo ausiliare \mathbf{H} , detto anche *campo magnetizzante*, differisce da \mathbf{B} per gli effetti di magnetizzazione del mezzo inclusi in \mathbf{B} .

La prima equazione di Maxwell esprime il teorema di Gauss per il campo elettrico e corrisponde al fatto che il flusso del campo di induzione elettrica attraverso una superficie chiusa è determinato dalla carica globale racchiusa dalla superficie. La seconda equazione stabilisce che il campo magnetico è sempre solenoidale e riflette il fatto che sperimentalmente non si è trovato il monopolo magnetico. La terza equazione racchiude la legge di Faraday-Neumann dell'induzione elettromagnetica e la legge di Lenz sul segno della forza elettromotrice indotta da una variazione di flusso del vettore \mathbf{B} ; la quarta è la legge di Ampère-Maxwell sugli effetti magnetici di un campo elettrico dipendente dal tempo⁵⁵.

Nel vuoto è

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.6)$$

dove la *costante dielettrica* ϵ_0 , detta anche *permettività elettrica*, è definita dalla relazione

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (3.7)$$

per cui risulta

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{F m}^{-1}. \quad (3.8)$$

⁵³ Il vettore \mathbf{B} viene anche chiamato vettore di *induzione magnetica*.

⁵⁴ Il vettore \mathbf{D} è detto anche vettore di *spostamento elettrico*.

⁵⁵ Per una trattazione dell'elettromagnetismo classico si veda il testo di J.D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, J. Wiley & Sons, New York, 1975.

Inoltre, sempre nel vuoto, è

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (3.9)$$

con la *permeabilità magnetica* μ_0 nel vuoto pari a

$$\mu_0 = 4\pi k_m = 12.566\,370\,614 \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2}. \quad (3.10)$$

Dalle (3.3), (3.7) e (3.10) segue la *relazione di Maxwell*:

$$\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}. \quad (3.11)$$

Il sistema SI è conveniente in ingegneria e nelle applicazioni tecniche, ma nel sistema SI le equazioni di Maxwell (3.5) presentano una forma asimmetrica rispetto ai campi elettrici e magnetici anche in assenza di sorgenti, cioè per $\rho = 0$ e $\mathbf{j} = 0$. Diventano simmetriche solo se si considera \mathbf{H} anziché \mathbf{B} . D'altra parte è un fatto della natura che il campo magnetico fondamentale nella materia è \mathbf{B} e non \mathbf{H} . Anche per questa ragione per molti fisici è preferibile il sistema doppio simmetrico di Gauss che fa uso delle unità elettrostatiche (u.e.s.) e magnetostatiche (u.e.m.) in aggiunta al sistema di unità di misura c.g.s.⁵⁶.

Nel sistema di Gauss si assume

$$k_e = 1 \quad (3.12)$$

per definire l'unità u.e.s. di carica dalla (3.1). Di conseguenza

$$k_m = c^{-2}. \quad (3.13)$$

Inoltre risulta

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad \text{nel vuoto}, \quad (3.14)$$

mentre in generale

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (3.15)$$

dove la costante dielettrica ϵ e la permeabilità magnetica μ inglobano gli effetti di polarizzazione elettrica e di magnetizzazione del mezzo, rispettivamente.

Nel seguito verrà adottato il sistema di Gauss. Pertanto conviene riscrivere le equazioni di Maxwell (3.5) con tali unità di misura:

⁵⁶ Il sistema c.g.s. utilizza come unità fondamentali il centimetro (cm) per le lunghezze, il grammo (g) per le masse e il secondo (s) per il tempo. Per un confronto delle relazioni elettromagnetiche nel SI e nel sistema di Gauss, si veda la Tab. D.2.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Per le sorgenti che intervengono nelle equazioni di Maxwell deve inoltre valere un'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.17)$$

che completa il sistema di equazioni per il campo elettromagnetico nel vuoto. Nella materia occorrono altre informazioni aggiuntive per definire ϵ e μ , che in generale dipendono dalla sostanza e sono funzione della posizione, oltre che della frequenza del campo elettromagnetico. Nel seguito si assumono mezzi omogenei e isotropi, per cui ϵ e μ risultano indipendenti dalla posizione.

Come conseguenza della presenza di un campo magnetico \mathbf{B} e di un campo elettrico \mathbf{E} , su di una distribuzione di cariche in moto si esercita la seguente forza per unità di volume, \mathbf{f} , detta *forza di Lorentz*⁵⁷:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (3.18)$$

Nello spazio investito dal campo elettromagnetico si può assumere una densità di energia

$$U = \frac{1}{8\pi} (\epsilon E^2 + \mu H^2). \quad (3.19)$$

Se i campi \mathbf{E} e \mathbf{H} dipendono dal tempo, l'energia elettromagnetica in ogni punto dello spazio cambia nel tempo. Le variazioni temporali del campo elettromagnetico danno origine a un'onda elettromagnetica, che si propaga in generale con trasporto di energia. La propagazione dell'onda elettromagnetica, che nel vuoto avviene con velocità c , viene indicata come *radiazione elettromagnetica*. A questa è associato il *vettore di Poynting*⁵⁸,

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (3.20)$$

⁵⁷ Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928): *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants* [La teoria elettromagnetica di Maxwell e la sua applicazione ai corpi in movimento], *Archive Néerlandaise* **25** (1892) 363–551.

⁵⁸ John Henry Poynting (1852–1914): *On the transfer of energy in the electromagnetic field* [Trasferimento di energia nel campo elettromagnetico], *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **274** (1884) 343–361.

Il significato del modulo di \mathbf{S} è quello di intensità dell'onda elettromagnetica e il flusso di \mathbf{S} attraverso una superficie rappresenta l'energia associata all'onda che attraversa la superficie per unità di tempo. Il teorema di conservazione dell'energia segue allora dalle equazioni di Maxwell e si esprime nella forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \quad (3.21)$$

Esempio 3.1

In questo Esempio si vuole calcolare la *pressione di radiazione*. All'interno di una cavità vuota di materia la pressione di radiazione p , dovuta alla presenza di un campo elettromagnetico in equilibrio con la cavità, è calcolabile ricorrendo alla forza di Lorentz che si esercita sulla densità di carica e di corrente delle pareti. Queste a loro volta determinano la radiazione stessa e sono quindi le sorgenti nelle equazioni di Maxwell. Dato che la cavità è vuota di materia, $\epsilon = \mu = 1$ e la forza di Lorentz per unità di volume risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left(\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right\}, \end{aligned}$$

dove si è aggiunto il termine nullo $(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$. Utilizzando la terza delle equazioni di Maxwell (3.16), si ottiene infine

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} \left\{ (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right\},$$

in cui campo elettrico e campo magnetico giocano un ruolo simmetrico.

Per il calcolo della pressione interessa la forza mediata su un tempo lungo rispetto al periodo proprio di oscillazione del campo elettromagnetico. In tal modo molti termini si annullano in media, come per esempio l'ultimo. Indicando con la soprilineatura i valori mediati sul tempo, la componente media della forza nella direzione dell'asse x risulta

$$\begin{aligned} \overline{f_x} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{E_x^2}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{B_x^2}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{B_z^2}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{B_y^2}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{E_z^2}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{E_y^2}}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial \overline{E_x^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{B_x^2}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{E^2} + \overline{B^2}) \right\}, \end{aligned}$$

dove

$$\overline{E^2} = \overline{E_x^2} + \overline{E_y^2} + \overline{E_z^2}, \quad \overline{B^2} = \overline{B_x^2} + \overline{B_y^2} + \overline{B_z^2}.$$

D'altra parte in equilibrio si deve avere

$$\overline{E_x^2} = \overline{E_y^2} = \overline{E_z^2} = \frac{1}{3} \overline{E^2},$$

$$\overline{B_x^2} = \overline{B_y^2} = \overline{B_z^2} = \frac{1}{3} \overline{B^2},$$

e quindi risulta

$$\begin{aligned} \overline{f_x} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial x} \{ \overline{E^2} + \overline{B^2} \} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\partial U}{\partial x}, \end{aligned}$$

dove U è la densità di energia del campo elettromagnetico (3.19).

La pressione su una parete, perpendicolare all'asse x e posta in $x = 0$, si ottiene integrando la forza media lungo tutto l'asse x :

$$\begin{aligned} p &= \int_0^\infty \overline{f_x} dx \\ &= \frac{1}{3} U. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Il risultato (3.22) non dipende dall'orientamento per l'ipotesi fatta di equilibrio ⁵⁹.

È noto che campo elettrico e campo magnetico sono derivabili da *potenziali*. Infatti dalla solenoidalità di \mathbf{B} segue la possibilità di esprimere \mathbf{B} come il rotore di un vettore:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{3.23}$$

dove \mathbf{A} è il *potenziale vettore*. Dalla terza equazione di Maxwell (3.16) segue quindi

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}),$$

cioè

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

⁵⁹ Questo risultato fu ipotizzato da Boltzmann in analogia con quanto succede in un gas perfetto.

L. Boltzmann: *Ableitung des Stefan'schen Gesetzes betreffend die Abhängigkeit der Wärmestrahlung von der Temperatur aus der electromagnetischen Lichttheorie* [Derivazione della legge di Stefan sulla dipendenza della radiazione termica dalla temperatura a partire dalla teoria elettromagnetica della luce], *Annalen der Physik* **22** (1884) 291–294.

L'esistenza della pressione di radiazione fu messa in discussione per la prima volta in un esperimento ideale, senza alcun riferimento a una particolare teoria della luce, da Adolfo Bartoli (1851–1896): *Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore*, Le Monnier, Firenze, 1876.

Pertanto il vettore $\mathbf{E} + (1/c)(\partial\mathbf{A}/\partial t)$ è conservativo e può essere espresso in termini di un gradiente:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi, \quad (3.24)$$

dove ϕ è il *potenziale scalare*.

Va ricordato che \mathbf{E} e \mathbf{B} non determinano in modo univoco ϕ e \mathbf{A} , in quanto la trasformazione

$$\begin{cases} \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi, \\ \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{cases} \quad (3.25)$$

produce gli stessi campi \mathbf{E} e \mathbf{B} , indipendentemente dalla funzione ψ scelta, purché derivabile. Infatti, utilizzando la (3.24) si può costruire il campo \mathbf{E}' prodotto dai nuovi potenziali:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \phi' \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \psi - \nabla \phi + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \\ &= \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Similmente, utilizzando la (3.23) si costruisca il campo \mathbf{B}' prodotto dai nuovi potenziali:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \nabla \times \mathbf{A}' \\ &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \psi \\ &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \mathbf{B}. \end{aligned}$$

La trasformazione (3.25) è detta *trasformazione di gauge* in quanto, attraverso la scelta della funzione ψ , permette di calibrare a proprio piacimento i potenziali elettromagnetici, senza alterare i corrispondenti campi fisicamente osservati⁶⁰. In realtà questa

⁶⁰ Il vocabolo *gauge* è la traduzione inglese del tedesco *Eich* che significa *calibro*. Tale denominazione fu introdotta dal matematico Hermann Weyl (1885–1955): *Gravitation und Elektrizität*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin) (1918) p. 465. Durante i suoi studi rivolti al tentativo di costruzione di una teoria di campo in grado di unificare la teoria della gravitazione e l'elettromagnetismo, Weyl cercava di derivare le forze della natura da una comune struttura geometrica dello spazio mediante il principio dell'invarianza di gauge. Il programma di Weyl è sviluppato nelle varie edizioni del libro *Raum, Zeit, Materie*, la cui prima edizione risale al 1918. Ma, come lo stesso Weyl riconosce nella prefazione alla prima edizione americana nel 1950 (*Space, Time, Matter*, Dover Publ., New York), questo tentativo è fallito, perché il principio dell'invarianza di gauge collega il campo elettromagnetico non col campo

arbitrarietà è connessa col fatto che \mathbf{B} fissa solo la parte solenoidale (trasversa) del potenziale vettore ($\nabla \times \mathbf{A}$), lasciando totalmente non specificata la parte irrotazionale (longitudinale) ($\nabla \cdot \mathbf{A}$). Si può dunque fissare il gauge assegnando $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

Due scelte sono particolarmente utili. Il *gauge di Coulomb* definisce

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (3.26)$$

Questa scelta non esaurisce l'arbitrarietà sui potenziali elettromagnetici; essa fissa semplicemente la classe di funzioni ψ che possono comparire nella (3.25). Infatti la (3.26) con la prima delle (3.25) fornisce

$$\nabla \cdot \nabla \psi = 0,$$

che si può riscrivere equivalentemente

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (3.27)$$

dove si è introdotto il *simbolo di Laplace* (o *laplaciano*),

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (3.28)$$

per indicare la divergenza del gradiente. L'equazione (3.27) è l'*equazione di Poisson*, soddisfatta anche dal potenziale scalare elettrostatico ϕ che dà origine alla forza di Coulomb: di qui il nome del gauge.

Esercizio 3.1

Si supponga che \mathbf{A} sia descritto da un'onda piana del tipo

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

dove \mathbf{k} è il vettore d'onda che indica la direzione di propagazione della perturbazione di frequenza $\nu = \omega/2\pi$. Verificare che nel gauge di Coulomb \mathbf{A} deve essere perpendicolare a \mathbf{k} , cioè l'onda è *trasversa*.

L'altra scelta interessante è quella del *gauge di Lorentz*:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (3.29)$$

Anche qui la scelta serve a definire la classe di funzioni ψ . Riscrivendo la (3.29) per \mathbf{A}' e ϕ' in termini di \mathbf{A} e ϕ ,

gravitazionale, ma col campo della meccanica ondulatoria in una descrizione quantistica (cfr. paragrafo IX.1). Le moderne teorie di gauge quantistiche sono debitorie a Weyl di questa idea e a Yang e Mills per la riproposta di considerare invarianze locali dovute a simmetrie interne nel costruire una teoria di campo. C.N. Yang e R.L. Mills: *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance* [*Conservazione dello spin isotopico e gauge invarianza isotopica*], *Physical Review* **96** (1954) 191–195.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \nabla \psi + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

si ottiene

$$\nabla^2 \psi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.30)$$

Con l'introduzione del *simbolo di d'Alembert* (o *dalembertiano*),

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (3.31)$$

la (3.30) nel vuoto ($\epsilon = 1, \mu = 1$) diventa l'*equazione di d'Alembert*⁶¹:

$$\square \psi = 0. \quad (3.32)$$

Nella (3.30) il coefficiente

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} = \frac{1}{v^2} \quad (3.33)$$

determina la velocità di propagazione v nel mezzo di costanti ϵ e μ . Nel vuoto dunque è $v = c$. L'*indice di rifrazione* n del mezzo risulta allora

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (3.34)$$

Fin qui sono state utilizzate due delle equazioni di Maxwell per riconoscere i potenziali elettromagnetici. Dalle altre due si ottengono delle condizioni per \mathbf{A} e ϕ nel gauge di Lorentz in esame.

Sostituendo i potenziali elettromagnetici (3.23) e (3.24) nella quarta delle equazioni di Maxwell (3.16) così riscritta⁶²

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j} + \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

si ha

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi.$$

Assumendo, come sempre in questi casi, l'invertibilità dell'ordine di derivazione e tenendo presente l'identità vettoriale

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

⁶¹ L'equazione fu proposta da Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783) nello studio della propagazione di un'onda.

⁶² Si continua ad assumere che ϵ e μ siano le costanti di un mezzo omogeneo e isotropo.

dalla condizione di Lorentz (3.29) si ottiene infine

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}. \quad (3.35)$$

Questa è un'equazione di d'Alembert con termine di sorgente che regola la propagazione della perturbazione ondulatoria descritta da \mathbf{A} e generata dalla sorgente connessa con l'esistenza della corrente \mathbf{j} . La perturbazione si propaga nel mezzo con velocità v , determinata dalla (3.33).

Similmente, utilizzando la prima delle equazioni di Maxwell (3.16), riscritta nella forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho,$$

si ottiene

$$-\frac{1}{c} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla^2 \phi = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho,$$

che, con la condizione (3.29), diventa

$$\nabla^2 \phi - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho. \quad (3.36)$$

Anche qui, il potenziale scalare ϕ soddisfa un'equazione di d'Alembert con un termine di sorgente legato alla distribuzione di carica: la perturbazione ondulatoria descritta da ϕ si propaga con la stessa velocità v , determinata dalla (3.33), con cui si propaga la perturbazione descritta da \mathbf{A} . Pertanto in generale, in presenza di sorgenti, il campo elettromagnetico possiede tre gradi di libertà, individuati dai potenziali elettromagnetici che soddisfano equazioni di d'Alembert con sorgente e la condizione del gauge (di Coulomb o di Lorentz).

Invece nel vuoto la (3.36) applicata a un campo di radiazione ($\rho = 0$) si riduce a un'equazione di d'Alembert per il potenziale scalare,

$$\square \phi = 0, \quad (3.37)$$

analoga alla (3.32). In questo caso si può allora scegliere ψ in modo da rendere $\phi \equiv 0$ e ridurre la condizione del gauge di Lorentz (3.29) a quella del gauge di Coulomb (3.26). La condizione (3.26) indica che \mathbf{A} deve essere perpendicolare alla direzione di propagazione, cioè rappresenta un'onda trasversale (Esercizio 3.1). Di conseguenza, i gradi di libertà del campo di radiazione nel vuoto si riducono a due: per tale ragione il campo di radiazione nel vuoto viene studiato più facilmente nel gauge di Coulomb, senza perdere generalità.

Esempio 3.2

In una dimensione spaziale l'equazione di d'Alembert si scrive

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.38)$$

La sua soluzione più generale è della forma

$$\psi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (3.39)$$

dove f_1 (f_2) rappresenta un'onda progressiva (regressiva) lungo l'asse x e può essere una qualunque funzione regolare dell'argomento $x - ct$ ($x + ct$), dove c coincide con la velocità di propagazione della perturbazione ondulatoria. In particolare si può scegliere

$$\begin{aligned} f_{1,2}(x \pm ct) &= \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T} \right) \\ &= \sin(kx \pm \omega t), \end{aligned} \quad (3.40)$$

dove

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.41)$$

è il numero d'onda ⁶³ e

$$\omega \equiv 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (3.42)$$

è la pulsazione. Alternativamente, si può utilizzare una combinazione lineare di funzione seno e di funzione coseno nella forma di un'onda piana:

$$f_{1,2}(x \pm ct) = e^{i(kx \pm \omega t)}. \quad (3.43)$$

Questa possibilità deriva dal fatto che l'equazione di d'Alembert è un'equazione lineare: quindi una qualsiasi combinazione lineare di due soluzioni $\psi_1(x, t)$ e $\psi_2(x, t)$,

$$\psi(x, t) = a \psi_1(x, t) + b \psi_2(x, t), \quad (3.44)$$

con a e b numeri complessi, è ancora soluzione della (3.38). Siccome l'intensità di un'onda è determinata dal quadrato dell'ampiezza, l'intensità dell'onda risultante dalla sovrapposizione di due presenta dei termini interferenziali che la fanno differire dalla semplice somma delle intensità delle due onde sovrapposte. Perciò la possibilità di combinare linearmente due onde secondo la (3.44) è responsabile della comparsa di possibili fenomeni di interferenza. Questa proprietà dell'equazione di d'Alembert è uno dei principi fondamentali, caratteristici di ogni descrizione ondulatoria, noto come *principio di sovrapposizione lineare* delle onde.

In base al principio di sovrapposizione lineare, la più generale soluzione della (3.38) si può scrivere in termini di *pacchetto* di onde piane,

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk A(k) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (3.45)$$

⁶³ In tre dimensioni k è il modulo del vettore d'onda \mathbf{k} che ha la stessa direzione della propagazione dell'onda.

dove $A(k)$ è una funzione regolare (in generale complessa) dell'indice continuo k . Per $k > 0$ si hanno contributi di onde progressive, per $k < 0$ di onde regressive. Per la singola onda nella (3.45) vale

$$\omega = ck, \quad (3.46)$$

per cui

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{i(kx - \omega t)} = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) e^{i(kx - \omega t)} = 0,$$

e quindi resta verificata la (3.38).

Per la singola onda si definisce *velocità di fase* la quantità

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \quad (3.47)$$

Nel pacchetto di onde (3.45), con la condizione (3.46), la velocità di fase è costante per tutte le onde e coincide con c . Questa proprietà consente la verifica della (3.38) non solo per la singola onda, ma anche per tutto il pacchetto di onde che si propaga indisturbato con la stessa velocità c di ogni singola onda che lo compone. È questo il caso della propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto.

Se invece l'onda elettromagnetica attraversa un mezzo con $\epsilon \neq 1$, $\mu \neq 1$, l'indice di rifrazione (3.34) dipende in generale dalla frequenza della radiazione. Ne deriva una *relazione di dispersione* tra frequenza e lunghezza d'onda, che si può porre nella forma seguente

$$\omega = \frac{c}{n(\omega)} k. \quad (3.48)$$

Per un'onda del tipo (3.43) anche la velocità di fase è allora funzione di ω :

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \quad (3.49)$$

e l'associata equazione di d'Alembert è soddisfatta identificando la velocità di propagazione con la velocità di fase:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e^{i(kx \pm \omega t)} = 0. \quad (3.50)$$

Ma il pacchetto di onde (3.45) non soddisfa più un'equazione di d'Alembert. Ogni onda del pacchetto si propaga con la *sua* velocità di fase.

Si supponga ora che al pacchetto di onde (3.45) contribuiscano solo onde con k' compreso in un intervallo limitato intorno al valore centrale k ; inoltre, il profilo delle ampiezze $A(k')$ sia strettamente concentrato intorno a k , in modo da avere il suo massimo in corrispondenza di $k' = k$. Posto

$$A(k') = |A(k')| e^{i\phi(k')},$$

la (3.45) diventa

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk' |A(k')| \exp\{i[k'x - \omega't + \phi(k')]\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk' |A(k')| \exp\left\{i[kx - \omega t + \phi(k)] \right. \\ &\quad \left. + i(k' - k) \frac{\partial}{\partial k'} [k'x - \omega't + \phi(k')] \Big|_{k'=k} + \dots \right\},\end{aligned}$$

dove si è sviluppato intorno a k l'argomento dell'esponenziale. Utilizzando il fatto che $|A(k')|$ è strettamente piccato attorno al valore di $|A(k)|$ e passando alla variabile $\eta' = k' - k$, si può porre

$$\psi \simeq |A(k)| e^{i[kx - \omega t + \phi(k)]} \int_{-\eta}^{\eta} d\eta' \exp\left\{i\eta' \left(x - \frac{d\omega}{dk}t + \frac{d\phi}{dk}\right)\right\}$$

e quindi

$$\psi = |A(k)| e^{i[kx - \omega t + \phi(k)]} \frac{2 \sin \left[\eta \left(x - \frac{d\omega}{dk}t + \frac{d\phi}{dk} \right) \right]}{x - \frac{d\omega}{dk}t + \frac{d\phi}{dk}}. \quad (3.51)$$

La (3.51) contiene a fattore un'onda piana: l'onda monocromatica di vettore d'onda k e frequenza ω (con sfasamento $\phi(k)$) corrispondenti all'onda principale del pacchetto $\psi(x, t)$. L'ampiezza dell'onda però non è costante: il fattore $|A(k)|$ è modulato nel tempo dal fattore che dipende dall'argomento $x - v_g t + (d\phi/dk)$, dove

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (3.52)$$

viene detta *velocità di gruppo*. Tale velocità è la velocità con cui si propaga la modulazione d'ampiezza del segnale $\psi(x, t)$ quando lo si voglia rappresentare in termini di un'onda monocromatica corrispondente all'onda di ampiezza massima nel pacchetto: è la velocità con cui globalmente si propaga il *gruppo* di onde del pacchetto considerato.

In un mezzo non dispersivo come il vuoto per le onde elettromagnetiche, è $n = 1$ e quindi velocità di fase e velocità di gruppo coincidono e sono pari a c .

Esercizio 3.2

Si considerino due onde con frequenze vicine, cioè con $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ e $\Delta k = k_1 - k_2$ piccoli. Verificare che i battimenti prodotti dalle due onde sovrapposte si propagano con la velocità

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Esempio 3.3

Per richiami futuri è utile riconoscere che il moto di una particella di massa m , velocità v e carica elettrica Q , sottoposta all'azione di un campo elettromagnetico

è descrivibile col formalismo della meccanica analitica. Occorre sottolineare che il formalismo hamiltoniano non è in generale utilizzabile quando si abbia a che fare con forze dipendenti dalla velocità. Si dimostra tuttavia che il caso del campo elettromagnetico è il solo per il quale sia possibile definire una lagrangiana con un potenziale dipendente dalla velocità che porti a trovare le giuste equazioni del moto⁶⁴. Descritto allora il campo elettromagnetico mediante i potenziali $\phi = \phi(x, y, z, t)$ e $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z, t)$, si consideri la seguente lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - Q\phi + \frac{Q}{c}\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.53)$$

Le equazioni del moto si ottengono calcolando

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= mv_x + \frac{Q}{c}A_x, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} &= m \frac{dv_x}{dt} + \frac{Q}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z \right) + \frac{Q}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -Q \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{Q}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_y}{\partial x} v_y + \frac{\partial A_z}{\partial x} v_z \right). \end{aligned}$$

Pertanto si ricava

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \\ &= m \frac{dv_x}{dt} + Q \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{Q}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{Q}{c} \left[\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) v_y + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) v_z \right]. \end{aligned}$$

Ricordando la (3.23) e la (3.24) si ha infine

$$m \frac{dv_x}{dt} = QE_x + \frac{Q}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_x, \quad (3.54)$$

che è l'equazione del moto prodotta dalla forza di Lorentz.

Se si preferisce descrivere il moto di tale particella nel formalismo hamiltoniano, occorre definire il momento coniugato,

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = mv_x + \frac{Q}{c}A_x,$$

e quindi:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{Q}{c}\mathbf{A}. \quad (3.55)$$

In presenza di campo elettromagnetico dunque il momento coniugato differisce dalla quantità di moto $m\mathbf{v}$. La velocità risulta

⁶⁴ Si veda, per esempio, il § I.5 del testo di Goldstein citato alla n. 22 p. 4.

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{Q}{c} \mathbf{A} \right). \quad (3.56)$$

Per la (3.53), la corrispondente hamiltoniana è

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - \mathcal{L} \\ &= \mathbf{p} \cdot \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{Q}{c} \mathbf{A} \right) - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{Q}{c} \mathbf{A} \right) - \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{Q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + Q\phi - \frac{Q}{c} \mathbf{A} \cdot \frac{1}{m} \left(\mathbf{p} - \frac{Q}{c} \mathbf{A} \right), \end{aligned}$$

cioè

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{Q}{c} \mathbf{A} \right)^2 + Q\phi, \quad (3.57)$$

in cui il primo termine rappresenta l'energia cinetica in presenza di campo elettromagnetico e il secondo termine è l'energia potenziale che dipende solo dal potenziale scalare, in accordo col fatto che il campo magnetico non produce lavoro sulla particella in moto.

La hamiltoniana (3.57) si ottiene formalmente dalla hamiltoniana della particella libera aggiungendo il termine di potenziale e utilizzando la sostituzione:

$$\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{p} - \frac{Q}{c} \mathbf{A}. \quad (3.58)$$

La (3.58) rappresenta una prescrizione economica per tenere conto del campo elettromagnetico e viene detta *sostituzione minimale*.

Esercizio 3.3

Verificare che quando il campo magnetico $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ è statico e uniforme, si può scegliere

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B}. \quad (3.59)$$

Esercizio 3.4

Nel caso dell'Esercizio precedente verificare che la hamiltoniana (3.57) può scriversi nella forma

$$H = H_0 + H_1 + H_2, \quad (3.60)$$

dove

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + Q\phi, \quad (3.61)$$

$$H_1 = -\frac{Q}{2mc} \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.62)$$

$$H_2 = \frac{Q^2}{8mc^2} B^2 r_{\perp}^2, \quad (3.63)$$

con r_{\perp} che rappresenta la proiezione di \mathbf{r} su di un piano perpendicolare a \mathbf{B} :

$$r_{\perp}^2 = r^2 - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})^2}{B^2}. \quad (3.64)$$

Esempio 3.4

Per la sostituzione minimale (3.58) e la (3.56), il momento della quantità di moto in presenza di campo magnetico risulta

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{L} + \mathbf{L}', \quad (3.65)$$

dove $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ è l'usuale momento angolare e

$$\mathbf{L}' = -\frac{Q}{c} \mathbf{r} \times \mathbf{A} \quad (3.66)$$

è un momento angolare *indotto* dal campo magnetico. Corrispondentemente, si possono definire un *momento magnetico proprio*,

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{Q}{2mc} \mathbf{L}, \quad (3.67)$$

e un *momento magnetico indotto*,

$$\boldsymbol{\mu}' = \frac{Q}{2mc} \mathbf{L}'. \quad (3.68)$$

Esercizio 3.5

Verificare che per il campo magnetico uniforme (3.59) il momento magnetico indotto può scriversi

$$\boldsymbol{\mu}' = \frac{Q^2}{4mc^2} [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} - r^2\mathbf{B}]. \quad (3.69)$$

Esercizio 3.6

Interpretare il termine “paramagnetico” H_1 e il termine “diamagnetico” H_2 dell’Esercizio 3.4.